

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОДСЕТЕЙ**  
**STEPWISE COMPOSITION OF FUNCTIONAL SUBNETS**

**Аннотация.** Последовательная композиция обеспечивает дополнительное ускорение вычислений за счёт решения последовательности систем меньшей размерности для подмножеств контактных позиций. Для формального представления декомпозиции на функциональные подсети использован мультиграф. Так как последовательная композиция сжимает граф в единственную вершину, задача названа коллапсом мультиграфа. Ширина коллапса соответствует размерности решаемых систем. Изучены свойства коллапса; получены оценки верхней и нижней границы ширины коллапса. Предложен простой и эффективный эвристический алгоритм коллапса. Результаты коллапса произвольных графов с помощью этого алгоритма показали, что он обеспечивает ширину коллапса, близкую к оптимальной.

**Summary.** Stepwise composition allows the additional speed-up of computations at the expense of solution the sequence of systems with lesser dimension for subsets of contact places. For formal representation of decomposition into functional subnets multigraph was used. Since stepwise composition compress graph into single vertex, the task was named a collapse of multigraph. The width of collapse corresponds to dimension of solving system. Properties of collapse were studied; upper and lower bounds for width of collapse were obtained. Simple and effective heuristic algorithm of collapse was suggested. Results of arbitrary graphs collapse with this algorithm have shown that it provides a width of collapse close to optimal.

Сети Петри широко применяют для анализа и синтеза телекоммуникационных систем и сетей [1,2]. При этом модели Петри реальных объектов характеризуются большой размерностью. Фундаментальное уравнение сети Петри, а также уравнения для вычисления инвариантов [3] представляют собой системы линейных диофантовых уравнений, которые необходимо решать на множестве целых неотрицательных чисел. Известные методы решения таких систем [4] имеют экспоненциальную сложность. Таким образом, возникает научная проблема анализа моделей Петри большой размерности.

Представленная в [5] декомпозиция сетей Петри на функциональные подсети позволяет получить ускорение вычислений при нахождении инвариантов [6] и решении фундаментального уравнения [7]. Применённая в [6,7] композиция основана на решении системы уравнений для всех контактных позиций одновременно. При верификации телекоммуникационных протоколов [8,9,10] для получения дополнительного ускорения вычислений в качестве эвристики использована последовательная композиция. Однако методы последовательной композиции сетей Петри не были формализованы, что ограничивает возможности их применения при исследовании произвольных заданных моделей Петри.

Целью настоящей работы является формализация задачи последовательной композиции функциональных подсетей в терминах теории графов [11] и построение эффективных методов её решения.

**1. Композиционные методы анализа сетей Петри.** Композиция функциональных подсетей [6] обеспечивает экспоненциальное ускорение вычислений. При этом основными этапами являются:

- решение систем для каждой минимальной функциональной подсети;
- решение системы для контактных позиций.

В случае, когда общее количество контактных позиций превышает максимальную размерность подсети, целесообразно выполнять последовательное решение систем меньшей размерности для подмножеств контактных позиций, осуществляя пошаговую композицию. В качестве характеристики сложности систем будем рассматривать количество используемых в композиции контактных позиций.

Графом декомпозиции сети Петри  $N$  будем называть тройку  $G = (V, E, W)$ , где вершины  $v \in V$  соответствуют минимальным функциональным подсетям:  $v \leftrightarrow Z, Z \succ N$ ; рёбра  $E \subseteq [V]^2$  соединяют подсети, имеющие общие контактные позиции:  $v_1 v_2 \in E \Leftrightarrow \exists p \in C : (\bullet p = Z^1 \wedge p \bullet = Z^2) \vee (\bullet p = Z^2 \wedge p \bullet = Z^1)$ ; весовая функция  $W : E \rightarrow \mathbb{N}$  отображает ребро в количество контактных позиций.

Композицию, изученную в [6,7], будем называть *одновременной*. Она представляет моментальное сжатие графа декомпозиции в единственную вершину. Рассмотрим операцию стягивания рёбер графа [11]. Такая операция соответствует парной композиции двух соседних подсетей. Последо-

вательное выполнение стягивания рёбер также обеспечивает сжатие графа в единственную вершину. В отличие от известного определения операции стягивания [11], необходимо рассмотреть веса рёбер. Соответствующая задача названа *рёберным коллапсом мультиграфа*.

**2. Рёберный коллапс мультиграфа.** Рассмотрим граф декомпозиции заданной сети Петри на минимальные функциональные подсети. Граф содержит кратные дуги и поэтому назван мультиграфом [11]; кроме того, предполагаем, что граф не содержит петель.

Пусть  $G = (V, E, W)$  – заданный мультиграф. Не ограничивая общности, будем считать, что  $G$  – связный граф, в противном случае выполним коллапс отдельно по компонентам. Определим *операцию рёберного коллапса*  $G/e$  для ребра  $e \in E$  следующим образом. Пусть  $e = v_1v_2$ . Тогда  $G/e = G' = (V', E', W')$ , где  $V' = (V / \{v_1, v_2\}) \cup v$  и  $v$  – новая вершина, представляющая стягивание (слияние) вершин  $v_1, v_2$ :

$$E' = (E / (v_1v_2 \cup \{v_1u | u \in V, v_1u \in E\} \cup \{v_2u | u \in V, v_2u \in E\})) \cup \{vu | u \in V', v_1u \in E \vee v_2u \in E\},$$

$$W'(vu) = \begin{cases} W(v_1u) + W(v_2u), & v_1u \in E \wedge v_2u \in E, \\ W(v_1u), & v_1u \in E \wedge v_2u \notin E, \\ W(v_2u), & v_2u \in E \wedge v_1u \notin E. \end{cases}$$

Таким образом, при слиянии вершин, ребра, инцидентные обеим вершинам, объединяются.

**Утверждение 1.** Операция рёберного коллапса сохраняет связность графа.

**Утверждение 2.** Верно следующее выражение для сумм весов рёбер:  $S(G) = S(G') + w(e)$ .

В соответствии с терминологией [11] граф с  $|V| = k$  и  $|E| = l$  будем называть  $(k, l)$ -графом или  $k$ -графом. Так как при выполнении операции рёберного коллапса стягивается пара смежных вершин, рёберный коллапс всего графа состоит в последовательном выполнении  $(k - 1)$  операций рёберного коллапса. *Процесс последовательного рёберного коллапса  $k$ -мультиграфа* – это последовательность  $(k - 1)$  операций рёберного коллапса:

$$G^0 = G \rightarrow G^1 = G^0 / e_1 \rightarrow G^2 = G^1 / e_2 \rightarrow \dots \rightarrow G^{k-1} = G^{k-2} / e_k.$$

Заметим, что полученный в результате граф  $G^{k-1}$  состоит из единственной вершины. Это вполне соответствует названию процесса, который сжимает исходный граф в вершину. Процесс коллапса можно представить последовательностью стягиваемых рёбер  $\sigma = e_1e_2\dots e_{k-1}$ . В качестве основного параметра коллапса будем рассматривать его ширину. *Ширина коллапса* – это максимальный вес ребра в процессе коллапса:

$$d(\sigma) = \max_{e \in \sigma} w(e).$$

Выбор различных последовательностей рёбер  $e_1e_2\dots e_k$  в общем случае приводит к различным значениям ширины коллапса. *Оптимальным процессом коллапса* будем называть последовательность рёбер, обеспечивающую минимальную ширину коллапса. Соответствующую ширину коллапса будем называть *оптимальной шириной*. Оптимальная ширина коллапса является свойством заданного графа. Введём рекуррентное определение оптимальной ширины коллапса. Обозначим  $d(G)$  ширину рёберного коллапса графа  $G$ . Тогда

$$\begin{cases} d(G) = \min_e d(G, e), \\ d(G, e) = \max(w(e), d(G/e)), \end{cases}$$

где функция двух аргументов  $d(G, e)$  обозначает оптимальную ширину рёберного коллапса графа  $G$  при условии, что коллапс ребра  $e$  будет выполнен первоначально.

Рёберный коллапс представляет собой комбинаторную задачу, для решения которой может быть применён универсальный метод полного перебора всех возможных последовательностей рёбер. Точное число различных последовательностей равно  $K(G) = \prod_{i=0, k-2} |E^i|$ . Так как на каждом шаге стягивается пара смежных вершин, максимальное количество смежных вершин имеет место в полном

графе. Количество рёбер полного  $k$ -графа равно  $\frac{k \cdot (k-1)}{2}$ . Тогда

$$\mathcal{K}(G) = \prod_{i=2, k} \frac{i \cdot (i-1)}{2} = \frac{k! \cdot (k-1)!}{2^{k-1}} = \frac{(k!)^2}{k \cdot 2^{k-1}}.$$

Например:  $\mathcal{K}(10) = 2,6 \cdot 10^9$ ,  $\mathcal{K}(20) = 5,7 \cdot 10^{29}$ ,

$\mathcal{K}(100) = 1,4 \cdot 10^{284}$ . Таким образом, необходим поиск эффективных методов решения задачи рёберного коллапса.

Дерево полного перебора коллапса графа декомпозиции модели протокола TCP [9,10] представлено на рис. 1. Заметим, что даже для такого простого графа получены значения ширины, отличающиеся вдвое (8 и 4) для различных последовательностей коллапса.

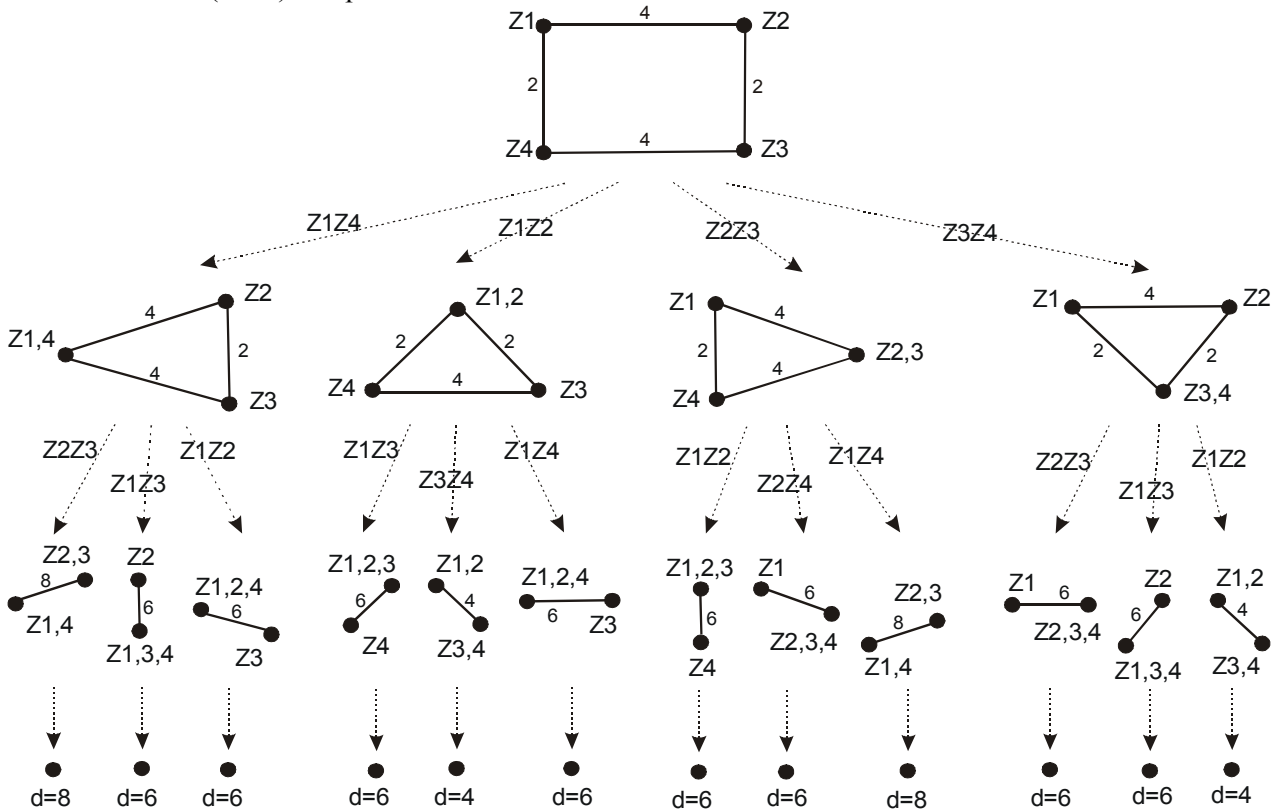


Рисунок 1 – Дерево полного перебора коллапса графа декомпозиции модели протокола TCP

**Теорема 1.** Ширина коллапса ациклического графа равна максимальному весу ребра.

*Доказательство.* Операция рёберного коллапса ациклического графа приводит к получению нового ациклического графа, который содержит количество рёбер, на единицу меньше, чем исходный граф. Кроме того, эта операция не изменяет веса оставшихся рёбер. Таким образом, ширина коллапса не зависит от порядка выбора рёбер и равна максимальному весу ребра.

Любая простая цепь может быть заменена ребром минимального веса при ширине коллапса, равной максимальному весу ребра. Это соответствует выбору ребра максимального веса на шаге. Не ограничивая общности, можем рассматривать далее компактные графы, не содержащие простых цепей и висячих вершин.

**Утверждение 3.** Если граф имеет точки сочленения, то ширина коллапса равна максимальной ширине среди его двусвязных компонентов (блоков).

**Теорема 2.** Ширина коллапса простого цикла равна  $\max(w(e)), \min(w(e_1) + w(e_2))$ .

*Доказательство.* Простой цикл преобразуется в цикл меньшей размерности до тех пор, пока не будет получен треугольник. При коллапсе треугольника получается граф, состоящий из единственного ребра веса, равного сумме весов рёбер, отличных от стягиваемого. Таким образом, ширина коллапса определяется, с одной стороны, максимальным весом ребра перед стягиванием треугольника, а, с другой стороны, весом последнего ребра. Следовательно, нижней границей ширины является как вес максимального ребра, так и суммарный вес пары рёбер.

**Теорема 3.** Оптимальный коллапс простого цикла соответствует выбору на шаге ребра максимально веса.

*Доказательство.* Коллапс простого цикла выполняется без изменения весов рёбер до тех пор, пока не будет получен треугольник. Выбор максимального ребра гарантирует, что при получении треугольника останутся три ребра минимального веса. Кроме того, при коллапсе треугольника выбор максимального ребра обеспечивает минимальный суммарный вес оставшихся рёбер. Действительно, выполняется следующее равенство:  $\min_{e_1, e_2} (w(e_1) + w(e_2)) = \min_{e_1} (e_1) + \min_{e_2 \neq e_1} (e_2)$ .

Графы, полученные в результате стягивания рёбер, называют минорами исходного графа [11]. Рассмотрим решётку миноров, полученных в результате коллапса, которую назовём *частичной решёткой коллапса*. Решётка состоит из  $(k - 1)$  уровней. На  $i$ -м уровне точками представлены рёбра текущего графа  $G^i$ . Линии соответствуют отношению частичного порядка  $\ll$  рёбер текущего и предыдущего уровней таким образом, что:

$$e^i \ll u^{i+1} \Leftrightarrow u^{i+1} = e^i \vee u^{i+1} = e^i + v^i.$$

Частичная решётка является наглядным представлением процесса коллапса. В соответствии с определением операции коллапса на каждом шаге стягивается одно ребро. Если концы этого ребра не имеют общих смежных вершин (не формируют треугольников вместе с другими рёбрами), то на следующем уровне присутствуют все рёбра за исключением стягиваемого. Если ребро образует один либо несколько треугольников, то каждая пара рёбер треугольника заменяется одним ребром. Рекуррентное соотношение для числа рёбер  $l_i = l_{i-1} - 1 - r$ , где  $r$  – количество треугольников, определяемых стягиваемым ребром. Решётка иллюстрирует взаимосвязи рёбер. Таким образом, каждое ребро на шаге коллапса представляет собой либо ребро исходного графа, либо сумму некоторых рёбер.

Решётки двух различных последовательностей коллапса, показанных на рис. 1, представлены на рис. 2. Стягиваемые рёбра помечены диагональным крестом.

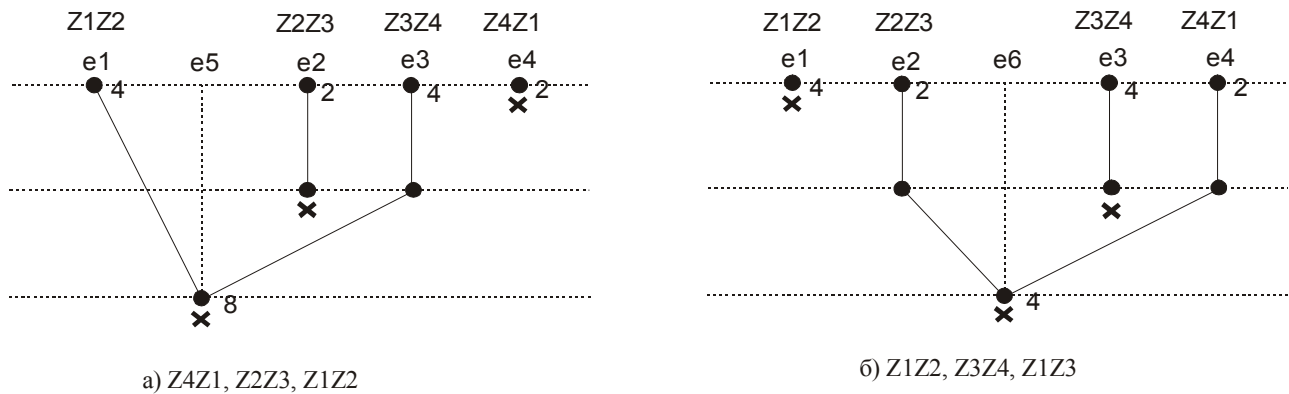


Рисунок 2 – Частичные решётки коллапса

**Утверждение 4.** Каждое ребро на шаге коллапса является суммой некоторых рёбер исходного графа.

Таким образом, ширина коллапса равна весу ребра, полученного на некотором шаге. Такое ребро будем называть *критическим ребром коллапса*. Критическое ребро либо просто стягивается в процессе коллапса, либо остаётся его последним ребром.

**3. Оценки верхних и нижних границ ширины коллапса.** Так как комбинаторное решение задачи оптимального коллапса требует экспоненциального времени, необходимо применить более эффективные методы. Для применения метода ветвей и границ [12] необходимо построить оценки верхних и нижних границ ширины коллапса.

В соответствии с определением ширины рёберного коллапса:

$$\max_e w(e) \leq d(G) \leq \sum_e w(e).$$

Так как приведенная оценка является достаточно грубой, рассмотрим процесс добавления рёбер, соединяющих пару несмежных вершин. Изучим влияние этой операции на ширину коллапса.

**Теорема 4.** Добавление ребра, соединяющего пару несмежных вершин, увеличивает ширину коллапса не более чем на вес добавленного ребра.

*Доказательство.* Пусть ширина коллапса графа  $G$  равна  $d(G)$  и достигается последовательностью  $\sigma$ . Рассмотрим граф  $G + e$  и выполним его коллапс с помощью той же самой последовательности  $\sigma$ . Пусть  $e = v_1 v_2$ .

При выполнении операции коллапса будем помечать символом  $v_1$  все вершины, стягиваемые с вершиной  $v_1$ , а символом  $v_2$  все вершины, стягиваемые с вершиной  $v_2$ . Во-первых, вершины  $v_1, v_2$  несмежные в исходном графе. Во-вторых, граф связный. Следовательно, на некотором шаге коллапса будет получена вершина  $u$ , смежная как с вершиной  $v_1$ , так и с вершиной  $v_2$ . Стягивание этой вершины в графе  $G$  с одной из вершин  $v_1, v_2$  приводит к созданию ребра  $e' = v_1 v_2$ . Далее это ребро может участвовать в образовании критического ребра, либо будет просто аннулировано.

Рассмотрим выполнение рассмотренной операции в графе  $G + e$ . Перед получением треугольника, образованного ребром  $e$  и вершиной  $u$  процесс не отличается от ранее рассмотренного. При стягивании вершины  $u$  вместе с одной из вершин  $v_1, v_2$  получим вместо ребра веса  $w(e')$  ребро веса  $w(e') + w(e)$ . Далее это ребро либо будет включено в критическое ребро коллапса, либо будет просто аннулировано. В первом случае ширина коллапса увеличится на величину  $w(e)$ , во втором случае не изменится.

Для получения более точных верхних границ рассмотрим процесс добавления отсутствующих рёбер к остову графа  $G$ . Так как ширина рёберного коллапса ациклического графа в соответствии с теоремой 1 равна максимальному весу ребра, можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 5.** Ширина коллапса не превышает сумму веса максимального ребра остова и весов оставшихся рёбер:

$$d(G) \leq \max_{e \in R} w(e) + \sum_{e \notin R} w(e),$$

где  $R$  – остов графа  $G$ .

Для улучшения оценок можно выбрать остов максимального веса для минимизации суммы. В качестве достаточно хорошей аппроксимации можно предложить стандартную задачу выбора остова максимального веса [11]. Заметим, что количество оставшихся рёбер равно цикломатическому числу графа  $\nu(G) = l - k + 1$ . Тогда можно представить оценку как:

$$d(G) \leq (\nu(G) + 1) \cdot w^{\max} = (l - k) \cdot w^{\max},$$

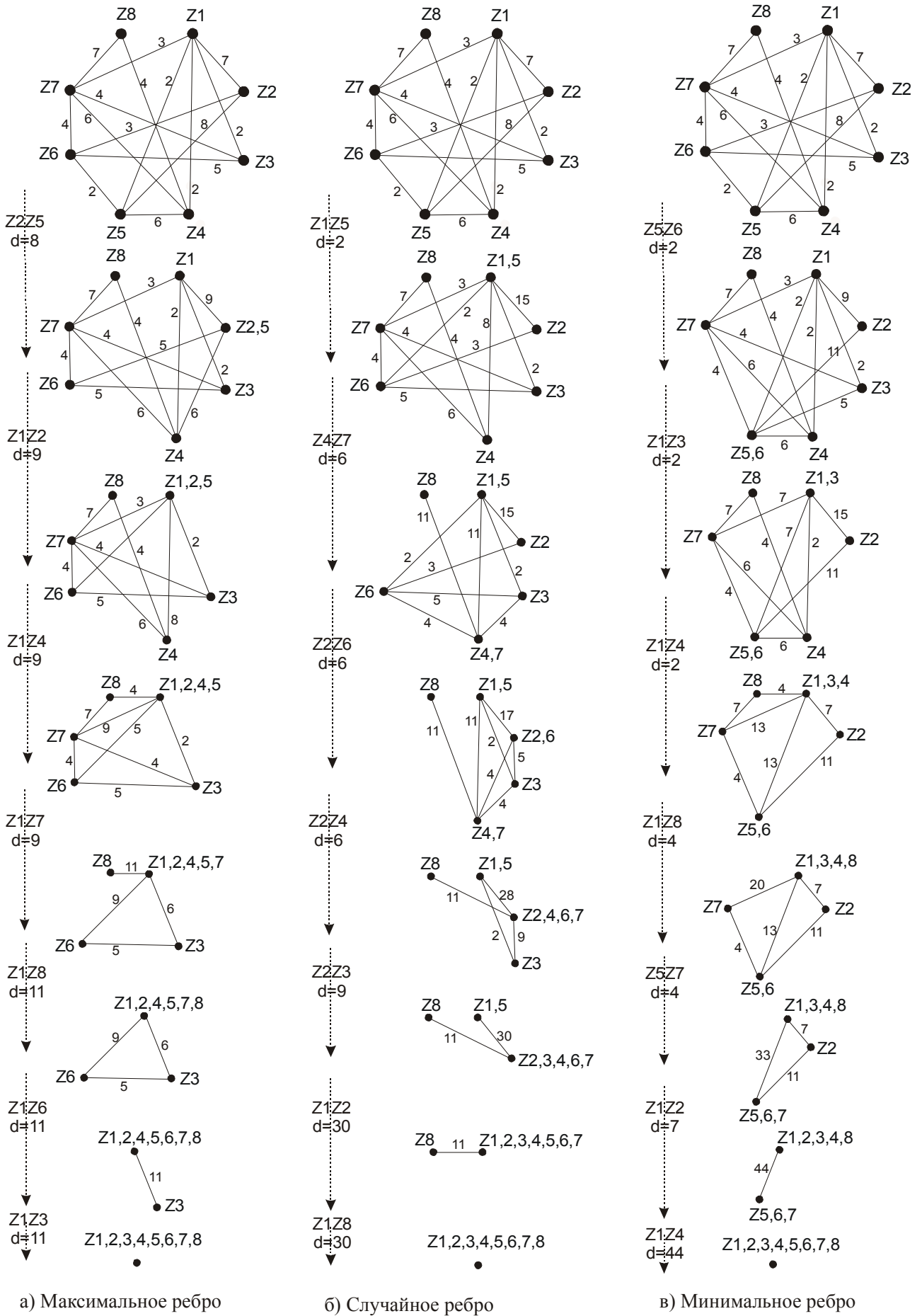
где  $w^{\max} = \max_{e \in G} w(e)$ .

**4. Эвристический алгоритм рёберного коллапса.** В соответствии с результатами, полученными для простой цепи и простого цикла можно предложить выбор ребра максимального веса на шаге коллапса. Можно выбирать первое, либо случайное ребро максимального веса в случае, если имеется несколько таких рёбер. Алгоритм состоит в простой реализации операции коллапса в соответствии с определением, дополненной правилом выбора ребра максимального веса. Сложность такого алгоритма можно оценить как  $k \cdot l^2$ . Действительно, необходимо выполнить  $k - 1$  шагов и на каждом шаге следует обработать не более чем  $l$  рёбер, для которых при коллапсе треугольников обрабатывается не более чем  $l$  смежных рёбер.

Пример коллапса графа, содержащего 8 вершин, используя выбор максимального, минимального и случайного ребра, приведен на рис. 3.

Для сравнения различных правил выбора ребра на шаге коллапса генерировались случайные графы, и выполнялся их рёберный коллапс. Сравнялся выбор максимального, минимального и случайного ребра на шаге. Полученные результаты представлены в табл. 1.

Для построения табл. 1 использованы случайные равномерно распределённые веса рёбер в диапазоне от 4 до 20. Использование других диапазонов приводит к другим абсолютным величинам, но сохраняет процентные соотношения. Можно сделать вывод, что худшим является выбор ребра минимального веса. Он приближается к случайному выбору ребра с ростом количества вершин. Лучшим выбором на шаге является выбор ребра максимального веса, который обеспечивает существенно меньшую ширину коллапса.



а) Максимальное ребро

б) Случайное ребро

в) Минимальное ребро

Рисунок 3 – Процессы рёберного коллапса мультиграфа

Таблица 1 – Сравнение коллапсов случайных графов

Количество вершин	Плотность, %	Одновременный коллапс, ширина	Последовательный коллапс					
			Максимальное ребро		Случайное ребро		Минимальное ребро	
			ширина	%	ширина	%	ширина	%
20	20	442	35	7.9	191	44.6	231	52.3
	40	869	66	7.6	367	42.2	533	61.3
	60	1372	102	7.4	651	47.4	829	60.4
	80	1825	160	8.8	876	48.0	990	54.2
40	20	1836	73	4.0	632	34.4	1002	54.6
	40	3699	139	3.8	1664	45.0	2133	57.7
	60	5539	214	3.9	2665	48.1	2948	53.2
	80	7354	314	4.3	3608	49.0	3908	53.1
100	20	11602	160	1.4	4827	41.6	5829	50.2
	40	22973	316	1.4	7617	33.2	12341	53.7
	60	34334	501	1.5	13282	38.7	17559	51.1
	80	45582	754	1.7	17144	37.6	23008	50.5
200	20	46073	288	0.63	19673	42.7	23781	51.6
	40	91715	612	0.67	42260	46.0	91715	50.5
	60	137684	997	0.72	67609	49.1	68957	50.0
	80	183652	1486	0.81	91015	49.6	91669	49.9

В заключение следует отметить, что последовательная композиция обеспечивает дополнительное ускорение вычислений при решении фундаментального уравнения сетей Петри и нахождения инвариантов. Задача формализована в терминах теории графов и названа рёберным коллапсом графа. Использован граф декомпозиции сети Петри на минимальные функциональные подсети. Исследованы свойства коллапса. Получены оценки верхней и нижней границ ширины коллапса для применения метода ветвей и границ. Предложен простой эвристический алгоритм рёберного коллапса. Результаты применения алгоритма к случайным графам показали, что полученный коллапс близок к оптимальному. Результаты проиллюстрированы примерами коллапса графа декомпозиции модели протокола TCP.

### Литература

1. Girault C., Valk R. Petri nets for systems engineering. Springer-Verlag, 2003. – 607 p.
2. Cortadella J., Kishinevsky M., Kondratyev A., Lavagno L., Yakovlev A. Logic synthesis of asynchronous controllers and interfaces. Springer, 2002. – 273 p.
3. Мурата Т. Сети Петри: Свойства, анализ, приложения // ТИИЭР. – 1989. – Т. 77. – №4. – С. 41-85.
4. Крытый С.Л. О некоторых методах решения и критериях совместимости систем линейных дифференциальных уравнений в области натуральных чисел // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 4. – С. 12-36.
5. Зайцев Д.А. Декомпозиция сетей Петри // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – №5. – 19 с.
6. Зайцев Д.А. Инварианты функциональных подсетей // Труды Одесской национальной академии связи им. А.С. Попова. – 2003. – №4. – С. 57-63.
7. Zaitsev D.A. Solving the fundamental equation of Petri net using the decomposition into functional subnets // Proceedings of 11th Workshop on Algorithms and Tools for Petri Nets, September 30 - October 1, 2004, University of Paderborn, Germany. – P. 75-81.
8. Зайцев Д.А. Декомпозиция протокола ЕСМА // Радиотехника: Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник. – Вып. 138, 2004. – С. 130-137.
9. Зайцев Д.А. Инвариантность модели Петри протокола TCP // Труды Одесской национальной академии связи им. А.С. Попова. – 2004. – № 2. – С. 19-27.
10. Zaitsev D.A. Verification of protocol TCP via decomposition of Petri net model into functional subnets // Proceedings of the Poster session of 12th Annual Meeting of the IEEE / ACM International Symposium on Modeling, Analysis, and Simulation of Computer and Telecommunication Systems, October 5-7, 2004, Volendam, Netherlands. – P. 73-75.
11. Тамм У. Теория графов. – М.: Мир, 1988. – 424 с.
12. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наукова думка, 1988. – 472 с.