УДК 621.396.96:621.391

Аверочкин В.А.
Averochkin V.A.

ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕКУРРЕНТНОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ ХОТЕЛЛИНГА

HOTELLING'S RECURRENT DETECTOR DESCRIPTIONS

Аннотация. Проведен сравнительный анализ характеристик рекуррентного обнаружителя Хотеллинга.

Summary. The comparative analysis of descriptions of Hotelling's recurrent detector is conducted.

Одной из основных проблем, решаемых при разработке систем радиолокационного обнаружения, является обеспечение постоянного значения вероятности ложной тревоги в условиях меняющейся помеховой обстановки.

Возможный подход к обеспечению стабилизации вероятности ложной тревоги состоит в использовании решающих статистик, вероятностные свойства которых не зависят от параметров помех. Так, в [1-3] установлено, что в условиях гауссовых выборок с неизвестными вектором средних значений S_n и ковариационной матрицей B_n критерий, использующий сравнение T^2-статистики Хотеллинга

$$T^2 = X_n^T \hat{B}_n^{-1} X_n, \tag{1}$$

где X_n – n–мерный вектор-столбец выборки; $\hat{B}_n$ – независимая от X_n оценка матрицы B_n; с определяемой вероятностью ложной тревоги F постоянным порогом T_0^2, является равномерно наиболее мощным и инвариантным к B_n критерием проверки гипотезы $H_0 : S_n = 0$ против альтернативы $H_1 : S_n \neq 0$. Однако практическая реализация процедуры формирования T^2, путём обращения максимально правдоподобной оценки матрицы B_n произвольной структуры

$$\hat{B}_n = m^{-1} \sum_{i=1}^{m} Z_{ni} Z_{ni}^T, \tag{2}$$

где Z_{ni} – независимые n - мерные обучающие векторы $(i = 1 \ldots m)$; m – объём обучающих векторов; сопряжена с существенными временными затратами выполнения операций оценивания и обращения полученной оценки. Сокращение временных затрат может быть достигнуто путём учёта структурных свойств матрицы B_n на этапе синтеза алгоритма формирования T^2 при известных характеристиках помех с последующей заменой неизвестных параметров их оценками. Так в [4], используя свойство тёплицевости B_n в условиях выборок с одинаковыми межэлементными временными интервалами, синтезирован обнаружитель Хотеллинга реализующий рекуррентное формирование T^2 без непосредственного оценивания и обращения оценки $\hat{B}_n$.

Целью настоящей статьи является сравнительный анализ характеристик разработанного в [4] рекуррентного обнаружителя Хотеллинга с характеристиками аналогичного обнаружителя использующего для построения статистики T^2 обращение оценки (2) и сравнение характеристик указанных обнаружителей с потенциально достижимыми значениями.

Очевидно, что обнаружитель, тем или иным способом формирующий статистику (1), является адаптивным и при увеличении объёма обучающих выборок его характеристики стремятся к потенциальным значениям, определяемым критерием

$$U^2 = X_n^T B_n^{-1} X_n \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} U_0^2, \tag{3}$$

где U_0^2 – постоянный порог, определяемый вероятностью ложной тревоги. Характеристики статистики U^2 рассматривались в [1,3,5]. В [1,3] показано, что её одномерные условные плотности распределения вероятностей определяются соотношениями

$$w_{1U^2}\left(x/H_0\right)=\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi}\,2^{\frac{n}{2}}} \text{ при } x\ge 0; \quad (4)$$

$$w_{1U^2}\left(x/H_1\right)=\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x+\lambda}{2}}}{\sqrt{\pi}\,2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^r}{(2r)!}B\left(\frac{n-1}{2},r+0.5\right) \text{ при } x\ge 0. \quad (5)$$

где $\lambda=S_n^T B_n^{-1}S_n$, $B(m,n)=\Gamma(m)\Gamma(n)/\Gamma(m+n)$ – бета-функция; $\Gamma(n)$ – гамма-функция.

Из (4,5) следует, что вероятности ложной тревоги F и правильного обнаружения D критерия (3) соответственно равны

$$F=\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{U_0^2}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right); \quad (6)$$

$$D=\frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\lambda)^r}{(2r)!}\cdot\frac{\Gamma(r+0.5)}{\Gamma\left(r+\frac{n}{2}\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}+r,\frac{U_0^2}{2}\right); \quad (7)$$

где $\Gamma(m,n)=\int\limits_n^{\infty}x^{m-1}e^{-x}dx$ – неполная гамма-функция.

Характеристики обнаружителя Хотеллинга использующего для формирования T^2 обращение оценки (2) исследовались в [2,3,5]. В [2,3] показано, что одномерные условные плотности распределения T^2 в этом случае определяются соотношением

$$w_{1T^2}\left(x/H_0\right)=m^{\frac{m-n+1}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(m+x)^{\frac{m+1}{2}}}\cdot\frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m-n+1}{2}\right)} \quad \text{при } x\ge 0 \quad (8)$$

$$w_{1T^2}\left(x/H_1\right)=m^{\frac{m-n+1}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\lambda}{2}}}{(m+x)^{\frac{m+1}{2}}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^r}{r!}\cdot\frac{\left(\frac{x}{m+x}\right)^r}{B\left(\frac{n}{2}+r,\frac{m-n+1}{2}\right)} \quad \text{при } x\ge 0 \quad (9)$$

Вероятности ложной тревоги F и правильного обнаружения D при этом соответственно равны

$$F=1-B\left(\frac{n}{2},\frac{m-n+1}{2},\frac{T_0^2}{m+T_0^2}\right)\Big/B\left(\frac{n}{2},\frac{m-n+1}{2}\right), \quad (10)$$

$$D=1-\frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m-n+1}{2}\right)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^r}{r!}B\left(\frac{n}{2}+r,\frac{m-n+1}{2},\frac{T_0^2}{m+T_0^2}\right), \quad (11)$$

где $B(m,n,k)=\int\limits_0^k x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ – неполная бета-функция.

Используя (6, 7) и (10, 11) рассчитаны, приведенные на рис. 1 и рис. 2 в виде кривых соответственно 1 и 2, характеристики обнаружения сигнала $S_n=S_0\left[-1\ \ 1-1\ldots\ 1\right]$ на фоне аддитивной смеси коррелированной помехи и некоррелированного шума при числе обрабатываемых отсчётов $n = 4$, объёме обучающих векторов, используемых для получения оценки (2), $m = 10$ и различных значениях вероятности ложной тревоги F. Там же (кривая 3) приведены рассчитанные методом математического моделирования аналогичные зависимости для обнаружителя реализующего рекуррентное формирование статистики Хотеллинга при объёмах обучающих выборок, используемых для оценивания неизвестных весовых коэффициентов, $m = 10$ и $m = 20$. При проведении расчётов предполагалось, что элементы ковариационной матрицы помехи определяются соотношением $\left[B_n\right]_{i,j} = \sigma_p^2 R^{(i-j)^2} + \sigma_u^2 \delta_{ij}$, где σ_p^2, σ_u^2 – дисперсии коррелированной помехи и некоррелированного шума; $R = 0.99$ – коэффициент корреляции помехи; δ_{ij} – символ Кронекера; и отношение шум/помеха равно $\sigma_u^2 / \sigma_p^2 = -30$ дБ.

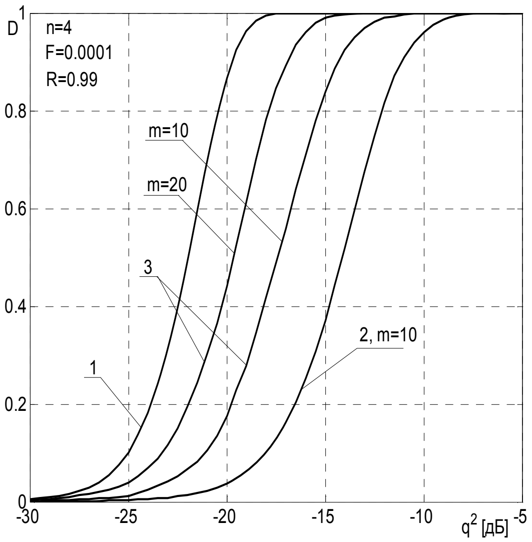

Рисунок 1

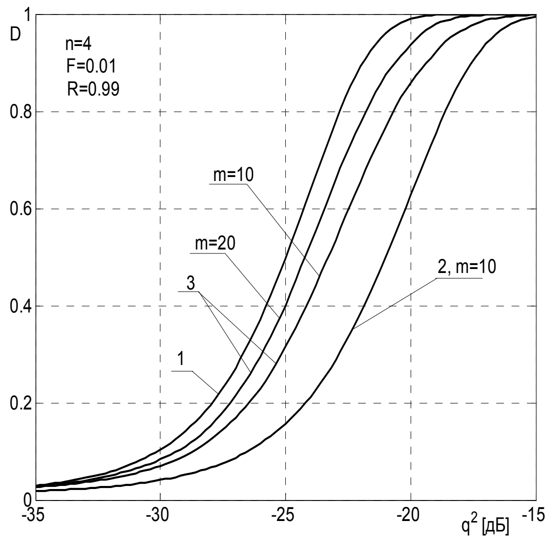

Рисунок 2

Анализ приведенных зависимостей показывает, что при одинаковом числе обучающих выборок m обнаружитель, использующий рекуррентное формирование решающей статистики, характеризуется вдвое меньшими потерями в отношении сигнал/помеха по сравнению с обнаружителем использующем оценку неизвестной ковариационной матрицы общего вида (2). При этом двукратное увеличение m в случае рекуррентного обнаружителя приводит к уменьшению потерь по сравнению с потенциальными значениями в два раза.

В заключение следует отметить, что учёт априорной информации позволяет не только упростить процедуру формирования решающей статистики Хотеллинга, но и, как показано выше, улучшить динамические характеристики обнаружителя.

Литература

1. *Кендалл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи: Пер. с англ. / Под ред. А.Н.Колмогорова. – М.: Наука, 1973. – 900 с.
2. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ: Пер. с англ. / Под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 500 с.
3. *Siotani M., Hayakawa T., Fujikoshi Y.* Modern Multivariate Statistical Analysis: A Graduate Course and Handbook. – Columbus, Ohio: ASP, 1985. – 700 p.
4. *Аверочкин В.А.* Рекуррентное формирование статистики Хотеллинга // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2003. – №4. – С. 74–76.
5. *Орлов В.В.* Эффективность адаптивного обнаружения сигнала на основе теста Хотеллинга // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2003. – №3. – С. 39–43.