УДК 517. 968

Черенков В.В., Черенков В.С.
Cherenkov V.V., Cherenkov V.S.

СВЯЗЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, МАТРИЦЫ КОТОРЫХ ОТЛИЧАЮТСЯ ЭЛЕМЕНТАМИ СТРОК

RELATIONS BETWEEN SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS WHICH MATRIXES DIFFER ELEMENTS OF LINES

Аннотация. Разработана методика получения соотношений, связывающих решения СЛАУ, матрицы которых отличаются элементами строк. Получены формулы, связывающие решения СЛАУ, матрицы которых отличаются элементами одной и двух строк.

Summary. Procedure of getting relationships, connecting systems solutions of SLAE which matrixes differ elements of lines is advanced. The formulas, SLAE knotting decision which matrixes differ elements of one or two lines are received.

Хорошо известно, что методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые широко используются в задачах радиотехники, разделяются на прямые (точные) и итерационные (приближенные) [1, 2]. Метод решения СЛАУ относят к классу точных, если в предположении отсутствия округлений он дает точное решение задачи после конечного числа арифметических и логических операций.

Итерационные методы имеют преимущество перед точными для таких систем линейных уравнений, которые имеют достаточно «разряженную» матрицу, т.е. для которых многие элементы этой матрицы, особенно вдали от главной диагонали, равны нулю.

Большинство распространенных точных методов решения систем линейных уравнений в своей основе опираются на метод Гаусса. В [3] предложен рекуррентный метод решения СЛАУ. Этот метод относится к точным методам. Однако он опирается не на метод Гаусса, а на соотношения, связывающие решения СЛАУ, матрицы которых отличаются элементами одного столбца.

Целью настоящей работы является получение соотношений, связывающих решения СЛАУ, матрицы которых отличаются элементами одной и двух строк. Эти соотношения могут быть использованы как для разработки нового рекуррентного метода решений СЛАУ, так и других задач линейной алгебры. При изложении статьи будут использованы обозначения, принятые в [4].

1. Связь решений СЛАУ, матрицы которых отличаются элементами одной строки. Рассмотрим СЛАУ следующего вида:

$$D \cdot Y = X\,, \tag{1}$$

$$B \cdot Z = X\,, \tag{2}$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ и $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ – матрицы-столбцы n-го порядка; $D = \|d_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2, ..., n$) – квадратные матрицы n-го порядка; i – номер строки; k – номер столбца.

Найдем связь между решениями Y и Z систем (1) и (2), в том случае, когда матрицы D и B отличаются только элементами одной ν-й ($\nu = 1, 2, ..., n$) строки.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть матрица B является неособенной, а матрица D отличается от матрицы B элементами одной ν-й ($\nu = 1, 2, ..., n$) строки. Для того, чтобы матрица D была неособенной необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

$$\sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} b_{k\nu}^{-1} \neq 0\,,\ \ \nu = 1,2,...,n\,, \tag{3}$$

где $b_{k\nu}^{-1}$ – элементы матрицы B^{-1}, обратной к матрице B.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

1. Необходимость. Пусть матрица D является неособенной. Докажем, что в этом случае выполняется неравенство (3). Для этого рассмотрим матрицу $C = DB^{-1}$. Вычислим элементы

матрицы C. Так как матрицы D и B отличаются элементами одной ν-ой строки, то элементы c_{ij} матрицы C определяются следующими формулами:

$$c_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, i \neq \nu, \\ \sum_{k=1}^{n} d_{ik} b_{kj}^{-1}, \; j = 1,2,...,n, i = \nu, \end{cases} \tag{4}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Используя формулу (4), вычислим определитель матрицы $C = DB^{-1}$ путем разложения по ν-му столбцу. При этом получаем, что

$$\det DB^{-1} = \sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} b_{k\nu}^{-1} . \tag{5}$$

Известно [1], что $\det DB^{-1} = \det D \det B^{-1}$. Так как $\det D \neq 0$ и $\det B^{-1} \neq 0$, то условие (3) выполняется.

2. Достаточность. Пусть условие (3) выполняется, тогда из (5) следует, что определитель матрицы D не равен нулю, т.е. она является неособенной.

Теорема 1 доказана.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Если матрицы D и B являются неособенными, то имеют место следующие тождества:*

$$D^{-1} - B^{-1} = D^{-1}(B - D)B^{-1}, \tag{6}$$

$$D^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - D)D^{-1}. \tag{7}$$

Для доказательства тождества (6) вычислим его правую часть и учтем, что $D^{-1}D = I, BB^{-1} = I$, где I – единичная матрица. Тогда

$$D^{-1}(B - D)B^{-1} = D^{-1}BB^{-1} - D^{-1}DB^{-1} = D^{-1} - B^{-1}.$$

Тождество (6) доказано. Аналогично доказывается тождества (7).

Лемма 1 доказана.

Найдем теперь связь между решениями систем (1) и (2). Имеет место

Теорема 2. *Если матрицы D и B уравнений* (1) *и* (2) *являются неособенными и отличаются элементами только одной ν-й строки, то решения Y и Z этих уравнений связаны между собой следующим соотношением:*

$$Y = Z + \frac{x_\nu - \sum_k d_{\nu k} z_k}{\sum_k b_{k\nu}^{-1} d_{\nu k}} Z(\nu), \quad \sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} b_{k\nu}^{-1} \neq 0, \; \nu = 1,2,...,n, \tag{8}$$

где x_ν – ν-й элемент правой части уравнений (1) *и* (2)*; z_k - элементы матрицы-столбца Z; $Z(\nu)$ - решение следующей системы уравнений:.*

$$B \cdot Z(\nu) = E(\nu), \tag{9}$$

где $E(\nu)$ – матрица-столбец, ν-й элемент которой равен единице, а все остальные элементы равны нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Умножим слева системы (1) и (2) соответственно на матрицы D^{-1} и B^{-1} и вычтем полученные результаты. Тогда

$$Y - Z = (D^{-1} - B^{-1})X. \tag{10}$$

Воспользуемся тождеством (7). Тогда соотношение (10) принимает следующий вид:

$$Y - Z = B^{-1}(B - D)D^{-1}X = B^{-1}(B - D)Y. \tag{11}$$

Так как матрицы D и B отличаются только элементами ν-й строки, то

$$(B - D) \cdot Y = \left[\sum_{k=1}^{n} (b_{\nu k} - d_{\nu k}) y_k \right] E(\nu). \tag{12}$$

Подставим последнее соотношение в (11). После несложных преобразований (с учетом того, что $B^{-1}E(\nu)=Z(\nu)$, а $B^{-1}X=Z$) получаем следующее равенство:

$$Y=Z+\left[\sum_{k=1}^{n}(b_{\nu k}-d_{\nu k})y_k\right]Z(\nu). \tag{13}$$

Умножим обе части последнего равенства на матрицу-строку с элементами $(b_{\nu k}-d_{\nu k}),\ k=1,2,...,n$, тогда получаем следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{\nu k}-d_{\nu k})y_k=\sum_{k=1}^{n}(b_{\nu k}-d_{\nu k})z_k+\sum_{k=1}^{n}(b_{\nu k}-d_{\nu k})y_k\ \sum_{k=1}^{n}(b_{\nu k}-d_{\nu k})z_k(\nu), \tag{14}$$

где $z_k(\nu)$ – k-тый элемент матрицы-столбца $Z(\nu)$.

Из последнего равенства следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{\nu k}-d_{\nu k})y_k=\frac{\sum_{k=1}^{n}(b_{\nu k}-d_{\nu k})z_k}{1-\sum_{k=1}^{n}(b_{\nu k}-d_{\nu k})z_k(\nu)}\ .$$

Преобразуем последнее равенство с учетом того, что $z_k(\nu)=b_{k\nu}^{-1}$, $\sum_{k=1}^{n}z_k b_{\nu k}=x_\nu$, а $\sum_{k=1}^{n}z_k(\nu)b_{\nu k}=1$. Тогда получаем следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{\nu k}-d_{\nu k})y_k=\frac{x_\nu-\sum_{k=1}^{n}d_{\nu k}z_k}{\sum_{k=1}^{n}d_{\nu k}b_{k\nu}^{-1}}\ .$$

Подставляя последнее равенство в равенство (13) и учитывая неравенство (3), получаем соотношения (8). Теорема 2 доказана.

Формула (8) позволяет найти решение системы (1) по решениям Z и $Z(\nu)$ системы (2) и системы (9) в том случае, когда матрицы этих систем отличаются только элементами одной строки.

Нетрудно видеть, что методика получения формулы (8) может быть легко перенесена на случай, когда матрицы СЛАУ отличаются элементами нескольких строк. Рассмотрим случай СЛАУ, матрицы которых отличаются элементами двух строк.

Связь решений СЛАУ, матрицы которых отличаются элементами двух строк.

Пусть матрицы D и B систем (1) и (2) отличаются элементами двух строк. Обозначим номера этих строк через ν и μ.

Имеет место

Теорема 3. *Пусть матрицы D и B отличаются элементами ν-й и μ-й строк и матрица B является неособенной. Для того, чтобы матрица D была неособенной необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}d_{\nu k}b_{k\nu}^{-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}d_{\mu k}b_{k\mu}^{-1}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}d_{\nu k}b_{k\mu}^{-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}d_{\mu k}b_{k\nu}^{-1}\right)\neq 0,\ \ \nu,\mu=1,2,...,n,\ \nu\neq\mu. \tag{15}$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1.

Найдем связь между решениями систем (1) и (2), матрицы которых отличаются элементами двух строк. Эту связь устанавливает нижеследующая теорема.

Теорема 4. *Если матрицы D и B уравнений* (1) *и* (2) *являются неособенными и отличаются элементами ν-й и μ-й строк, то решения Y и Z этих уравнений связаны между собой следующим соотношением:*

$$Y=Z+\frac{\Delta_1}{\Delta}Z(\nu)+\frac{\Delta_2}{\Delta}Z(\mu), \tag{16}$$

где

$$\Delta = \left(\sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} b_{k\nu}^{-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} d_{\mu k} b_{k\mu}^{-1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} b_{k\mu}^{-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} d_{\mu k} b_{k\nu}^{-1}\right), \tag{17}$$

$$\Delta_1 = \left(x_\nu - \sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} d_{\mu k} b_{k\mu}^{-1}\right) - \left(x_\mu - \sum_{k=1}^{n} d_{\mu k} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} b_{k\mu}^{-1}\right), \tag{18}$$

$$\Delta_2 = \left(x_\mu - \sum_{k=1}^{n} d_{\mu k} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} b_{k\nu}^{-1}\right) - \left(x_\nu - \sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} d_{\mu k} b_{k\nu}^{-1}\right), \tag{19}$$

где $Z(\nu)$ *– решение системы уравнений* (9).

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Подействуем на системы (1) и (2) соответственно матрицами D^{-1} и B^{-1} и вычтем полученные результаты. Тогда получаем соотношение (11).

Так как матрицы D и B отличаются только элементами ν-й и μ-й строк, то

$$(B - D)\cdot Y = a(\nu)E(\nu) + a(\mu)E(\mu), \tag{20}$$

где

$$a(j) = \left[\sum_{k=1}^{n}(b_{jk} - d_{jk})y_k\right],\ j = \nu,\ j = \mu .$$

Подставим соотношение (20) в (11). Тогда получаем следующее равенство:

$$Y = Z + a(\nu)Z(\nu) + a(\mu)Z(\mu). \tag{21}$$

Умножим обе части последнего равенства на матрицы-строки с элементами $(b_{\nu k} - d_{\nu k})$ и $(b_{\mu k} - d_{\mu k})$. Тогда получим систему двух уравнений для определения величин $a(\nu)$ и $a(\mu)$. Решая эту систему, получаем следующие равенства:

$$a(\nu) = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad a(\mu) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{22}$$

где величины Δ, Δ_1 и Δ_2 определяются соответственно формулами (17), (18) и (19).

Подставим (22) в (21). Получаем формулу (16). Из теоремы 3 видно, что $\Delta \neq 0$. Отсюда следует, что формула (16) имеет смысл.

Теорема 4 доказана.

Формула (16) (с учетом формул (17), (18) и (19)) позволяет найти решение системы (1) по решениям Z, $Z(\mu)$ и $Z(\nu)$ системы (2) с различными правыми частями.

Рассмотрим частный случай. Пусть матрица B является единичной, тогда $b_{k\nu}^{-1} = \delta_{k\nu}$ ($\delta_{k\nu}$, – символ Кронекера), $Z = X$, а $Z(j) = E(j)$. Нетрудно показать, что в этом случае формулы (3), (8), (15) - (19) приобретают соответственно следующий вид:

$$d_{\nu\nu} \neq 0, \tag{3a}$$

$$Y = X + \frac{x_\nu(1 - d_{\nu\nu})}{d_{\nu\nu}} E(\nu), \tag{8a}$$

$$d_{\nu\nu} d_{\mu\mu} - d_{\nu\mu} d_{\mu\nu} \neq 0, \tag{15a}$$

$$Y = X + \frac{\Delta_1}{\Delta} E(\nu) + \frac{\Delta_2}{\Delta} E(\mu), \tag{16a}$$

$$\Delta = d_{\nu\nu} d_{\mu\mu} - d_{\nu\mu} d_{\mu\nu}, \tag{17a}$$

$$\Delta_1 = \left(x_\nu - \sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} x_k\right) d_{\mu\mu} - \left(x_\mu - \sum_{k=1}^{n} d_{\mu k} x_k\right) d_{\nu\mu}, \tag{18a}$$

$$\Delta_2 = \left(x_\mu - \sum_{k=1}^{n} d_{\mu k} x_k\right) d_{\nu\nu} - \left(x_\nu - \sum_{k=1}^{n} d_{\nu k} x_k\right) d_{\mu\nu}. \tag{19a}$$

Формулы (3а) и (8а) относятся к СЛАУ, матрица которой имеет только одну (ν-ю) ненулевую строку (элементы других строк матрицы равны единице только на диагонали). При этом формула (8а) дает решение СЛАУ, а формула (3а) определяет известное условие ее разрешимости.

Формулы (15а) и (16а) относятся к СЛАУ, матрица которой имеет только две ненулевых строки (ν-ю) и (μ-ю). При этом формула (16а) дает решение СЛАУ, а формула (15а) определяет условие ее разрешимости.

В заключение отметим, что разработанная методика получения формул (8) и (16) и сами формулы может быть использована для анализа возмущенных матриц, для разработки новых алгоритмов построения обратных матриц и решений систем линейных алгебраических уравнений. Эти вопросы авторы предполагают рассмотреть в следующих работах.

Литература

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1975. – С. 872.
2. *Лучка А.Ю., Кучерук Т.А.* Ітераційний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями // Україннський математичний журнал. – 2002. – Т. 54. – № 4. – С. 472-482.
3. *Черенков В.С.* Новый метод решения системы линейных уравнений / Праці УНДІРТ, 2003, – №2 (34). – С.106-108.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – С. 575.