

**СТАБИЛИЗАЦИЯ УРОВНЯ ЛОЖНЫХ ТРЕВОГ АДАПТИВНОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ
С НОРМИРОВКОЙ МОЩНОСТИ ПОМЕХ**

**STABILIZATION OF THE LEVEL OF FALSE ALARMS ADAPTIVE DETECTORS
WITH NORMALIZATION POWER OF CLUTTERS**

Аннотация. Исследуется скорость сходимости мощности помехи и вероятности ложной тревоги для адаптивного алгоритма обнаружения сигнала с использованием выборочной ковариационной матрицы помех. Получены точные аналитические выражения для расчета порогового уровня адаптивного обнаружителя с нормировкой мощности помех.

Summary. Speed of convergence of power of a handicap and probability of a false alarm for adaptive algorithm of detection of a signal with use selective covariations matrixes of clutters is investigated. Exact analytical expressions for calculation of a threshold level adaptive detection with normalization power of clutters are received.

Отличительной особенностью проблемы обнаружения сигналов является необходимость ее решения в условиях априорной неопределенности относительно помеховой обстановки, для преодоления которой широко применяется адаптивный подход с использованием обучающих выборок [1, 2]. При этом распространенными методами к обеспечению постоянной ложной тревоги в этих условиях являются введение умножения порогового коэффициента на оценку мощности или нормировка решающей статистики к мощности помех [3, 4].

Характерным недостатком адаптивных компенсаторов помех являются флуктуации весовых коэффициентов, которые приводят к снижению отношения сигнал/помеха, увеличению мощности помехи, изменению закона распределения решающей статистики [2], что в конечном итоге приводит к дестабилизации вероятности ложной тревоги [5]. Особенно существенно их влияние при адаптации с использованием обратных связей, для которых скорость сходимости выходной мощности зависит от параметров помеховой обстановки, в частности, от различия собственных чисел ковариационной матрицы помех и начального значения весового вектора [6]. Эти факторы приводят к дестабилизации порогового уровня и снижению контроля за вероятностью ложной тревоги.

Для исключения зависимости вероятностных характеристик мощности помех от параметров сигнально-помеховой обстановки исследуются прямые алгоритмы настройки весовых коэффициентов на основе непосредственного обращения выборочных ковариационных матриц, позволяющих повысить сходимости мощности помехи и вероятности ложной тревоги, которые определяются только размером фильтра и числом обучающих выборок [2, 5]. Дополнительной мерой повышения стабилизации порогового уровня является устранение операции оценивания мощности помехи путем введения ограничения на весовой вектор, доставляющего единичную выходную мощность помехи. Однако в известной литературе недостаточно изучена адаптация обнаружителей со стабилизацией мощности помехи, в частности, отсутствует анализ зависимостей эффективности подавления помех и вероятности ложной тревоги от числа обучающих выборок.

В настоящей работе проводится исследование энергетического и вероятностного показателей сходимости прямого метода обучения для адаптивного обнаружителя с нормировкой мощности помехи.

1. Построение решающей статистики. Рассматривается фильтр, максимизирующий вероятность обнаружения ожидаемого сигнала S_0 на фоне нормально распределенной помехи с ковариационной матрицей R_n [3]. Для уменьшения зависимости выходной мощности фильтра от корреляционных свойств сигнально-помеховой обстановки необходимо определить ограничение на мощность помех для вектора размера N весовых коэффициентов W , обеспечивающий максимум отношения мощности сигнала P_c к мощности помехи

$$\mu(W) = P_c(W) / P_n(W) = |W^{*T} S_0|^2 / W^{*T} R_n W = S_0^{*T} R_n^{-1} S_0 \text{ при ограничении } P_n = W^{*T} R_n W = 1, \quad (1)$$

где $R_n = \overline{XX^{*T}}$ – ковариационная матрица размера $N \times N$ помехи; S_0 – вектор размера N опорного сигнала.

Тогда вектор фильтра и мощность помехи определяются выражениями

$$W_1 = R_n^{-1} S_0 / (S_0^{*T} R_n^{-1} S_0)^{0,5}; \quad P_n = W^{*T} R_n W = S_0^{*T} R_n^{-1} R_n R_n^{-1} S_0 / (S_0^{*T} R_n^{-1} S_0) = 1, \quad (2)$$

а решающая статистика в отсутствии сигнала y подчиняется экспоненциальному распределению $\omega(y)$

$$y = |W^{*T} X|^2, \quad \omega(y, P) = \exp\{-y / P_n\} / P_n. \quad (3)$$

При исследовании эффективности по критерию Неймана-Пирсона неадаптивного алгоритма используется связь [3] вероятности ложной тревоги F_0 и порогового уровня c

$$F_0 = \int_c^\infty \omega(y, P_n) dy = \exp\{-c / P_n\}. \quad (4)$$

В отсутствие априорных сведений о помехе для определения ее характеристик применяется адаптивный байесов подход [2, 5], в соответствии с которым в весовой вектор (2) подставляется максимально правдоподобная оценка ковариационной матрицы помехи

$$\hat{R}_n = K^{-1} \sum_{i=1}^K X_i X_i^{*T}, \quad (5)$$

полученная по K выборкам помехи.

Полагая, что обрабатываемая выборка не содержится среди обучаемых, т.е. обучение и обработка проводятся по независимым выборкам, весовой вектор и отклик адаптивного фильтра на обрабатываемую выборку помехи (решающая статистика при отсутствии сигнала) определяются выражениями

$$W_1 = \hat{R}_n^{-1} S_0 / (S_0^{*T} \hat{R}_n^{-1} S_0)^{0,5}; \quad y = |\hat{W}^{*T} X|^2 = (X^{*T} \hat{R}_n^{-1} S_0)^2 / (S_0^{*T} \hat{R}_n^{-1} S_0). \quad (6)$$

Проводится исследование скорости сходимости адаптивного фильтра с весовым вектором (6) по энергетическому и вероятностному критериям с использованием выборочной ковариационной матрицы помехи (5).

2. Анализ скорости сходимости мощности помех. Мощность помехи на выходе адаптивного фильтра зависит от флуктуаций весового вектора (6)

$$\hat{P}_n = \hat{W}^{*T} R_n \hat{W} = S_0^{*T} \hat{R}_n^{-1} R_n \hat{R}_n^{-1} S_0 / (S_0^{*T} \hat{R}_n^{-1} S_0). \quad (7)$$

Для определения вероятностных характеристик \hat{P}_n , согласно методике [2], используются обозначения $A = R_n^{-0,5} S$ и $\hat{M} = R_n^{-0,5} \hat{R}_n R_n^{-0,5}$ (или $S = R_n^{0,5} A$ и $\hat{R}_n^{-1} = R_n^{-0,5} \hat{M}^{-1} R_n^{-0,5}$), в соответствии с которыми из (7) получим

$$\hat{P}_n = \frac{A^{*T} \hat{M}^{-1} A}{A^{*T} \hat{M}^{-1} A}. \quad (8)$$

Применяя нормировку вектора A с помощью преобразования $B = (A^{*T} A)^{-0,5} A$, где $B^{*T} B = 1$ и вводя унитарную матрицу U такую, что $B = U E_1$ (E_1 – первый столбец единичной матрицы I_0) над (9) проводится ряд последовательных операций

$$\hat{P}_n = \frac{B^{*T} \hat{M}^{-1} B}{B^{*T} \hat{M}^{-1} B} = \frac{E_1^T U^{*T} \hat{M}^{-1} U U^{*T} \hat{M}^{-1} U E_1}{E_1^T U^{*T} \hat{M}^{-1} U E_1} = \frac{E_1^T C^{-2} E_1}{E_1^T C^{-1} E_1} = \frac{(c^{11})^2 [1 + (C^{12} C^{21} / (c^{11})^2)]}{c^{11}} = \frac{1}{x} \frac{1}{\rho}, \quad (9)$$

где $C = U^{*T} \hat{M}^{-1} U$ подчиняется распределению Уишарта $\omega(K, N, I_0)$ [2] со средним $\bar{C} = U^{*T} U = I_0$, представленная в блочном виде

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}; \quad C^{-1} = \begin{vmatrix} c^{11} & C^{12} \\ C^{21} & C^{22} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

где c_{11} и c^{11} – скаляры;

$x = 1/c^{11}$ и $\rho = 1/[1 + (C^{12} C^{21} / (c^{11})^2)]$ – независимые случайные величины, как показано в [4], x – распределена по закону χ^2 с $2(K - N)$ степенями свободы, а ρ подчиняется β –распределению

$$\omega(x) = x^{K-N} \exp\{-x\}, \quad 0 < x < \infty; \quad \omega(\rho) = \frac{K!}{(N-2)!(K+1-N)!} (1-\rho)^{N-2} \rho^{K+1-N}, \quad 0 < \rho < 1. \quad (11)$$

Учитывая, что средние значения сомножителей определяются соотношениями

$$\overline{x^{-1}} = \int_0^{\infty} x^{-1} \omega(x) dx = K / (K - N); \quad \overline{\rho^{-1}} = \int_0^1 \rho^{-1} \omega(\rho) d\rho = K / (K - N + 1), \quad (12)$$

то нетрудно показать, что средняя мощность в адаптивном режиме отличается от единичной

$$\overline{P_n} = \frac{K^2}{(K - N)(K - N + 1)} \quad (13)$$

и при $N \gg 1$ сходится к уровню 3 дБ потерь ($\overline{P_n} = 2$) примерно для $K > 3N$ обучающих выборок.

3. Исследование вероятности ложной тревоги. Установлено [7, с. 118], что для решающей статистики $|\widehat{W}^{*T} X|^2 > c$ применяются ее эквивалентные представления в виде $|W^{*T} X|^2 y / (x\rho) > c$, где случайная величина y распределена по закону χ^2 с двумя степенями свободы, или при нормированной к выходной мощности $|W^{*T} X|^2 = 1$ в следующей форме

$$z = y / x > c\rho, \quad (14)$$

где z подчиняется центральному $F_{1, K-N+1}$ -распределению [8], так как является отношением независимых величин, распределенных по χ^2 .

Определение вероятности ложной тревоги F для решающей статистики (14) осуществляется в соответствии с методикой [5], сначала определяется условная вероятность $F(\rho)$ в предположении неизвестного параметра ρ , которая затем усредняется по плотности распределения вероятностей $\omega(\rho)$ (11) этого параметра

$$F = \int_0^1 \int_{c\rho}^{\infty} F_{1, K-N+1}(z) \omega(\rho) dz d\rho = \int_0^1 F(\rho) \omega(\rho) d\rho. \quad (15)$$

Для расчета (15) используется связь $F_{1, K-N+1}$, распределения с неполной бета-функцией $I_z((K - N + 1)/2, 1/2)$ [7] и для целого $L = (K - N + 1)/2$ разложение в ряд [8, с. 738, ф. 26.5.1]

$$F_{1, K-N+1}(z) = 1 - I_z((K - N + 1)/2, 1/2) = 1 - (1 - z)^{(K-N)/2} \sum_{i=0}^{K-N} \binom{(K-N)/2}{i} \left(\frac{z}{1-z}\right)^i. \quad (16)$$

После подстановки (16) в (15) после интегрирования по z и ряда преобразований выражение условной вероятности $F(\rho)$ имеет вид

$$F(\rho) = 1 - \left(\frac{1}{1 + c\rho}\right)^{K-1} \sum_{i=0}^{K-N+1} \binom{K-N+1}{i} (c\rho)^i. \quad (17)$$

Усреднение (15) с использованием (17) по случайной величине ρ представляется в форме

$$F = 1 - \frac{K!}{(N-2)!(K+1-N)!} \sum_{i=1}^{K-N+1} \binom{K-N+1}{i} (c)^i \int_0^1 (1-\rho)^{N-2} \rho^{K+1-N+i} / (1+c\rho)^{K-1} d\rho, \quad (18)$$

для интегрирования в которой применяется представление через бета-функцию $B(\alpha, \beta)$ и гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$ [9, стр.301, ф.2.2.6.1]

$$\int_a^b (\rho - a)^{\alpha-1} (b - \rho)^{\beta-1} / (d + c\rho)^\gamma d\rho = (b - a)^{\alpha+\beta-1} (ac + d)^\gamma B(\alpha, \beta) {}_2F_1(\alpha, -\gamma; \alpha + \beta; c(a - b)/(ac + d)). \quad (19)$$

После преобразований окончательное выражение для вероятности ложной тревоги имеет вид

$$F = 1 - \sum_{i=1}^{K-N+1} \frac{c^i}{i!} \frac{K!(K - N - 1 + i)!}{(K + i + 1)!(K - N + 1 - i)!} {}_2F_1(K - N + i + 2, K - 1; K + i + 1; -c). \quad (20)$$

Для вероятности ложной тревоги F (20) построены графики зависимостей от числа обучающих выборок K в случае задаваемого порогового уровня c_0 и вероятности ложной тревоги $F_0 = 10^{-4}; 10^{-8}$ (4) неадаптивного алгоритма, приведенные соответственно на рис. 1, а, б.

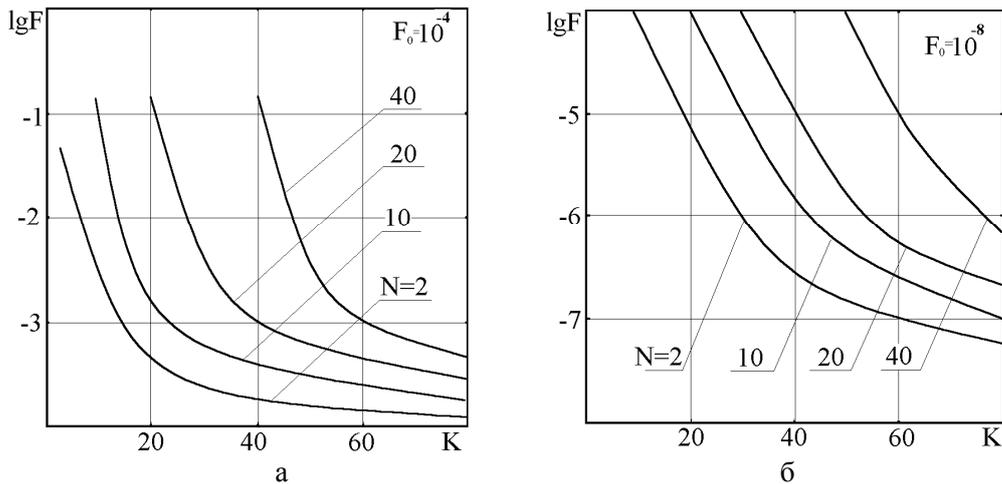


Рисунок 1 – Зависимость вероятности ложной тревоги F адаптивного алгоритма $F_0 = 10^{-4}$ (а), $F_0 = 10^{-8}$ (б) от числа обучающих выборок K

Анализ графиков при $N \geq 10$ показал, что для обеспечения уровня ложной тревоги $F < 10F_0$ в случае $F_0 = 10^{-4}$ необходимо не менее $K \geq 4N$ обучающих выборок, а с уменьшением задаваемой ложной тревоги $F_0 = 10^{-8}$ время адаптации существенно возрастает и требуется примерно $K \geq 8N$ обучающих выборок. Грубая коррекция порогового сигнала на основе (13) также может использоваться для уменьшения зависимости F от числа обучающих выборок.

В заключение отметим, что полученные выражения обеспечивают контроль по стабилизации уровня ложной тревоги и позволяют обоснованно выбрать пороговый уровень адаптивного обнаружителя.

Литература

1. Трухачев А.А. Анализ процедур и алгоритмов обнаружения сигналов. – М.: Радио и связь, 2003. – 248 с., ил.
2. Reed I.S., Mallet J.D., Brennan L.E. Rapid convergence rate in adaptive arrays // IEEE Trans. – 1974. – AES-10, № 6. – P. 853-863.
3. Обнаружение радиосигналов / П.С. Акимов, Ф.Ф. Евстратов, С.И. Захаров и др. / Под ред. А.А. Колосова. – М.: Радио и связь, 1989. – 288 с., ил.
4. Бакулев П.А., Басистов Ю.А., Тугуши В.Г. Обработка сигналов с постоянным уровнем ложных тревог // Радиоэлектроника. – 1989. – № 4. – С.5-14. (Изв. высш. учебн. заведений).
5. Nitzberg R. Detection Loss of the Sample Matrix Inversion Technique // IEEE Trans. – 1984. – AES-20. – № 6. – P. 824-827.
6. Михальчан В.С. Исследование скорости сходимости метода наискорейшего спуска в системах адаптивной обработки сигналов // Радиоэлектроника. – 2003. – № 8. – С. 34-38. (Изв. высш. учебн. заведений).
7. Whalen A.D. Detection of Signals in Noise, Academic Press. Inc. – Orlando, Florida, 1971. – 410 p.
8. Справочник по специальным функциям.: Пер. с англ. / Под ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
9. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.М. Маричев. – Т.1. – М.: Наука, 1981. – 800 с.