

**НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУМЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Аннотация. Показана возможность получения трехмерных решений уравнений Максвелла для диэлектрической среды без сторонних источников с помощью функций над числами M и преобразований теории функций комплексного переменного.

Summary. The possibility of deriving of three-dimensional solutions of Maxwell's equations for a dielectric medium without extraneous source with the help of functions above M numbers and transformations of a function theory complex variable is exhibited.

В настоящее время актуальна проблема расчета поперечно-однородных структур [1] для СВЧ-техники. Такие структуры используются в качестве резонаторов [2], открытых направляющих систем [3], экранирующих и развязывающих структур [4], замедляющих систем [5]. Знание их собственных функций [5] необходимо для их расчета и анализа, для оптимизации их параметров.

Известные численные методы [6-10] их расчета трудоемки. Эти трудности связаны, например, с необходимостью численного решения интегральных уравнений для каждой конкретной задачи [7].

Приближенные методы описания электромагнитного поля [1-5] позволяют получать аналитические выражения, которые требуют введения некоторых приближений и оценок. Соответственно, полученные результаты являются приближенными.

Для получения аналитических решений однородной или неоднородной системы уравнений Максвелла среди других методов [1, 11, 12] используется теория дифференциальных уравнений [13]. Получение решения с ее помощью, как правило, связано с переходом к другим системам координат для разделения переменных. При переходе к криволинейным координатам учет криволинейности требует введения коэффициентов Ламе [2], что создает трудности для разделения переменных. Эти обстоятельства, как правило, становятся непреодолимыми при получении решения в квадратурах.

В работе [14] описано представление решений уравнения Гельмгольца на основе линейной комбинации известных решений. Для представления новых решений использованы собственные функции двумерного оператора Лапласа. В работе [14] представление этих собственных функций для конкретных новых задач не рассматривается.

Теория функций комплексной переменной [15] адекватно описывает плоские постоянные во времени электрические и магнитные поля. В [16] описаны методы расчета определенного класса трехмерных стационарных электрических и магнитных полей с использованием комплексных потенциалов.

Возможность использования одного из вариантов расширения комплексных чисел – чисел M в электродинамике Максвелла показана в [17]. В [17] описаны числа M , их арифметика – сложение, вычитание, умножение и деление, а так же дифференцирование функций над числами M . Обратная операция – интегрирование описана в [18]. Но не описано получение трехмерных переменных во времени решений. Поэтому целью данной работы является представить пример нахождения точного трехмерного решения системы уравнений Максвелла для поперечнооднородной структуры в диэлектрической среде без сторонних источников с использованием функций над числами M и комплексных функций с применением двумерных преобразований в классе T – волн для поперечно-однородной структуры частного вида. Так же представлен вариант технического решения, предложенный как приближение к точному решению. В дальнейшем будут использованы обозначения и понятия, введенные в [17, 18].

Предварительно поясним ход получения решения. На основе свойств дифференцируемых функций над числами M [17, 18] определяется подкласс функций, представители которого являются решениями системы уравнений Максвелла. Преобразование одного решения в другое осуществляется с помощью подстановки из класса комплексных функций. Тогда, зная одно решение из этого класса функций, можно получить бесконечное множество других решений путем использования двумерных преобразований из теории функций комплексного переменного. Из этого класса выбирается представитель – некоторое решение. В результате рассмотрения его свойств можно определить характеристики решения. Такой путь нахождения и исследования свойств решения соответствует получению решения для плоских постоянных во времени полей методами теории функций комплексного переменного [15]. Предложенный путь позволяет найти собственные функции в виде T -волн для многих поперечно-однородных структур. Систему уравнений Максвелла для

диэлектрической среды бес сторонних источников для краткости будем называть системой уравнений Максвелла.

Двухмерные преобразования. В [17, 18] показана возможность использования в электродинамике одного из вариантов расширения комплексных чисел – чисел M .

В теории функций комплексной переменной (ТФКП) хорошо изучены методы преобразования и нахождения функций, удовлетворяющих системе уравнений Коши – Римана [15]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (1)$$

где φ и ψ – функции двух переменных x и y .

Выберем решение системы уравнений Максвелла F с листа малой переменной λ [17], являющейся функцией над M -числами, и имеющей восемь компонент. Шесть из них определяют слагаемые электрического и магнитного векторов, два других соответственно – электрический и магнитный потенциалы, через которые определяются токи и заряды. С точностью до взаимной перестановки между векторами напряженности магнитного и электрического полей представим F в виде:

$$F(\lambda) = F(i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z + I \cdot t) = \alpha + i \cdot E_x + j \cdot E_y + k \cdot E_z + I \cdot \beta + Ii \cdot H_x + Ij \cdot H_y + Ik \cdot H_z, \quad (2)$$

где E_l и H_l (где $l = \{x, y, z\}$) – напряженности электрического и магнитного полей по соответствующим координатам; α – магнитный потенциал [17]; β – электрический потенциал [17]; x, y, z и t – пространственные и временная переменные; i, j, k и I – мнимые единицы; λ – переменная с листа малой переменной [17].

ТФКП позволяет находить функции, описывающие двумерное преобразование односвязной области на область [15]. Эти свойства будут использованы для нахождения решений системы уравнений Максвелла. Функции комплексного переменного могут быть применены для нахождения новых решений системы уравнений Максвелла путем использования следующего преобразования переменных x и y :

$$\begin{cases} x = \psi(x', y'), \\ y = j \cdot \varphi(x', y'), \end{cases} \quad (3)$$

где: x' , и y' – новые переменные.

Функция (2) после преобразования (3) приобретет следующий вид:

$$F(\lambda') = F(i \cdot \psi - \varphi + k \cdot z + I \cdot t). \quad (4)$$

Здесь λ' – новая переменная с листа малой переменной.

Вместо функции (4) можно рассматривать член ее разложения в ряд Фурье [18]. Экспоненциальная функция [17] с учетом преобразований (3) имеет следующий вид:

$$\exp(\lambda') = \exp(i \cdot \psi(x', y') - \varphi(x', y') + k \cdot z + I \cdot t), \quad (5)$$

Так же вместо (5) можно рассматривать экспоненциальную функцию в следующем виде:

$$\exp(\lambda') = \exp(i \cdot \psi(x', y') + \varphi(x', y') + k \cdot z + I \cdot t). \quad (6)$$

Здесь (5) и (6) отличаются только знаками перед слагаемым φ . Это отличие соответствует зеркальному отражению по оси y (2).

Показательная функция (6) с учетом аналогов формулы Эйлера [15,17] может быть представлена в виде произведения из показательных и сумм гармонических функций. Для сохранения преемственности слагаемых показательной функции (6) со слагаемыми показательной функции [17] введем комплексный множитель $(1 + j)$:

$$\begin{aligned} \exp(\lambda') &= \exp \varphi \exp(i \cdot \psi)(1 + j) \exp(k \cdot z) \exp(I \cdot t) = \\ &= \exp \varphi (\cos \psi + i \cdot \sin \psi)(1 + j)(\cos z + k \cdot \sin z)(\sin t + I \cdot \cos t). \end{aligned} \quad (7)$$

Раскрывая скобки в (7), выполняя умножение в соответствии с таблицей умножения M -чисел [17] и приводя подобные члены, получим действительные и мнимые слагаемые. Все эти слагаемые можно разделить на две группы, каждая из которых является самостоятельным решением. Члены одного решения связаны между собой системой уравнений Максвелла и не связаны с членами

другого решения, что можно установить непосредственной проверкой. Для прямоугольного и других резонаторов эти решения называются соответственно электрическими и магнитными функциями ([1]; [17]). Они отличаются между собой пространственно-временной фазой. Для рассмотрения свойств (7) достаточно рассмотреть одно из этих решений. Свойства другого решения будут аналогичными.

Выпишем слагаемые показательной функции [17], соответствующие решению электрической функции прямоугольного резонатора [1], с учетом таблицы соответствия 4 [17], с введенными амплитудными и размерностными множителями [17] в простейшем случае:

$$\begin{cases} \alpha = A_\alpha \cos(n_t t) \exp \varphi \sin \psi \sin(n_z z), \\ E_x = E_{x0} \cos(n_t t) \exp \varphi \cos \psi \cos(n_z z), \\ E_y = E_{y0} \cos(n_t t) \exp \varphi \sin \psi \cos(n_z z), \\ E_z = E_{z0} \cos(n_t t) \exp \varphi \cos \psi \sin(n_z z), \\ \beta = A_\beta \sin(n_t t) \exp \varphi \cos \psi \cos(n_z z), \\ H_x = H_{x0} \sin(n_t t) \exp \varphi \sin \psi \sin(n_z z), \\ H_y = H_{y0} \sin(n_t t) \exp \varphi \cos \psi \sin(n_z z), \\ H_z = H_{z0} \sin(n_t t) \exp \varphi \sin \psi \cos(n_z z). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(nx', ny'), \\ \psi = \psi(nx', ny'), \end{cases} \quad (9)$$

где n – размерностный действительный коэффициент; $A_\alpha, A_\beta, H_{l0}, E_{l0}$ (где $l = \{x, y, z\}$) – действительные амплитудные множители по соответствующим координатам; n_t, n_z – действительные коэффициенты, отвечающие временной и пространственной частотам.

Функции (9) являются действительной и мнимой составляющей комплексной дифференцируемой функции (1) [15].

Подстановка $\varphi = y$ и $\psi = x$ в (8) дает следующее простейшее решение:

$$\begin{cases} \alpha = A_\alpha \cos(n_t t) \exp y \sin x \sin(n_z z), \\ E_x = E_{x0} \cos(n_t t) \exp y \cos x \cos(n_z z), \\ E_y = E_{y0} \cos(n_t t) \exp y \sin x \cos(n_z z), \\ E_z = E_{z0} \cos(n_t t) \exp y \cos x \sin(n_z z), \\ \beta = A_\beta \sin(n_t t) \exp y \cos x \cos(n_z z), \\ H_x = H_{x0} \sin(n_t t) \exp y \sin x \sin(n_z z), \\ H_y = H_{y0} \sin(n_t t) \exp y \cos x \sin(n_z z), \\ H_z = H_{z0} \sin(n_t t) \exp y \sin x \cos(n_z z). \end{cases} \quad (10)$$

Система функций (8), (10) является примером решений системы уравнений Максвелла. Действительно, подставим слагаемые (8), с учетом (9), в систему уравнений Максвелла [1], которая в покомпонентном представлении с введенными электрическим α и магнитным β потенциалами [17], имеет следующий вид:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial x'}, \quad (11)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x'} + \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial y'}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho, \quad (14)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial x'}, \quad (15)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x'} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial y'}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x'} + \frac{\partial H_y}{\partial y'} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = -\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (18)$$

где ε и ε_0 – определяют диэлектрическую проницаемость среды; μ и μ_0 – определяют магнитную проницаемость среды; x', y', z и t – координаты; ρ – объемная плотность электрического заряда.

Составляющие уравнения (11) с учетом (8) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_Z}{\partial y'} &= H_{Z0} \sin(n_t t) \exp \varphi \sin \psi \cos(n_z z) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y'} n + \\ &+ H_{Z0} \sin(n_t t) \exp \varphi \cos \psi \cos(n_z z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y'} n, \end{aligned} \quad (19)$$

$$-\frac{\partial H_Y}{\partial z} = -H_{Y0} \sin(n_t t) \exp \varphi \cos \psi \cos(n_z z) \cdot n_z, \quad (20)$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_X}{\partial t} = -\varepsilon \varepsilon_0 E_{X0} \sin(n_t t) \exp \varphi \cos \psi \cos(n_z z) \cdot n_t, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \beta}{\partial x'} &= -A_\beta \sin(n_t t) \exp \varphi \cos \psi \cos(n_z z) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x'} n + \\ &+ A_\beta \sin(n_t t) \exp \varphi \sin \psi \cos(n_z z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x'} n. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (19) – (22) можно выписать уравнения для действительных коэффициентов с учетом условий (1) Коши - Римана. Они распадаются на два уравнения:

$$-nH_{Z0} = A_\beta n, \quad (23)$$

$$H_{Y0} n_z = \varepsilon \varepsilon_0 E_{X0} n_t. \quad (24)$$

Остальные 7 уравнений первой и второй пары системы уравнений Максвелла так же выполняются. Это можно установить непосредственной проверкой. Их уравнения для амплитудных и размерностных коэффициентов будут следующими:

$$H_{X0} n_z = -\varepsilon \varepsilon_0 E_{Y0} n_t, \quad (25) \quad \varepsilon \varepsilon_0 E_{Z0} n_t = A_\beta n_z, \quad (30)$$

$$H_{Y0} = H_{X0}, \quad (26) \quad \varepsilon \varepsilon_0 E_{Z0} n_z = A_\beta n_t, \quad (31)$$

$$E_{Y0} = -E_{X0}, \quad (27) \quad E_{Z0} = A_\alpha, \quad (32)$$

$$E_{Y0} n_z = -\mu \mu_0 H_{X0} n_t, \quad (28) \quad \mu \mu_0 H_{Z0} n_t = -A_\alpha n_z, \quad (33)$$

$$E_{X0} n_z = \mu \mu_0 H_{Y0} n_t, \quad (29) \quad \mu \mu_0 H_{Z0} n_z = -A_\alpha n_t. \quad (34)$$

Из анализа уравнений для амплитудных и размерностных коэффициентов (23) – (34) видно, что решение (8) можно разделить на две группы. Первая группа имеет только составляющие напряженностей электрического и магнитного полей E_X, E_Y, H_X и H_Y . Это уравнения (24)-(29). Из них следует соотношение для размерностных множителей:

$$n_z^2 = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 n_t^2. \quad (35)$$

Все остальные составляющие $A_\alpha, A_\beta, E_{Z0}$ и H_{Z0} образуют вторую группу. Их уравнения (23), (30)-(34) составляют отдельную систему уравнений. Эта система, как не сложно проверить, противоречива, и поэтому ее можно выполнить только при следующих нулевых условиях:

$$E_{Z0} = H_{Z0} = A_\alpha = A_\beta = 0. \quad (36)$$

Следовательно, слагаемые (8) описывают множество решений Т - волн, определяемых комплексными функциями со слагаемыми (1), (12). Используя различные функции (1), (12) из множества комплексных функций, могут быть получены новые решения системы уравнений Максвелла. Решение (8) можно трактовать как стоячую волну, являющуюся суммой двух волн – приходящей и уходящей [1], которые так же являются частными решениями (8). Представляет интерес отдельное рассмотрение уходящей волны и ее физических характеристик. Такая волна является простейшим представителем этого множества Т-волн и на этом примере можно определить некоторые ее свойства и свойства такого множества решений.

2. Пример Т-волны. Рассмотрим пространственную структуру Т-волны с составляющими E_X, E_Y, H_X и H_Y из решения (8). Решение (8) описывает стоячую волну, которую можно представить в виде суммы приходящей и уходящей по координате z волн. Запишем одно из таких слагаемых (8) – уходящую волну, с учетом (36), в следующем виде:

$$\begin{cases} E_x = E_{x0} e^{ny} \cos(nx) \cos(n_t t - n_z z), & (37) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_y = E_{y0} e^{ny} \sin(nx) \cos(n_t t - n_z z), & (38) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_x = H_{x0} e^{ny} \sin(nx) \cos(n_t t - n_z z), & (39) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_y = H_{y0} e^{ny} \cos(nx) \cos(n_t t - n_z z). & (40) \end{cases}$$

Составляющие (37) – (40) так же получаются из (8), если φ и ψ определяют показательную функцию [17]:

$$\varphi = ny, \quad \psi = nx. \quad (41)$$

Аналогично вышеизложенному, подставим составляющие электромагнитного поля (37) – (40) в уравнения (11) – (18) системы уравнений Максвелла. Из полученных так уравнений, с учетом (36), получим следующие уравнения, связывающие действительные коэффициенты:

$$cn_z = n_t, \quad (42)$$

$$E_{x0} = E_{y0}, \quad (43)$$

$$H_{y0} = -H_{x0}, \quad (44)$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_{y0} = \sqrt{\mu\mu_0} H_{y0}, \quad (45)$$

где c – скорость света.

Из уравнений (42) – (45) видно отличительное свойство такой волны. Параметр n поперечного сечения не связан с длиной волны общим уравнением. Следовательно, они могут выбираться независимо друг от друга. Длина волны определяет только периодичность вдоль координаты z , как видно из уравнения (42).

Определим структуру электрического и магнитного полей по составляющим (37) – (40). Электрическое поле имеет составляющие только в плоскости (x, y) . Его силовые линии определим из следующего дифференциального уравнения [1]:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}, \quad (46)$$

откуда с учетом (37) и (38) получаем:

$$\frac{E_{y0} e^{ny} \sin(nx) \cos(n_t t - n_z z)}{E_{x0} e^{ny} \cos(nx) \cos(n_t t - n_z z)} = \operatorname{tg}(nx) = \frac{dy}{dx} = \frac{dL_E}{dx} \quad (47)$$

с учетом (43). Здесь $L_E(x)$ – функция силовой линии электрического поля. Интегрирование уравнения (47) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} L_E(x) &= \int \operatorname{tg}(nx) dx = -\frac{1}{n} \ln(\cos(nx)) + C_1 = -\frac{1}{2n} \ln \cos^2(nx) + C_1 = \\ &= -\frac{1}{2n} \ln \frac{1}{sc^2(nx)} + C_1 = \frac{1}{2n} \ln sc^2(nx) + C_1 = \frac{1}{2n} \ln(1 + \operatorname{tg}^2(nx)) + C_1, \end{aligned} \quad (48)$$

где C_1 – постоянная интегрирования, не зависящая от x и зависящая только от y . Преобразования (48) получены с использованием известных тригонометрических соотношений [19].

Уравнение (48) определяет множество силовых линий электрического поля при различных значениях константы интегрирования C_1 .

Силовые линии магнитного поля определим аналогично из уравнения

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y}, \quad (49)$$

откуда с учетом (39) и (40) получаем:

$$\frac{H_{y0} e^{ny} \cos(nx) \cos(n_t t - n_z z)}{H_{x0} e^{ny} \sin(nx) \cos(n_t t - n_z z)} = -\operatorname{ctg}(nx) = \frac{dy}{dx} = \frac{dL_H}{dx}, \quad (50)$$

с учетом (44). Здесь $L_H(x)$ – функция силовой линии магнитного поля. Аналогично (48), интегрирование (50) дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
 L_H(x) &= -\int \operatorname{ctg}(nx) dx = \frac{1}{n} \ln(\sin(nx)) + C_2 = \frac{1}{2n} \ln(\sin^2(nx)) + C_2 = \\
 &= \frac{1}{2n} \ln \frac{1}{\operatorname{csc}^2(nx)} + C_2 = -\frac{1}{2n} \ln \operatorname{csc}^2(nx) + C_2 = \\
 &= -\frac{1}{2n} \cdot \ln(1 + \operatorname{ctg}^2(nx)) + C_2.
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

Здесь C_2 – постоянная интегрирования, зависящая только от y .

Структуры силовых линий полей (48), (51) существенно отличаются при различных n . При $n > 0$ электромагнитное поле экспоненциально растет с ростом y , как видно из (37) – (40). Силовые линии электрического E и магнитного H полей для этого случая представлены на рис. 1 при различных значениях постоянных интегрирования C_1 и C_2 при $n = 3$. На рисунке по горизонтали отложена координата x , по вертикали – координата y . На координатных осях размеры указаны в условных единицах.

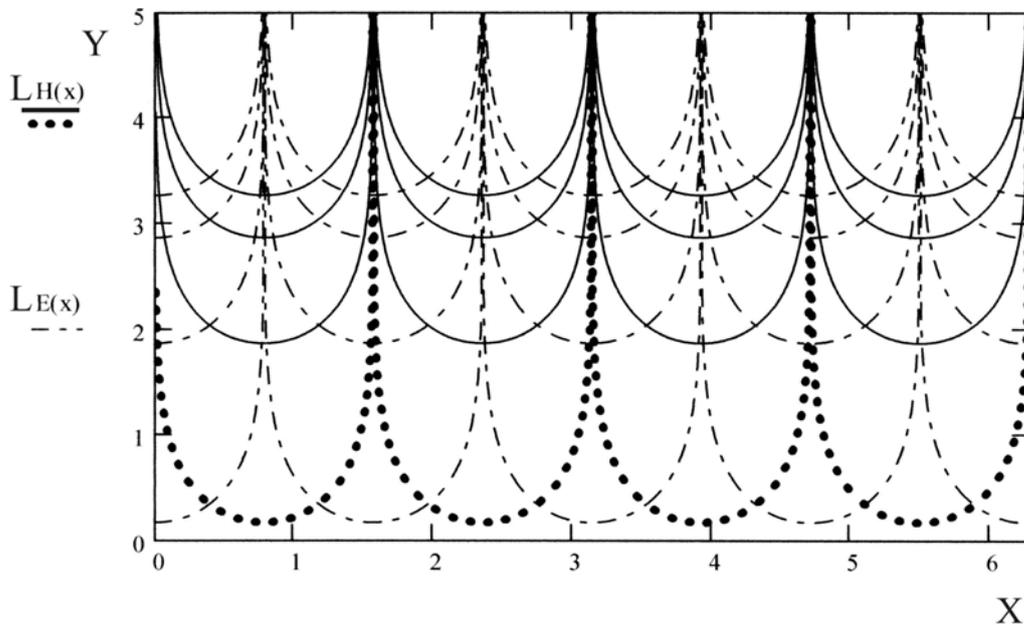


Рисунок 1 – Электромагнитное поле при $n > 0$

При $n < 0$ электромагнитное поле экспоненциально убывает с ростом y , как видно из (37) – (40). Силовые линии электрического и магнитного полей представлены на рис. 2 при различных значениях C_1 и C_2 при $n = -3$. На рисунке по горизонтали отложена координата x , по вертикали – координата y . На координатных осях размеры так же указаны в условных единицах.

Рис. 1 и 2 получены с помощью системы MathCAD 11.0. Рисунки представляют сечения электромагнитных полей в плоскости (x, y). Вся картина периодически повторяется по координате z .

Решение (37) – (40) описывает электромагнитное поле вблизи некоторых поверхностей. На идеально проводящих поверхностях должны выполняться граничные условия [1]: электрическое поле может иметь только нормальные составляющие, а магнитное поле – только тангенциальные. Получить эти поверхности можно путем выкладывания идеально проводящей поверхности вдоль магнитных силовых линий. Их сечения обозначены пунктиром на рис. 1 и 2. Это поперечно-однородные поверхности, постоянные вдоль оси z , профили которых определяются по формуле (51). Тогда, как видно, на этих поверхностях выполняются граничные условия [1] – электрическое поле везде имеет только нормальные составляющие, а тангенциальные равны нулю. Магнитное поле имеет только тангенциальные составляющие к поверхностям вследствие их построения по уравнению силовых линий (49).

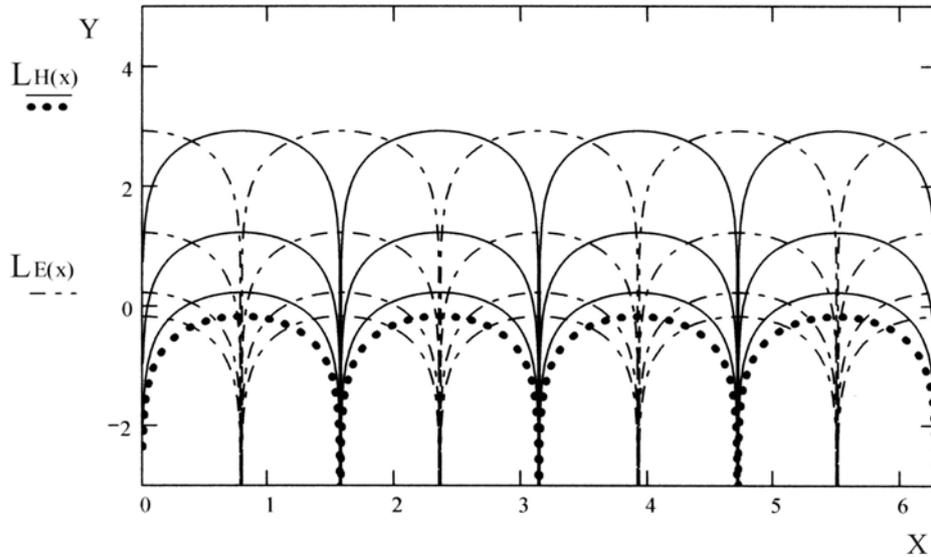


Рисунок 2 – Электромагнитное поле при $n < 0$

Магнитные силовые линии приходят из бесконечности и уходят в бесконечность, и там замыкаются между собой. Следовательно, четвертое уравнение из системы уравнений Максвелла [1] выполняется.

Функции (37) – (40) описывают собственные поля поверхностей, описываемых выражением (51) при $n > 0$ и $n < 0$. Действительно, силовые линии электрических полей везде перпендикулярны силовым линиям магнитных полей. Свойства собственных полей для поверхностей по рис. 1 и 2 существенно различны. Электромагнитное поле вблизи поверхности по рисунку 1, описываемые выражениями (48), (51) при $n > 0$, экспоненциально убывает при приближении к поверхности. Следовательно, проводящая поверхность, выложенная по пунктирной линии рис. 1, является изолирующей [1, 4] для электромагнитного поля.

Электромагнитное поле вблизи проводящей поверхности, выложенной вдоль магнитной силовой линии, обозначенной пунктирной линией на рис. 2, экспоненциально убывает с ростом координаты y . Следовательно, такая поверхность, определяемая выражением (51) при $n < 0$, имеет свойство открытой направляющей системы [3].

Геометрические параметры этих поверхностей не связаны с частотой поля. Действительно, поверхности по выражению (51) определяются только параметром n и не зависят от частоты или длины волны.

На рис. 3 показана схема силовых линий электромагнитного поля в плоскости (y, z) , лежащей в медиальной области между соседними гребнями магнитного поля по рис. 1 для некоторого момента времени t . Эта картина повторяется периодически вдоль оси z , и изменяется экспоненциально вдоль оси y .

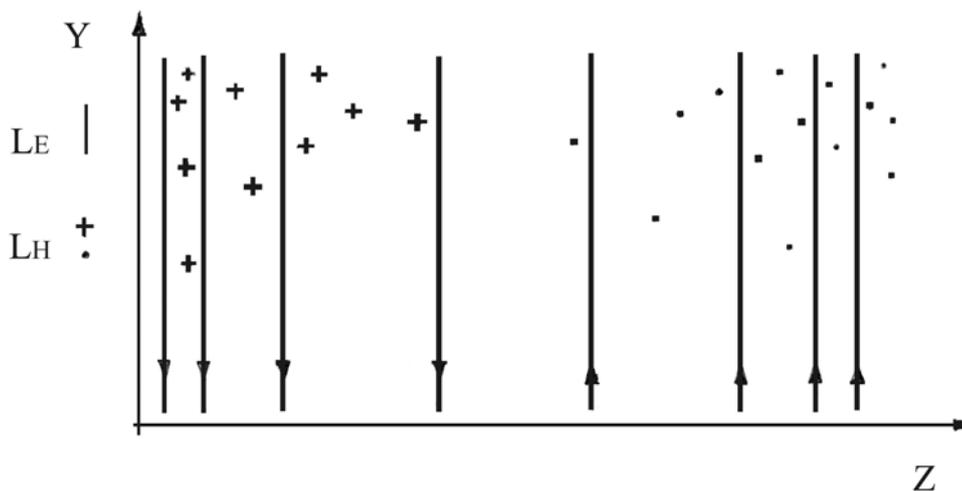


Рисунок 3 – Схема электромагнитного поля в медиальной плоскости (Y, Z)

На рис. 4 показана часть поверхности, которая приблизительно реализует свойство изолирующей поверхности. На рис. 5 представлена часть поверхности, которая приблизительно реализует свойство направляющей структуры. Рабочие области расположены выше этих поверхностей. Их геометрические размеры, в отличие от идеального случая, описываемого формулой (51), должны быть конечными. Это относится к выступающим гребням на рис. 4, и пазам конечной глубины на рис. 5. Изменения структуры электромагнитного поля при таких технических ограничениях требуют отдельного рассмотрения. Такие структуры могут быть применены, например, соответственно в качестве развязывающей и направляющей структур. Их поперечные геометрические параметры не связаны с частотой, поэтому они являются широкополосными, в отличие от рассмотренных, например, в [6].

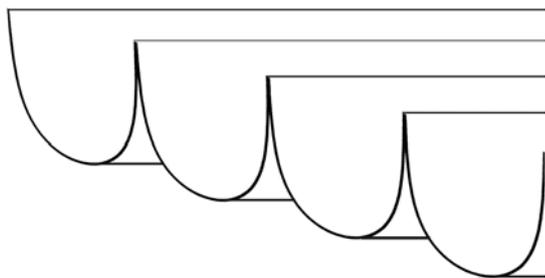


Рисунок 4 – Часть профиля поверхности с изолирующими свойствами

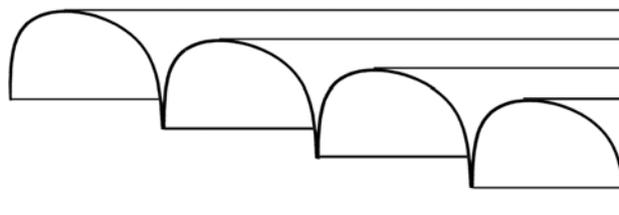


Рисунок 5 – Часть профиля со свойствами направляющей поверхности

Решение (37) – (40) при $n < 0$ имеет особенность при $y \rightarrow -\infty$. Эта особенность является вырезанной из области значения решения проводящей поверхностью, аналогично особенности в задаче для коаксиального резонатора [1] с выполнением граничных условий. В этой задаче особенность в центре коаксиального проводника вырезана проводящей поверхностью осевого проводника.

Так же решение (37) – (40) при $n > 0$ имеет особенность при $y \rightarrow +\infty$. Присутствие этой особенности позволяет трактовать решение (37) – (40), как решение, соответствующее задаче облучения проводящей поверхности по рис. 4. При этом особенность в бесконечно удаленной точке соответствует положению источника облучения поверхности. Эта особенность так же может быть вырезана проводящей поверхностью с выполнением соответствующих граничных условий. Введение такой поверхности никак не скажется на структуре электромагнитного поля и решения вблизи поверхности по рис. 4.

Другой возможный вариант трактовки решения (37) – (40) – это поле между проводящими плоскостями, параллельными плоскости (Z, Y) , и установленными в точках $x = 0, x = n\pi$, где n – целое число. Для этого случая составляющие электрического поля перпендикулярны проводящей поверхности, и, следовательно, граничные условия выполнены. Этот вариант требует отдельного и более подробного рассмотрения.

На основе этого решения могут быть получены новые решения, рассмотрение которых предполагается в следующих работах.

В заключение отметим, что представленный путь получения решений системы уравнений Максвелла для диэлектрической среды без сторонних источников позволяет получать и аналитически исследовать решения для некоторых поперечно-однородных структур.

Литература

1. Никольский Н.Н., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебн. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
2. Марков Г.Т., Чаплина. А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. – М.: Радио и связь, 1983. – 295 с.
3. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенно-фидерные устройства. Ч. II. Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1959. – 551 с.

4. Терезин О.Н., Седов В.М., Чаплин А.Ф. Синтез антенн на замедляющих структурах. – М.: Связь, 1980. – 135 с.
5. Брилюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. – М.: Изд. иностранной литературы, 1959. – 457 с.
6. Гладких В.І. Розробка рекурентних методів рішення задач радіозв'язку, модельованих інтегральними рівняннями: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.12.17. – Одеса, 2004. – 20 с.
7. Черенков В.С., Гладких В.І. Анализ развязывающих свойств ребристой структуры // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2003. – № 2. – С. 43-48.
8. Гладких В.І. Численная оценка точности рекурсивного метода задачи возбуждения неоднородной импедансной плотности // Праці УНДІРТ. – 2001. - № 4. – С. 71-73.
9. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. – М.: Мир, 1977. – 352 с.
10. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
11. Иваницкий А.М. Обобщенный символический метод анализа электрических цепей: Учебн. пособие. – Одесса: УГАС, 1994. – 27 с.
12. Иваницкий А.М. Комплексный анализ многомерных цепей. – Одесса: ОЭИС. – 1993 – 15 с. – Рус. - Деп. В ЦНТИ "Информсвязь" 06.04.93, №1961 – св.
13. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. – 504 с.
14. Черенков В.С. Операторное представление решений уравнений Гельмгольца в различных системах координат // Праці УНДІРТ. – 1998. - № 2(14). – С. 61-77.
15. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 488 с.
16. Князь А.И. Комплексные потенциалы трехмерных электрических и магнитных полей. – Киев – Одесса: Вища школа, 1981. – 120 с.
17. Кравчик Ю.С. Обобщение комплексных чисел и их применение в электродинамике // Праці УНДІРТ. – 2003. - № 4(36). – С. 89-96.
18. Кравчик Ю.С. Интегрирование и интегральные преобразования над числами М. // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – № 1. – С. 75-79.
19. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1973. – 416 с.