

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ КАЛМАНА

DEVELOPMENT OF THE ADAPTIVE KALMAN FILTER ALGORITHM

Аннотация. В статье представлены результаты разработки алгоритма адаптивной фильтрации Калмана. Дана оценка сложности разработанного алгоритма подстройки коэффициентов фильтра.

Summary. This article presents the Kalman filter adaptive algorithm development results. The filter coefficient tuning algorithm complexity estimation was given.

Одним из путей повышения помехоустойчивости цифровых систем передачи является реализация оптимальных методов демодуляции сигналов, которые требуют наличия оценок неинформационных параметров сигналов [1]. Получить оптимальную, по критерию минимума среднеквадратической ошибки, оценку заданного параметра (сообщения) в условиях воздействия белого гауссовского шума позволяет фильтр Калмана. Уникальность фильтра Калмана заключается в том, что он обеспечивает наилучшую оценку как среди линейных, так и нелинейных фильтров, если распределение сообщения гауссовское [2]. Однако практическое применение фильтра Калмана ограничено случаями, когда параметры моделей сообщения и наблюдения известны точно. В том случае, когда параметры моделей сообщения и наблюдения неизвестны, необходимо использовать алгоритмы адаптивной фильтрации Калмана. Наиболее удачные алгоритмы адаптивной фильтрации Калмана основаны на обработке невязки [3, 4]. В таких алгоритмах осуществляется расчет функции корреляции невязки, свойства которой позволяют рассчитать коэффициент усиления фильтра. Однако, даже для скалярного фильтра Калмана, выражение расчета коэффициента усиления включает в себя произведение матрицы значений функции корреляции невязки и некоторой весовой матрицы, для получения которой выполняется операция обращения. Это свидетельствует о значительной вычислительной сложности алгоритмов [3, 4]. К недостаткам таких алгоритмов можно также отнести то, что они не позволяют оценить коэффициент передачи модели наблюдения – он должен быть известным.

Поэтому целью данной работы стала разработка более простого, с точки зрения вычислительной сложности, алгоритма адаптивной фильтрации Калмана на основе обработки невязки, который к тому же позволяет оценивать коэффициент передачи модели наблюдения.

1. Постановка задачи. В соответствии с алгоритмом дискретной фильтрации Калмана оптимальная оценка стационарного сообщения $\lambda(i+1)$ имеет следующий вид [2]:

$$\hat{\lambda}(i+1) = a\hat{\lambda}(i) + K[z(i+1) - ca\hat{\lambda}(i)], \quad (1)$$

где $\lambda(i+1) = a\lambda(i) + w(i)$ – оцениваемый процесс (модель сообщения);

a – коэффициент фильтра, формирующего сообщение $\lambda(i+1)$, $|a| < 1$;

$w(i)$ – порождающий шум, белый гауссовский шум с дисперсией σ_w^2 ;

$z(i+1) = c\lambda(i+1) + n(i+1)$ – наблюдаемый процесс (модель наблюдения);

c – коэффициент передачи модели наблюдения;

$n(i+1)$ – шум наблюдения, белый гауссовский шум с дисперсией σ_n^2 ;

K – коэффициент усиления фильтра Калмана.

Оптимальный коэффициент усиления фильтра Калмана, минимизирующий дисперсию ошибки, определяется следующим образом [2]:

$$K = \frac{ca^2\tilde{\lambda}^2 + c\sigma_w^2}{c^2a^2\tilde{\lambda}^2 + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2}, \quad (2)$$

где $\tilde{\lambda}(i)$ – ошибка оценки сообщения;

$\tilde{\lambda}^2$ – дисперсия ошибки.

Задачу адаптивной фильтрации можно сформулировать следующим образом: параллельно с оцениванием значений сообщения $\lambda(i+1)$ необходимо оценивать значения коэффициентов a , c и K .

На практике коэффициент a можно точно рассчитать [5], поэтому его можно считать известным и оценивать только коэффициенты c и K .

2. Коэффициент усиления фильтра Калмана. Знаменатель выражения (2) можно рассчитать на основе невязки:

$$\begin{aligned} z(i+1) - ca\hat{\kappa}(i) &= c\lambda(i+1) + n(i+1) - ca\hat{\kappa}(i) = ca\lambda(i) + cw(i) + n(i+1) - ca\hat{\kappa}(i) = \\ &= ca\tilde{\lambda}(i) + cw(i) + n(i+1). \end{aligned} \quad (3)$$

Усреднение квадрата невязки дает следующий результат:

$$\overline{[z(i+1) - ca\hat{\kappa}(i)]^2} = c^2 a^2 \overline{\tilde{\lambda}^2} + c^2 \sigma_w^2 + \sigma_n^2. \quad (4)$$

При получении последнего выражения учитывалась взаимная независимость значений ошибки оценки $\tilde{\lambda}(i)$, порождающего шума $w(i)$ и шума наблюдения $n(i+1)$ [2].

Для того, чтобы рассчитать числитель выражения (2) необходимо знать дисперсию шума наблюдения σ_n^2 и коэффициент передачи c . При этих известных параметрах коэффициент усиления фильтра Калмана рассчитывается следующим образом:

$$K = \frac{1}{c} \frac{\overline{[z(i+1) - ca\hat{\kappa}(i)]^2} - \sigma_n^2}{\overline{[z(i+1) - ca\hat{\kappa}(i)]^2}}. \quad (5)$$

3. Дисперсия шума наблюдения. Для того, чтобы оценить значение дисперсии шума наблюдения необходимо учесть [2]:

- статистическую независимость значений шума наблюдения, т.е. $\overline{n(i+1)n(i)} = 0$;
- статистическую независимость значений оцениваемого процесса и шума наблюдения, т.е. $\overline{\lambda(i)n(i)} = 0$;
- статистическую независимость значений оцениваемого процесса и порождающего шума, т.е. $\overline{\lambda(i)w(i)} = 0$.

Тогда:

$$\overline{z^2(i)} = \overline{[c\lambda(i) + n(i)]^2} = c^2 \overline{\lambda^2} + \sigma_n^2; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \overline{z(i+1)z(i)} &= \overline{[c\lambda(i+1) + n(i+1)][c\lambda(i) + n(i)]} = \\ &= c^2 \overline{\lambda(i+1)\lambda(i)} = c^2 \overline{[a\lambda(i) + w(i)]\lambda(i)} = c^2 a \overline{\lambda^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sigma_n^2 = \overline{z^2(i)} - a^{-1} \overline{z(i+1)z(i)}. \quad (8)$$

4. Коэффициент передачи модели наблюдения. Если для оценки дисперсии шума наблюдения используются корреляционные свойства шума наблюдения и оцениваемого процесса, то для оценки коэффициента передачи c необходимо использовать корреляционные свойства наблюдаемого процесса $z(i+1)$ и оценки $\hat{\kappa}(i)$:

$$\overline{z(i+1)\hat{\kappa}(i)} = \overline{[c\lambda(i+1) + n(i+1)]\hat{\kappa}(i)} = c \overline{[a\lambda(i) + w(i)]\hat{\kappa}(i)} = ca \overline{\lambda(i)\hat{\kappa}(i)}. \quad (9)$$

Используя лемму об ортогональном проецировании [2], можно записать:

$$\overline{z(i+1)\hat{\kappa}(i)} = ca \hat{\kappa}^2. \quad (10)$$

Тогда оценка коэффициента передачи модели наблюдения имеет следующий вид:

$$c = \frac{\overline{z(i+1)\hat{\kappa}(i)}}{a \hat{\kappa}^2}. \quad (11)$$

5. Рекуррентные соотношения. Резюмируя выкладки, можно перечислить вычисления, необходимые для реализации процесса адаптивной фильтрации:

- по формуле (8) рассчитывается дисперсия шума наблюдения σ_n^2 ;
- по формуле (11) рассчитывается коэффициент передачи модели наблюдения c ;
- по формуле (5) рассчитывается коэффициент усиления фильтра Калмана K ;
- по формуле (1) рассчитывается оценка $\hat{x}(i+1)$.

Одним из преимуществ фильтра Калмана считается возможность рекуррентного оценивания, поскольку известно, что рекуррентные алгоритмы обладают меньшей вычислительной сложностью [6]. Алгоритмы адаптивной фильтрации Калмана описанные в [3, 4] также являются рекуррентными.

Операции усреднения в выражениях разработанного алгоритма можно также осуществить на основе рекуррентных соотношений, используя классические нерекуррентные соотношения [7]. В табл. 1 представлены соответствующие соотношения, а на рис. 1 представлен разработанный алгоритм адаптивной фильтрации Калмана.

Таблица 1 – Рекуррентные соотношения для адаптивного фильтра Калмана

Нерекуррентные соотношения	Рекуррентные соотношения
$\overline{z^2(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i z^2(j)$	$\overline{z^2(i)} = \frac{1}{i+1} z^2(i) + \frac{i}{i+1} \overline{z^2(i-1)}$
$\overline{z(i+1)z(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i z(j+1)z(j)$	$\overline{z(i+1)z(i)} = \frac{1}{i+1} z(i+1)z(i) + \frac{i}{i+1} \overline{z(i)z(i-1)}$
$\overline{z(i+1)\hat{x}(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i z(j+1)\hat{x}(j)$	$\overline{z(i+1)\hat{x}(i)} = \frac{1}{i+1} z(i+1)\hat{x}(i) + \frac{i}{i+1} \overline{z(i)\hat{x}(i-1)}$
$\overline{\hat{x}^2(i)} = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i \hat{x}^2(j)$	$\overline{\hat{x}^2(i)} = \frac{1}{i+1} \hat{x}^2(i) + \frac{i}{i+1} \overline{\hat{x}^2(i-1)}$
$\begin{aligned} \overline{[z(i+1) - ca\hat{x}(i)]^2} &= \\ &= \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i [z(j+1) - ca\hat{x}(j)]^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \overline{[z(i+1) - ca\hat{x}(i)]^2} &= \\ &= \frac{1}{i+1} [z(i+1) - ca\hat{x}(i)]^2 + \\ &+ \frac{i}{i+1} \overline{[z(i) - ca\hat{x}(i-1)]^2} \end{aligned}$

Поскольку в рекуррентных соотношениях табл. 1 отсутствуют матричные операции, то можно сделать вывод, что разработанный алгоритм проще представленных в работах [3, 4]. Действительно, для этих алгоритмов на каждом такте необходимо выполнить 72 операции умножения и 17 операций сложений, а для представленного здесь алгоритма – 27 и 8 соответственно.

Вычислительная сложность разработанного алгоритма оказалась меньшей, поскольку удалось найти выражение оценки дисперсии шума наблюдения, что позволило упростить расчет коэффициента усиления фильтра Калмана на основе невязки. В алгоритмах [3, 4] для расчета коэффициента усиления используется только невязка.

6. Устойчивость. Разработанный алгоритм является устойчивым, поскольку он обеспечивает выполнение условия устойчивости фильтра Калмана [8]:

$$\frac{|a|-1}{|a|c} < K < \frac{|a|+1}{|a|c}. \tag{12}$$

Для доказательства неравенства (12) необходимо проанализировать выражение (5). В это выражение входят средний квадрат невязки и дисперсия шума наблюдения. Средний квадрат невязки, в соответствии с выражением (4), является положительной величиной, поскольку является суммой квадратов различных величин. Дисперсия шума наблюдения также положительная величина, меньшая среднего квадрата невязки. Поэтому:

$$0 < \frac{[z(i+1) - ca\hat{x}(i)]^2 - \sigma_n^2}{[z(i+1) - ca\hat{x}(i)]^2} < 1. \quad (13)$$

Деление неравенства (13) на c , учитывая выражение (5), дает следующий результат:

$$0 < K < 1/c. \quad (14)$$

Очевидно, что пределы неравенства (14) всегда находятся внутри пределов неравенства (12), так как $|a| < 1$, что свидетельствует об устойчивости разработанного алгоритма.

В завершение следует еще раз подчеркнуть, что представленный алгоритм является более простым с точки зрения вычислительной сложности по сравнению с алгоритмами разработанными ранее. Кроме того, алгоритм позволяет оценивать коэффициент передачи модели наблюдения, чего не позволяли алгоритмы [3, 4]. Моделирование показало высокую точность алгоритма – относительная ошибка оценки параметров c , σ_n^2 и K не превышает пяти процентов. Результаты исследований робастных свойств фильтра Калмана [8] позволяют сделать вывод, что такая точность оценки параметров приводит к увеличению дисперсии ошибки оценки сообщения не более, чем на пять процентов. Недостатком алгоритма является достаточно большое время сходимости, которое может достигать нескольких тысяч отсчетов для отношений сигнал/шум меньших единицы, а для отношений сигнал/шум больших единиц это время не превышает ста отсчетов. Так, для алгоритмов [3, 4] время сходимости составляет семь отсчетов, если отношение сигнал/шум – 7,5 дБ, а время сходимости разработанного алгоритма при таком отношении сигнал/шум составляет 30 отсчетов.

Литература

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – 2-е изд.: Пер. с англ. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2003. – 1104 с.
2. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении: Пер. с англ. / Под ред. проф. Б. Р. Левина. – М.: Связь, 1976. – 496 с.
3. Oussalah M., De Schutter J. Adaptive Kalman filter for noise identification // International conference on noise and vibration engineering. – September. – 2000. – P. 1225 – 1232.
4. Carrew B., Bellanger P. Identification of optimum filter steady state gain for systems with unknown noise parameters // IEEE Trans. Automatic control. – 1973. – Vol. 18. – №6. – P. 582 – 587.
5. Jiang T., Sidiropoulos N.D., Giannakis G.B. Kalman filtering for power estimation in mobile communications // IEEE Trans. on wireless communications. – January. – 2003. – P. 151–161.
6. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси: Пер. с нем. – М.: Наука, 1982. – 200 с.
7. Крамер Г. Математические методы статистики: Пер. с англ. А.С. Мониной и А.А. Петрова / Под ред. А.Н. Колмогорова. – 2-е изд. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
8. Иващенко П.В., Решетняк О.А. Исследование фильтра Калмана и его робастных свойств // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – №2. – С. 27-31.

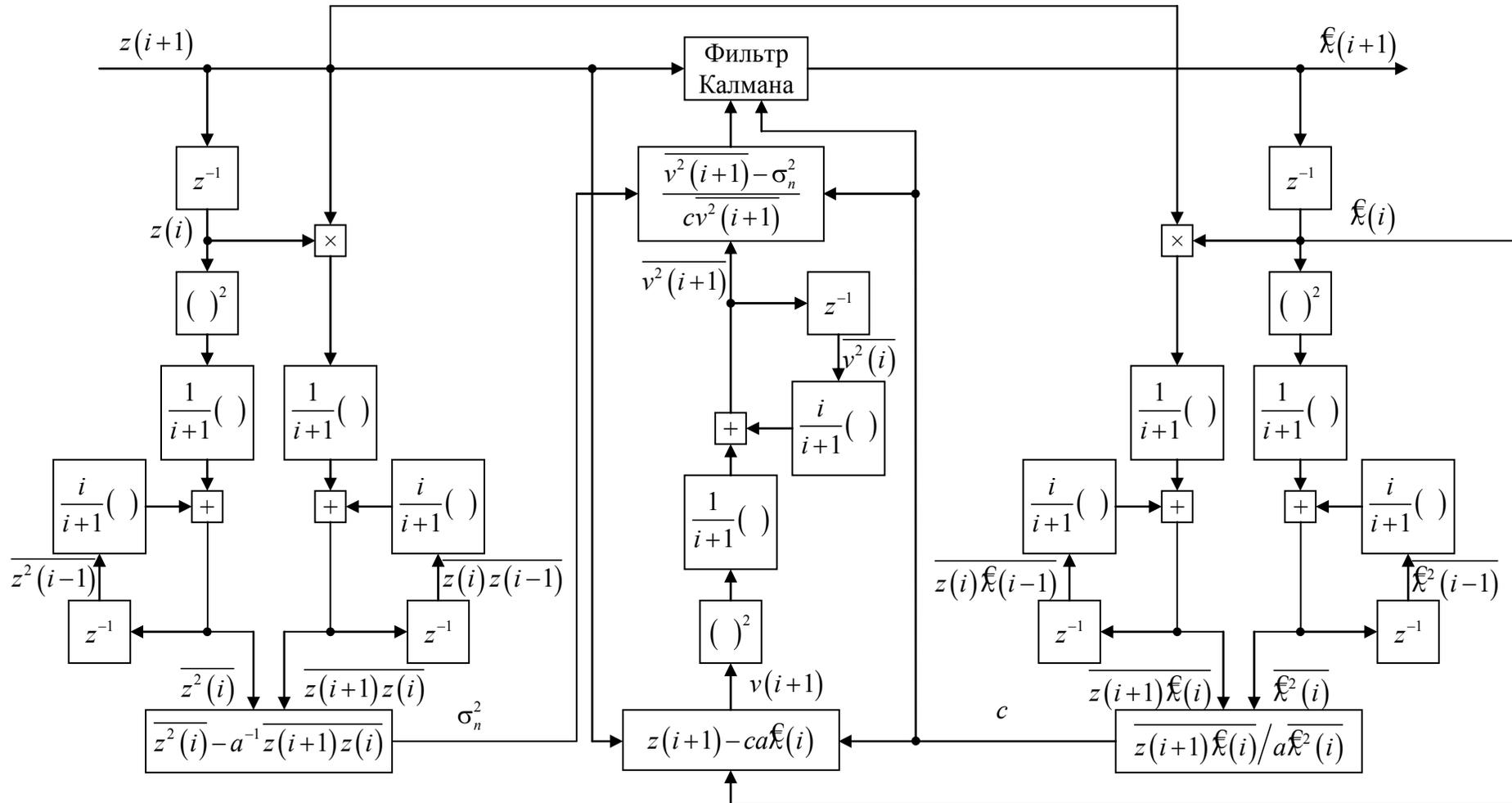


Рисунок 1 – Алгоритм адаптивной фильтрации Калмана