*СТАТІ З ДОДАТКОВОЇ ТЕМАТИКИ*

*УДК 517*

*Баранов Н.И.*
*Baranov N.I.*

# МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УНИТАРНЫХ УЗЛОВ

# THE MULTIPLICATIVE REPRESENT OF CHARACTERISTIC FUNKTIONS OF UNITARY KNOTS

***Аннотация***. Рассматриваются операторные мультипликативные интегралы, представляющие характеристические функции унитарных узлов. Доказано, что характеристические функции вещественных унитарных узлов представляются в виде произведения трех простых мультипликативных интегралов.

***Summary***. The articale considers operator multiplicative integrals, which represent characteristic functions of unitary knots. Proof, that characteristic functions real unitary knots is represent in the form of prodacts three simple multiplicative integrals.

Представление характеристической матриц-функции линейного оператора в виде мультипликативного интеграла впервые было получено В.П. Потаповым [1]. С помощью мультипликативных представлений матриц-функций линейных операторов М.С. Бродский, М.С. Лившиц [2] получили треугольные представления линейных ограниченных операторов с ядерной мнимой компонентой. Мультипликативные представления характеристических функций операторов, близких к унитарным, рассматривали Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. [3], и операторов сжатий Бродский В.М. [4], Бродский В.М., Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. [5]. Гинсбург Ю.П. [6] применил мультипликативные представления аналитических оператор-функций при изучении почти инвариантных спектральных свойств операторов сжатий.

В настоящей работе рассматриваются мультипликативные представления вещественных унитарных узлов [8, 9]. Показано, что характеристическая функция основного оператора таких узлов представляется в виде произведения трех мультипликативных интегралов со сравнительно простой структурой.

1. Пусть на некоторой цепочке [7] ортопроекторов $M$ гильбертова пространства $H$ заданы функции $F(P)$ и $G(P)$, значения которых являются линейными ограниченными операторами в $H$. Каждому разбиению

$$z = \{\, 0 = P_0 < P_1 < P_2 < \ldots < P_0 = I \,\}$$

цепочки $M$ отнесем произведение

$$\Phi(z) = \prod_{j=1}^{\overrightarrow{n}} \left(I + F(Q_j)\,\Delta\, G(P_j)\right),$$

где $Q_j \in M$, $P_{j-1} \le Q_j \le P_j$, $\Delta\, G(P_j) = G(P_j) - G(P_{j-1})$. Оператор $T$ называется правым мультипликативным интегралом от $F(P)$ от $G(P)$ и обозначается

$$\underset{M}{\overrightarrow{S}} \left(I + F(P)\,d\,G(P)\right),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $z_0$ цепочки $M$, что для любого его продолжения $z$ выполняется неравенство

$$\| T - \Phi(z) \| < \varepsilon.$$

В случае, когда соотношения $P_{j-1} \le Q_j \le P_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) заменяются соотношениями $P_{j-1} < Q_j \le P_j$ вместо обозначения $\underset{M}{\overrightarrow{S}}$ будем применять $\underset{(M]}{\overrightarrow{S}}$.

2. Лемма. Если основной оператор $T$ унитарного узла [8]

$$\Delta = \begin{pmatrix} H_0 & T & F & H_0 \\ G_0 & G & S & F_0 \end{pmatrix}$$

ограниченно обратим, то существует ограниченный оператор $\Theta_\Delta^{-1}$, при этом

$$\Theta_\Delta^{-1} = S^* - F^* T^{*-1} G^*,$$

здесь $\Theta_\Delta$ – значение характеристической функции

$$\Theta_\Delta = S + \lambda G (I + \lambda T)^{-1} F$$

унитарного узла $\Delta$ при $\lambda = 0$ .

*Доказательство*. Поскольку $\Theta_\Delta = S$ и [2] $F^*F + S^*S = I_{F_0}$ , $T^*F + G^*S = 0$, то получаем

$$(S^* - F^*T^{*-1} G^*)\Theta_\Delta = S^*S - F^*T^{*-1} G^*S = S^*S - F^*T^{*-1} T^*F = I$$

аналогично, из соотношений [8] $GG^* + SS^* = I_{G_0}$ , $TG^* + FS^* = 0$ следует

$$\Theta_\Delta (S^* - F^*T^{*-1} G^*) = I.$$

Лемма доказана.

3. В работе [5] рассматриваются операторные $\Theta$-узлы $\Theta$ ($H_0$, $G_0$, $T$, $R$, $J$), где $H_0$ и $G_0$ – гильбертовы пространства; $T$, $R$, $J$ – линейные ограниченные операторы, действующие соответственно в $H_0$, из $G_0$ в $H_0$ и в $G_0$. При этом,

$$I - T^*T = RJR^*, \quad J^2 = I, \quad J^* = J.$$

Доказано, что в случае $J = I$ равенством

$$\Theta^*(0)\,\Theta(\lambda) = I - R^* (I - \lambda T^*)^{-1} R, \ \ (\,|\,\lambda\,| < 1\,)$$

определяется с точностью до левого унитарного операторного множителя функция $\Theta(\lambda)$ ( $|\,\lambda\,| < 1$). Эта функция называется [5] характеристической оператор-функцией узла $\Theta$ ($H_0$, $G_0$, $T$, $R$, $J$) .

Пусть

$$\Delta = \begin{pmatrix} H_0 & T & F & H_0 \\ G_0 & G & S & F_0 \end{pmatrix}$$

данный унитарный узел; $\Theta_\Delta$ ($\lambda$) – его характеристическая функция. Тогда $\Theta$ ($H_0$, $G_0$, $T$, $G^*$, $I$) некоторый $\Theta$-узел. В силу равенства ([8] , стр. 149)

$$S\,\Theta_\Delta^*\left(\bar{\lambda}\right) = I - G (I - \lambda T^*)^{-1} G^*$$

имеем

$$\Theta_\Delta\, Z_0^*\, Z_0\, \Theta_\Delta^*\left(\bar{\lambda}\right) = I - G (I - \lambda T^*)^{-1} G^* ,$$

где $Z_0$ – произвольное унитарное отображение $F_0$ на $G_0$. Следовательно, $Z_0\,\Theta_\Delta^*\left(\bar{\lambda}\right)$ – характеристическая оператор-функция узла $\Theta$ ($H_0$, $G_0$, $T$, $G^*$, $I$). Существует [5] унитарное отображение $Z$ пространства $F_0$ на $G_0$ такое, что

$$Z\Theta_\Delta^*\left(\bar{\lambda}\right) = \overset{\leftarrow}{\int\limits_{(H_0]}} \left( I - \frac{e^{i\varphi(P)} + \lambda}{e^{i\varphi(P)} - \lambda} dF(P) \right), \tag{1}$$

где $F(P) = 2\,G(2\,I + V)^{-1} P (2\,I + V^*)^{-1} G^*$. Переходя в (1) к сопряженным операторам и заменяя $\bar{\lambda}$ на $\lambda$, получим

$$\Theta_\Delta(\lambda) = \overset{\rightarrow}{\int\limits_{(M]}} \left( I + \frac{\lambda + e^{-i\varphi(P)}}{\lambda - e^{-i\varphi(P)}} dF(P) \right). \tag{2}$$

Доказана теорема: если основной оператор унитарного узла $\Delta$ представим [5, 10] в виде $T = U(I + V)$, где $V$ - оператор с собственной максимальной цепочкой $M$, диагональ которой вдоль $M$ равна нулю,

$$U = \int\limits_{(M]} e^{i\varphi(P)} dP \quad ,$$

$\varphi(P)$ ($P \in M$, $0 \le \varphi(P) \le 2\pi$) – неубывающая непрерывная слева функция, то существует унитарное отображение $Z$ такое, что имеет место равенство (2).

4. Если $\Delta$ является ($J$ , $J_1$ , $J_2$) вещественным унитарным узлом [9], то из доказанной теоремы следует представление

$$\Theta_\Delta(\lambda) = \overset{\rightarrow}{\int\limits_{(0]}^{P_1}} \left( I + \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} dF(P) \right) \cdot \overset{\rightarrow}{\int\limits_{(P_1]}^{P_2}} \left( I + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} dF(P) \right) \cdot \overset{\rightarrow}{\int\limits_{(P_2]}^{I}} \left( I + \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} dF(P) \right), \tag{3}$$

где $P_1 \in M$, $P_2 \in M$, $F(P) = 2\,G(2\,I + V)^{-1} P (2\,I + V^*)^{-1} G^*$ – операторная функция, значениями которой являются $J_1$ – вещественные операторы в $G_0$, $J_1 Z = Z J_2$ .

Действительно, операторы $V$ и

$$U = \int\limits_{(M]} e^{i\varphi(P)} dP$$

являются $J$- вещественными [9]. В силу равенства

$$U = J \int\limits_{(M]} e^{i\varphi(P)} dPJ = \int\limits_{(M]} e^{-i\varphi(P)} dP = U^*,$$

спектр оператора $U$ принадлежит множеству {-1; 1}, и совпадает с замыканием [10] множества значений функции $e^{i\varphi(P)}$. Следовательно, $\varphi(P)$ может принимать лишь значения $0, \pi, 2\pi$. Поэтому из (2) вытекает (3). Соотношение $J_1 F(P) = F(P)\ J_1$ следует из равенств $JV = VJ$, $LP = PJ$, $GJ = J_1 G$.

Остается доказать, что $J_1 Z = Z J_2$.

Поскольку $\Theta_\Delta(0) = S$, то

$$J_1 \Theta_\Delta(0) = J_1 S = S J_2 = \Theta_\Delta(0) J_2 .$$

Кроме того,

$$\Theta_\Delta(0)\, Z^* = \overset{\rightarrow}{\int\limits_{(0]}^{l}} \big(I - dF(P)\big),$$

следовательно,

$$\Theta_\Delta(0)\, Z^* J_1 = J_1\, \Theta_\Delta(0)\, Z^*.$$

Так как существует оператор $T^{-1}$, то из леммы следует существование оператора $\Theta_\Delta^{-1}(0)$. Поэтому $Z^* J_1 = J_2\ Z^*$ и $J_1 Z = Z J_2$.

Результаты настоящей работы находят применение при построении треугольных представлений вещественных операторов с унитарным спектром, а также при решении некоторых интегральных уравнений [7].

***Литература***


1. *Потапов В.П.* Мультипликативная структура *J*-нерастягивающих матриц-функций // Труды Моск. мат. об-ва. – М., 1955. – Т. 4. – С. 125-236.
2. *Бродский М.С., Лившиц М.С.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы //Успехи мат. наук. – 1958. – Т. 13. – № 1. – С. 3-85.
3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* О мультипликативном представлении характеристических функций операторов, близких к унитарным // ДАН СССР. – 1965. – Т. 164. – № 4. – С. 732-735.
4. *Бродский В.М.* О мультипликативном представлении характеристических функций операторов сжатий // ДАН СССР. – 1967. – Т. 173. – №2. – С.256-259.
5. *Бродский В.М., Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Общие теоремы о треугольных представлениях операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций // Функц. анализ и его прил. – 1969. – Т.3. – №4. – С. 1-27.
6. *Гинсбург Ю.П.* О почти инвариантных свойствах сжатий и мультипликативных свойствах аналитических оператор-функций // Функц. анализ и его прил. – 1971. – Т. 5. – № 3. – С. 32-41.
7. *Бродский М.С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
8. *Бродский М.С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции // Успехи мат. наук. – 1978. – Т. 33. – № 4. – С. 141-168.
9. *Баранов Н.И.* Треугольные представления вещественных операторов с унитарным спектром. – Одесса, 1983. – 9 с. – Рук. Деп. В Укр НИИНТИ, № 595, Ук. – Д 83.
10. *Баранов Н.И., Бродский М.С.* Треугольные представления операторов с унитарным спектром // Функц. анализ и его прил. – 1982. – Т. 16. – № 1. – С. 58-59.