

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРА КАЛМАНА И ЕГО РОБАСТНЫХ СВОЙСТВ

RESEARCH OF THE KALMAN FILTER AND ITS ROBUSTNESS PROPERTIES

Аннотация. В статье представлен анализ характеристик фильтра Калмана (коэффициент усиления, АЧХ, дисперсия ошибки). Значительное внимание уделено исследованию робастных свойств фильтра Калмана. Исследования проводились с использованием компьютерной модели.

Summary. This article presents the analysis of the Kalman filter characteristics (gain factor, amplitude frequency characteristic, error variance). The article also presents the results of the Kalman filter robustness properties research. The computer model was used for the research.

В любой системе передачи существует проблема получения оценок информационных и неинформационных параметров принимаемого искаженного шумом сигнала. Если параметры сигнала являются нестационарными процессами, то оптимальная, в смысле минимума среднеквадратической ошибки, рекуррентная оценка значений параметров может быть получена фильтром Калмана-Бьюси (аналоговый фильтр), либо фильтром Калмана (цифровой фильтр) [1]. Наибольшее распространение фильтр Калмана (рассматривается только цифровой фильтр) нашел в системах радионавигации, в частности в спутниковой системе GPS [2]. Это связано с тем, что модель системы передачи GPS хорошо согласуется с гауссовско-марковской моделью, для которой фильтр Калмана был разработан [1]. Однако, модель системы передачи может отличаться от гауссовско-марковской. В результате возникает вопрос о робастных свойствах фильтра Калмана – устойчивости свойств фильтра к отклонениям параметров модели системы передачи [3]. Исследование робастных свойств фильтра Калмана можно найти в [4, 5]. Однако в этих работах не рассматривается влияние вида распределения оцениваемых параметров на устойчивость фильтра. Кроме того рассматривается только вопрос полной потери работоспособности фильтра и нет никаких сведений об ухудшении свойств фильтра в результате небольших отклонений параметров модели системы. Поскольку такие исследования трудно осуществить аналитически, целью данной работы стало исследование робастных свойств фильтра Калмана с использованием компьютерной модели.

1. Модель системы передачи. В теории фильтрации процесс, значения которого оцениваются, называется сообщением. Пусть сообщение является скалярным и дискретным. Пусть моделью сообщения является марковская последовательность $x(n)$, которая формируется на основе стохастического разностного уравнения 1-го порядка [1]:

$$x(n+1) = a(n)x(n) + w(n), \tag{1}$$

где $a(n)$ – зависящий от времени коэффициент формирующего фильтра, $|a(n)| < 1$ [6];

$w(n)$ – порождающий нестационарный белый шум с нулевым математическим ожиданием, дисперсией $\sigma_w^2(n)$ и функцией корреляции $K_w(n, m) = \sigma_w^2(n)\delta(n - m)$ [1];

n – дискретное время.

Сообщение $x(n)$ является нестационарным, поскольку зависят от времени коэффициент $a(n)$ и дисперсия порождающего шума $\sigma_w^2(n)$. Плотность вероятности такого сообщения определяется в результате решения уравнения Фокера-Планка-Колмогорова [4]. В стационарном случае распределение сообщения $x(n)$ является гауссовским. Мгновенная спектральная плотность мощности (СПМ) сообщения $x(n)$ описывается выражением:

$$S(f, n) = \frac{W_0(n)}{1 - 2a(n)\cos(2\pi f T_d) + a^2(n)}, \quad 0 \leq f \leq 0,5/T_d, \tag{2}$$

где T_d – интервал дискретизации;

$W_0(n) = 2T_d\sigma_w^2(n)$ – спектральная плотность мощности порождающего шума $w(n)$.

Сообщение $x(n)$ недоступно для непосредственного наблюдения, доступны лишь искаженные шумом значения $y(n)$. Модель наблюдения описывается линейным стохастическим уравнением:

$$y(n) = c(n)x(n) + v(n), \quad (3)$$

где $c(n)$ – зависящий от времени коэффициент передачи канала;

$v(n)$ – паразитный шум наблюдения, нестационарный белый шум с нулевым математическим ожиданием, дисперсией $\sigma_v^2(n)$ и функцией корреляции $K_v(n, m) = \sigma_v^2(n)\delta(n - m)$.

2. Фильтр Калмана. На основе нестационарного процесса $y(n)$ необходимо получить рекуррентную, несмещенную, линейную оценку $\hat{x}(n)$ значений нестационарного сообщения $x(n)$.

Если воспользоваться выражением ошибки оценки $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$ и выражениями модели системы (1) и (3), то можно привести выражение оценки $\hat{x}(n)$ к классическому виду, соответствующему алгоритму фильтрации Калмана [1]:

$$\hat{x}(n+1) = a(n)\hat{x}(n) + K(n+1)[y(n+1) - c(n+1)a(n)\hat{x}(n)], \quad (4)$$

где $K(n)$ – коэффициент усиления фильтра Калмана.

Идеальный, в смысле равенства нулю абсолютной ошибки $e(n+1) = 0$, коэффициент усиления фильтра Калмана определяется следующим выражением:

$$K(n+1) = \frac{a(n)e(n) + w(n)}{c(n+1)a(n)e(n) + c(n+1)w(n) + v(n)}. \quad (5)$$

Очевидно, что практический расчет коэффициента $K(n)$ в соответствии с выражением (5) невозможен. Выражение оптимального, в смысле минимума среднеквадратической ошибки оценки $e^2(n+1)$, коэффициента усиления напротив пригодно для практических расчетов [4]:

$$K(n+1) = \frac{c(n+1)a^2(n)\sigma_v^2(n)K(n) + c(n+1)c(n)\sigma_w^2(n)}{c^2(n+1)a^2(n)\sigma_v^2(n)K(n) + c^2(n+1)c(n)\sigma_w^2(n) + c(n)\sigma_v^2(n+1)}. \quad (6)$$

Таким образом, выражения (4) и (6) в совокупности представляют классический фильтр Калмана. Эти выражения являются рекуррентными, что считается основным преимуществом алгоритма, поскольку его легко реализовать в виде цифрового рекурсивного фильтра [1]. Существенным преимуществом фильтра Калмана также является тот факт, что при любых начальных условиях $K(0)$ всегда выполняется условие устойчивости (анализируемые в [4] ситуации никогда не имеют места на практике):

$$\frac{a(n)-1}{a(n)c(n+1)} \leq K(n+1) \leq \frac{a(n)+1}{a(n)c(n+1)}. \quad (7)$$

Действительно, если рассмотреть стационарный случай, когда параметры модели системы не зависят от времени, то можно убедиться, что с течением времени коэффициент усиления фильтра Калмана стремится к некоторому пределу [1]. Это предельное значение коэффициента усиления всегда находится внутри интервала (7) и рассчитывается следующим образом (рис. 1):

$$K_{\lim} = \frac{a^2 - c^2\rho^2 - 1 + \sqrt{a^4 + 2a^2(c^2\rho^2 - 1) + (c^2\rho^2 + 1)^2}}{2ca^2}, \quad (8)$$

где $\rho^2 = \sigma_w^2 / \sigma_v^2$ – отношение дисперсий порождающего и паразитного шумов.

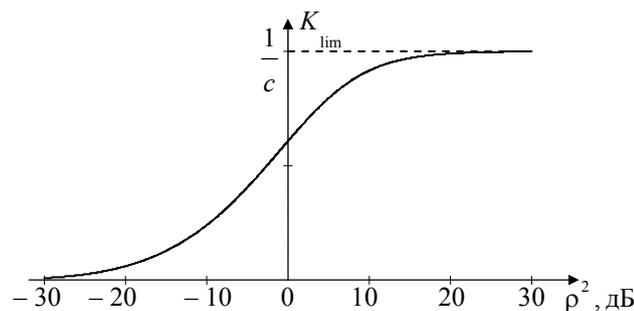


Рисунок 1

Анализ графика на рис. 1 позволяет сделать вывод, что при большом отношении ρ^2 оценка (4) имеет следующий вид:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{1}{c(n+1)} y(n+1). \quad (9)$$

В этом случае АЧХ фильтра постоянна во всей области, т.е. фильтр является всепропускающим. Напротив, в случае преобладания шума, когда $\rho^2 \rightarrow 0$, коэффициент усиления стремится к нулю, и фильтр практически не пропускает входной сигнал на выход. В общем случае выражение АЧХ фильтра Калмана имеет следующий вид:

$$H(f, n) = \frac{K(n)}{\sqrt{1 - 2b(n)\cos(2\pi fT_d) + b^2(n)}}, \quad (10)$$

где $b(n) = a(n-1)[1 - K(n)c(n)]$.

Фильтр Калмана позволяет получить несмещенную оценку [1], т.е. математическое ожидание ошибки равно нулю $M[e(n)] = 0$ с дисперсией ошибки равной:

$$\overline{e^2(n)} = \frac{1}{c(n)} K(n) \sigma_v^2(n). \quad (11)$$

Из последнего выражения следует, что оценка (4) не является состоятельной, поскольку с течением времени дисперсия ошибки оценки не стремится к нулю.

Зная СПМ сообщения (2), АЧХ фильтра Калмана (10), предельное значение коэффициента усиления фильтра (8) и выражение дисперсии ошибки оценки (11) можно, для стационарного случая, рассчитать выигрыш в отношении сигнал/шум, обеспечиваемый фильтром Калмана:

$$g = \frac{\rho_{\text{выч}}}{\rho_{\text{вх}}}, \quad (12)$$

где $\rho_{\text{выч}}$ – отношение сигнал/шум на выходе фильтра; $\rho_{\text{вх}}$ – отношение сигнал/шум на входе фильтра.

На рис. 2 представлена зависимость выигрыша g от отношения сигнал/шум на входе фильтра $\rho_{\text{вх}}$. Максимальный выигрыш $g = 1,963$ достигается при отношении сигнал/шум на входе фильтра $-4,6$ дБ, а с увеличением отношения сигнал/шум значение выигрыша стремится к единице, поскольку фильтр трансформируется во всепропускающий.

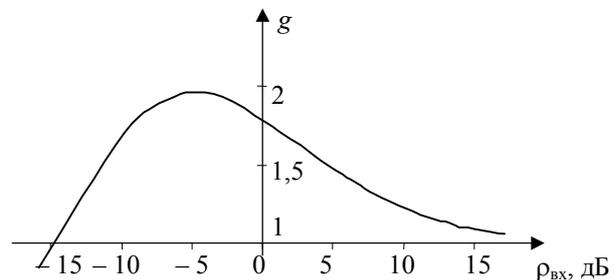


Рисунок 2

3. Результаты моделирования. Все результаты полученные в предыдущем разделе относятся к случаю точного совпадения параметров фильтра с соответствующими параметрами модели системы передачи, когда сама модель является гауссовско-марковской (1), (3). Существенным препятствием к использованию фильтра Калмана может стать несоответствие модели заданной системы передачи и гауссовско-марковской модели, а также необходимость оценки параметров этой модели, особенно в нестационарном случае. Это препятствие заключается в том, что дисперсия ошибки может стать недопустимо большой.

Пусть сообщение и канал являются стационарными со следующими параметрами: $a = 0,95$; $\sigma_w^2 = 0,1$; $c = 1$; $\sigma_v^2 = 1$. Минимальная дисперсия ошибки, в соответствии с (8) и (11), равна $\overline{e^2} = 0,241$ и достигается, когда параметры фильтра совпадают с соответствующими параметрами модели системы: $a_{\text{ф}} = a$; $\sigma_{\text{вф}}^2 = \sigma_w^2$; $c_{\text{ф}} = c$; $\sigma_{\text{вф}}^2 = \sigma_v^2$. На рис. 3-6 представлены зависимости дисперсии ошибки от значений параметров фильтра. Из анализа представленных зависимостей следует, что статическое отклонение параметров фильтра Калмана от параметров модели системы существенно влияет на дисперсию ошибки.

Статическое расхождение параметров модели системы и фильтра Калмана возможно, когда в процессе работы фильтра параметры модели не оцениваются, а предварительно, с некоторой погрешностью, заносятся в фильтр. Когда параметры модели системы подлежат оценке, то разность между значениями параметров модели и фильтра является некоторым случайным процессом, а не постоянной величиной. На рис. 7 представлена зависимость дисперсии ошибки оценки значений сообщения $\overline{e^2}$ от дисперсии ошибки оценки значений параметров модели системы σ_e^2 . Эта зависимость показывает существенное влияние точности оценки параметров модели системы на точность оценки сообщения.

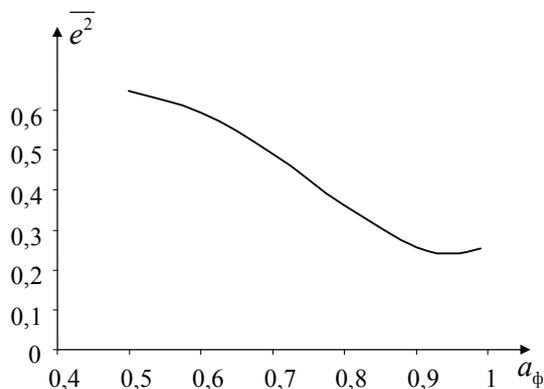


Рисунок 3

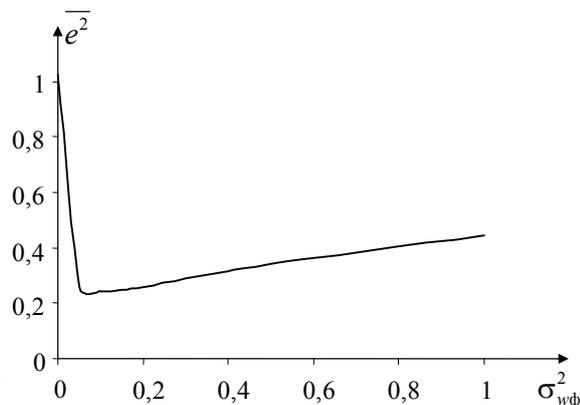


Рисунок 4

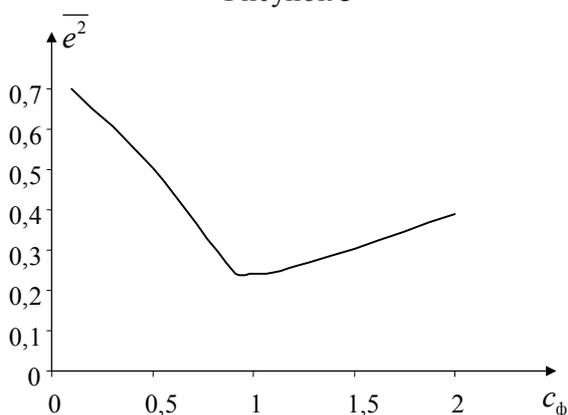


Рисунок 5

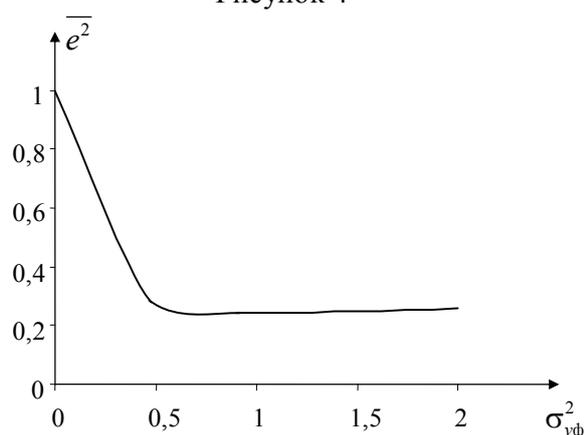


Рисунок 6

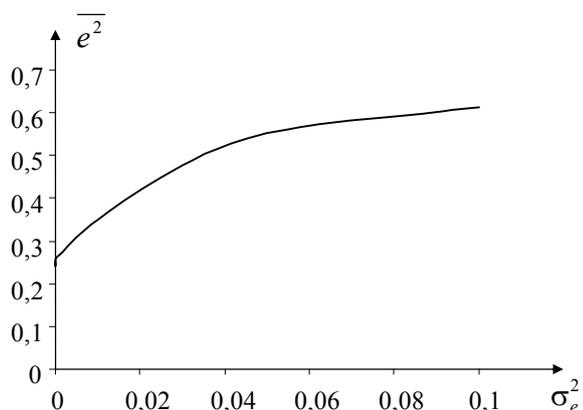


Рисунок 7

Пусть теперь фильтр Калмана используется для оценки значений сообщения, модель которого отличается от гауссовско-марковской модели (1). Поскольку оценка может стать смещенной, например, в случае релейского процесса, то критерием качества фильтрации следует выбрать средний квадрат или мощность ошибки P_e . В табл. 1 представлены три модели сообщения и полученные, в

результате фильтрации, значения мощности ошибки. Результаты табл. 1 позволяют сделать вывод, что фильтр Калмана позволяет одинаково хорошо оценивать сообщения различных моделей. Действительно, параметры фильтра влияют на его полосу пропускания и, если эта полоса соответствует ширине спектра сообщения, то оценка будет наилучшей. Однако возникает проблема соответствия параметров новой модели сообщения и параметров фильтра Калмана. Поиск оптимальных параметров, при получении результатов в табл. 1, производился путем перебора. Не удалось найти аналитической связи между параметрами представленных моделей и оптимальными параметрами фильтра (поэтому они не приведены в таблице).

Таблица 1

Модель сообщения	Закон распределения	Мощность ошибки	Дисперсия ошибки для гауссовско-марковской модели
Марковская цепь	равномерный	0,247	0,241
Марковская последовательность	равномерный	0,464	0,377
Марковская последовательность	релеевский	0,241	0,241

В завершении рассмотрения стационарного случая необходимо отметить, что закон распределения ошибки всегда был гауссовским.

Очевидно, что для оценки нестационарного сообщения требуется параметрический фильтр Калмана, т.е. параметры фильтра должны изменяться во времени по тому же закону, что и параметры сообщения. Также очевидно, что оценка переменных параметров сообщения, особенно если они являются случайными, более сложная задача, нежели оценка постоянных параметров в стационарном случае. Однако оказалось, что близкую к оптимальной оценку нестационарного сообщения можно получить стационарным фильтром, если в качестве его параметров выбрать средние значения параметров сообщения $\overline{a(n)}$ и $\overline{\sigma_w^2(n)}$ (см. табл. 2). Поскольку дисперсия ошибки в нестационарном случае зависит от времени, то и здесь критерием качества фильтрации является мощность ошибки.

Таблица 2

Параметры сообщения	Идеальный параметрический фильтр	Стационарный фильтр с параметрами $a_{\phi} = 0,9$; $\sigma_{w\phi}^2 = 0,1$
$a(n)$ – процесс с равномерным законом [0,89;0,91]; $\sigma_w^2(n)$ – процесс с равномерным законом [0,05;0,35].	$P_e = 0,304$	$P_e = 0,311$
$a(n)$ – [0,81;0,99]; $\sigma_w^2(n)$ – [0,15;0,25].	$P_e = 0,312$	$P_e = 0,318$

В завершении можно сделать следующий вывод – робастные свойства фильтра Калмана неоднозначны. С одной стороны, фильтр чувствителен к отклонению параметров модели системы от априорно заданных, что требует их точной оценки в процессе работы фильтра. Однако закон распределения сообщения слабо влияет на качество фильтрации, но при этом возникает проблема определения оптимальных параметров фильтра. Наконец, задачу фильтрации нестационарного сообщения можно решить стационарным фильтром, что очень важно, например, в системах подвижной связи, каналы которых являются нестационарными.

Литература

1. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси: Пер. с нем. – М.:Наука, 1982. – 200 с.
2. Леви Л. Применение фильтра Калмана в навигационной аппаратуре // www.agr.ru. – 2000.
3. Веремей Е.И. Введение в анализ и синтез робастных систем управления // www.mathlab.ru. – 2004.
4. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении: Пер. с англ. / Под ред. проф. Б. Р. Левина. – М.: Связь, 1976. – 496 с.
5. Батищев В.И. Принципы построения стабильных регуляризованных фильтров Калмана // Вестник СГТУ. Сер. Физико-математические науки. – 2000. – №9. – С. 16-22.
6. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – С.Пб.: Питер, 2003. – 608 с.