УДК 621.391.26

Панфилов И.П., Морозов А.И.
Panfilov I.P., Morozov A.I.

НЕРАВНОМЕРНАЯ ЦИФРОВАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

NON-UNIFORM DIGITAL APPROXIMATION OF WEIGHT FUNCTIONS IN INFORMATION MEASUREMENT SYSTEMS

Аннотация. В статье дан метод неравномерной дискретизации весовой функции в информационно-измерительных системах. Показано, что в случае неравномерной дискретизации весовой функции погрешность аппроксимации значительно уменьшается.

Summary. In article the method of non-uniform sampling of weight function in information measurement systems is considered. In case of non-uniform sampling of weight function the approximation error significantly reduce.

Обработка и регистрация сигналов в информационно-измерительных системах (ИИС) осуществляется на фоне действия различных помех. Удобным и эффективным средством регистрации таких сигналов, повышающим защищенность от мешающего действия помех, является их корреляционная обработка со специально синтезируемыми весовыми функциями (ВФ) [1,2]. При цифровой реализации корреляционной обработки ВФ и сигнал в ИИС, на ограниченном интервале обработки последнего, представляется набором дискретных значений, число которых ограничено. В этих условиях представляет интерес задача о наилучшей, в смысле минимума среднеквадратической погрешности (СКП), аппроксимации ВФ последовательностью фиксированного числа прямоугольных импульсов, которая рассмотрена в работах [1,2,3,4]. Однако остался не рассмотрен вопрос о неравномерной дискретизации весовой функции в ИИС.

Поэтому цель настоящей работы предложить метод решения поставленной задачи на основе неравномерной аппроксимации ВФ.

Среднеквадратический критерий приближения ограниченной непрерывной, квадратично интегрируемой функции *f(x)* с помощью ступенчатой функции $\varphi(x)$ в интервале [*a, b*] сформулируем как:

$$\min\Delta = \int_a^b \left[f(x) - \varphi(x)\right]^2 dx\,, \tag{1}$$

где $\varphi(x) = f(x_{k-1})$, $x_{k-1} \le x \le x_k$, $k = \overline{1,n}$, $x_o = a, x_n = b,\ x_o < x_1 < ...x_n$.

Задача (1) представляет собой фактически минимизацию выражения:

$$\min\Delta = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[f(x) - \varphi(x)\right]^2 dx\,, \tag{2}$$

где $x_i \in [a,b], i = \overline{1,n-1}$, $x_o = a, x_n = b.$

Наложим ограничения на варьируемые переменные

$$a < x_1 < ... < x_{n-1} < b\,. \tag{3}$$

Введем новые переменные:

$$z_i = x_i - x_{i-1},\quad i = 1,2,...n$$

для которых справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = b - a\,. \tag{4}$$

Тогда варьируемые переменные из (3) могут быть выражены через введенные переменные:

$$x_k = b - \sum_{i=k+1}^{n} z_i,\ k = 1,2,...,n\text{-}1 \tag{5а}$$

либо

$$x_k = a + \sum_{i=1}^{k} z_i,\, k = 1,2,...,n\text{-}1\,. \tag{5б}$$

В силу условий (4) и (5) независимыми переменными в новой постановке задачи является

$$z_2 > 0,\ z_3 > 0,...z_n > 0, \text{ причем } z_1 = x_1\text{-}a = b\text{-}a - \sum_{i=2}^{n} z_i > 0. \qquad (6)$$

Рассматривая $\Delta = \Delta(z_2, z_3...z_n),$ наша цель состоит в нахождении минимума функции Δ при дополнительных условиях (6) и

$$\sum_{i=2}^{n} z_i = b - a, z_i > 0, \quad i = \overline{2,n}. \qquad (7)$$

Запишем целевую функцию для n отсчетов в общем виде:

$$\Delta = \int_a^{x_1} \left(f(x) - f(a)\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - f(x_1)\right)^2 dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_b} \left(f(x) - f(x_{n-1})\right)^2 dx, \quad n = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

Рассмотрим переменные x_k как функции от z_s согласно (5а). Дифференцируя (8) по каждой из этих переменных и приравнивая их к нулю, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial z_2} = 0, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial z_3} = 0, \\ .... \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial z_s} = 0. \end{cases} \qquad s = \overline{1,n}. \qquad (9)$$

Продифференцируем первое уравнение системы по переменной z_2:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z_2} = \frac{\partial}{\partial z_2} \int_a^{x_1} \left(f(x) - f(a)\right)^2 dx + \frac{\partial}{\partial z_2} \sum_{k=2}^{n} \int_{x_{n-1}}^{x_b} \left(f(x) - f(x_{n-1})\right)^2 dx, \quad n = \overline{1,n} \quad . \qquad (10)$$

Рассмотрим первое слагаемое. Интеграл представляет собой функцию от переменных z_s, где $s = \overline{1,n}$. Найдем производную первого интеграла по z_2. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $\left(f(x) - f(a)\right)^2$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial z_2} \int_a^{x_1} \left(f(x) - f(a)\right)^2 dx = \frac{\partial}{\partial z_2} \left(F(x_1) - F(a)\right) = \frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial z_2} = \left[f(x_1) - f(a)\right]^2 \frac{\partial x_1}{\partial z_2}, \qquad (11)$$

а в общем случае:

$$\frac{\partial}{\partial z_s} \int_a^{x_1} \left(f(x) - f(a)\right)^2 dx = \frac{\partial}{\partial z_s} \left(F(x_1) - F(a)\right) = \frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial z_s} = \left[f(x_1) - f(a)\right]^2 \frac{\partial x_1}{\partial z_s}, \ s = \overline{2,n}. \qquad (12)$$

Для остальных слагаемых выражения (10) частную производную по z_s можно выразить как производную сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial z_s} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x) - f(x_{k-1})\right)^2 dx = -2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x) - f(x_{k-1})\right) \cdot f'(x_{k-1}) \frac{\partial x_{k-1}}{\partial z_s} \cdot dx, \qquad (13)$$

где $k = \overline{1,n}$, $s = \overline{2,n}.$

Суммируя (12) и (13), получаем общий вид дифференциального уравнения по переменной z_s:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial s} = \left[f(x_1) - f(a)\right] \frac{\partial x_1}{\partial z_s} - 2 \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x) - f(x_{k-1})\right) \cdot f'(x_{k-1}) \frac{\partial x_{k-1}}{\partial z_s} \cdot dx, \ s = \overline{2,n}. \qquad (14)$$

Причем:

$$\frac{\partial x_o}{\partial z_s}=0,\ \frac{\partial x_n}{\partial z_s}=0 \text{ для всех } s=\overline{2,n},$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial z_s}=\begin{cases}0, & k>(s\text{-}1)\\ -1, & k\le(s\text{-}1)\end{cases},\quad k=\overline{1,(n\text{-}1)},\quad s=\overline{2,n}.$$

Отсюда:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial z_s}=-[f(x_1)-f(a)]^2-2\sum_{k=1}^{s-1}\left[f'(x_{k-1})\cdot\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_{k-1})dx-\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx\right)\right]=$$

$$=-[f(x_1)-f(a)]^2-2\sum_{k=1}^{s-1}\left[f'(x_{k-1})\cdot\left(f(x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k-1})-\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx\right)\right].\quad s=\overline{2,n}. \tag{15}$$

Выражение (15) является системой нелинейных дифференциальных уравнений относительно переменных x_k, решение которой при дополнительных условиях (3) является весьма сложной и громоздкой задачей даже при использовании всего арсенала имеющихся численных методов. Кроме того, решение (15) не гарантирует нахождение именно условного минимума целевой функции для заданной области определения переменных x_k (3), а дает одну из стационарных точек. Для выяснения того, является ли эта точка минимумом, потребуются дополнительные исследования.

Вместе с тем решение поставленной задачи, может быть получено с использованием численных методов минимизации функции многих переменных. Оно заключается в определении локального минимума целевой функции $\Delta=\Delta(z_2,z_3...z_n)$ при ограничении области определения независимых переменных уравнением связи (4) и дополнительным условием $z_i>0$.

Для этой цели запишем задачу (2) в виде:

$$\min_{z_i,i=\overline{1,n}}\Delta=\sum_{k=1}^{n}\int_{a+\sum_{i=1}^{k-1}z_i}^{a+\sum_{i=1}^{k}z_i}\left[f(x)-f(a+\sum_{i=1}^{k-1}z_i)\right]^2dx. \tag{16}$$

Минимизация целевой функции может быть выполнена в системе инженерных и научных расчетов MATLAB [5] с помощью стандартной подпрограммы минизации функции нескольких переменных **fmins** по методу Нелдера-Мида [6,7]. При этом необходимо задать значения входных переменных $z_1,z_2...z_{n-1}$, а значение z_n вычислялось с учетом условия (4). В процессе выполнения минимизации должно выполнятся условие $\sum_{i=1}^{n-1}z_i<b-a,\ z_i>0$.

В качестве примера для демонстрации предлагаемого метода была проведена аппроксимация ВФ, описываемой законом $\cos^2 x$ на интервале $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, и равной нулю вне этого интервала, который благодаря симметрии ВФ был сокращен вдвое $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Результаты расчета в виде графика ступенчатой аппроксимации функции $\cos^2 x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ приведены на рис. 1 для числа отсчетов $n=10$.

На рис. 2 приведена зависимость целевой функции (16) от количества отсчетов. Там же приведена среднеквадратичная погрешность аппроксимации той же функции при равномерной дискретизации.

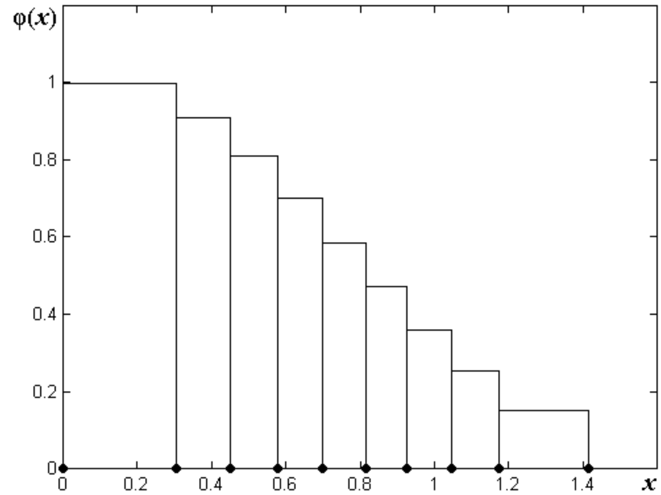

Рисунок 1 – График ступенчатой аппроксимации целевой функции

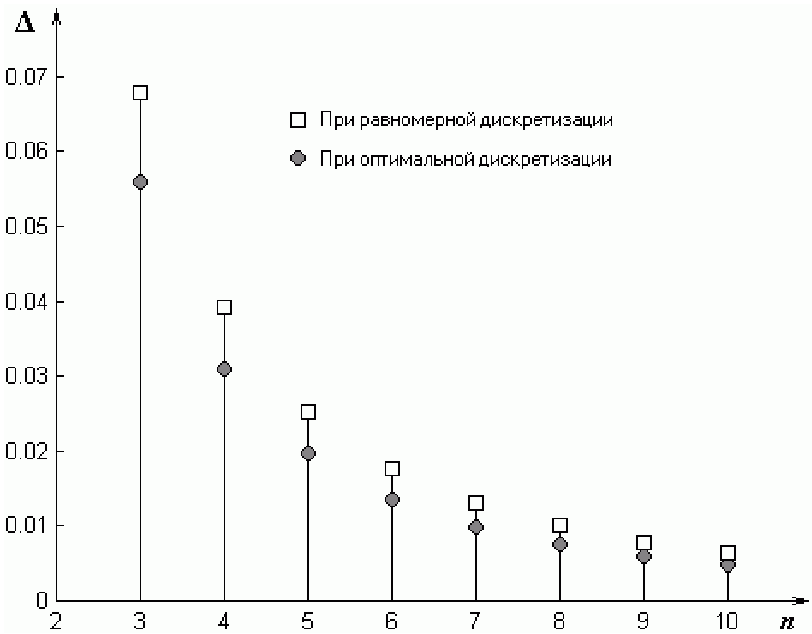

Рисунок 2 – Зависимость целевой функции от количества отсчетов при равномерной и оптимальной дискретизации

В заключении отметим, что при неравномерной дискретизации весовой функции (16) погрешность значительно уменьшается и зависит от количества отсчетов. Предложенный метод аппроксимации может быть использован при оптимальном синтезе весовых фунций в ИИС.

Литература

1. *Панфилов И.П.* Оптимизация устройств преобразования сигналов в системах передачи дискретной информации // Проблемы, методы и средства электрической связи: Сб. науч. тр. – К.: Техника, 1980. – С. 23-26.
2. *Ferguson A.C.* Weighing vehicles in motion// Measurement and control. – 1969. – №12. – P. 212-222.
3. *Финк Л.М.* Теория передачи дискретных сообщений. – М.: Советское радио, 1970. – 727 с.
4. *Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д.* Цифровая обработка сигналов. – С.Пб.: Политехника, 2000. – 592 с.
5. *Потемкин В.Г.* Система MATLAB: Справочное пособие. – М.:ДИАЛОГ-МИФИ, 1997. – 350 с.
6. *Nelder J.A., Mead R.A.* Simplex Method for Function Minimization // Computer Journal. – Vol. 7. – P. 308–313.
7. *Dennis J.E, Woods D.J.* New computing Environments: Microcomputers in Large-Scale Computing, Ed. By A.Wouk. SIAM, 1987. – P.116 – 122.