

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОГРАНИЧЕННОЙ РАЗРЯДНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

RESEARCH OF STABILITY OF SECOND ORDER RECURSIVE DIGITAL FILTERS WITH THE LIMITED WORD LENGTH ON THE BASIS OF LINEAR MODEL

Аннотация. Рассматривается методика анализа устойчивости рекурсивных цифровых фильтров второго порядка с ограниченной разрядностью данных. Методика разработана на основе обобщенной линейной модели цифрового фильтра.

Summary. The technique of the analysis of stability of second order recursive digital filter with the limited word length is considered. The technique is developed on the basis of the generalized linear model of the digital filter.

В настоящее время в различных областях обработки сигналов широко используется цифровая фильтрация. Одной из составляющих этого направления является проектирование рекурсивных цифровых фильтров (РЦФ). При практической реализации РЦФ существует проблема анализа и обеспечения их устойчивости. Эффекты, обусловленные ограниченной разрядностью регистров, существенно усложняют анализ устойчивости, при котором приходится рассматривать РЦФ как нелинейную систему. Существующие решения позволяют учесть влияние квантования коэффициентов умножителей на устойчивость РЦФ [1], оценить устойчивость процессов отдельных групп фильтров [2], либо для широкого круга фильтров оценить устойчивость положения равновесия [3]. Однако универсального решения проблема анализа устойчивости РЦФ пока не получила.

Рассматриваемая ниже методика предназначена для анализа устойчивости процессов РЦФ второго порядка с ограниченной разрядностью данных. Она основывается на линейной модели цифрового фильтра (ЦФ), предложенной Л.Б.Джексоном [1]. Обобщенная линейная модель используется для оценки уровня шумов округления (усечения) результатов арифметических операций. Ее характерной особенностью является представление о цифровом фильтре, нелинейном, вследствие округления (усечения) данных, как линейном с введенными в него дополнительными источниками шума.

Перенос на анализ устойчивости РЦФ представления о нелинейном фильтре как линейном с несколькими входами позволяет на основе условия устойчивости во временной области для линейных фильтров (1) [1] сформулировать условие устойчивости для нелинейных фильтров (2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| < \infty, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^{\infty} |h_i(nT)| < \infty, \tag{2}$$

где $h(nT)$ – импульсная характеристика линейного цифрового фильтра; M – количество источников сигнала (включая источники шума) в ЦФ с ограниченной разрядностью; $h_i(nT)$ – импульсная характеристика части линейного цифрового фильтра от i -го источника сигнала до выхода фильтра.

Наряду с нелинейностью методика учитывает смещение полюсов фильтра на z -плоскости, обусловленное квантованием коэффициентов умножителей.

Методика реализуется в несколько этапов:

- преобразование значений коэффициентов умножителей из десятичной системы счисления в двоичную, их округление/усечение с учетом ограниченной разрядности умножителей фильтра и обратное преобразование в десятичную систему;

- определение абсолютной величины $h^*(nT)$, которую условно назовем импульсной характеристикой фильтра с ограниченной разрядностью:

$$|h^*(nT)| = \sum_{i=1}^M |h_i(nT)|; \tag{3}$$

- переход от импульсной характеристики фильтра к числовому ряду;
- анализ сходимости числового ряда.

При формировании ряда следует учесть периодический характер изменения импульсной характеристики. Минимизация влияния периодичности на формирование ряда может быть достигнута:

- сглаживанием импульсной характеристики таким образом, чтобы новая зависимость была монотонна, и при этом значение любого ее отсчета было не меньше значения соответствующего отсчета исходной характеристики;
- суммированием отсчетов сглаженной импульсной характеристики на интервалах времени равных или больших периода колебания.

Полученные суммы могут быть представлены в виде числовой последовательности, в этом случае изменение ряда будет носить монотонный характер. Ряд сходится лишь при выполнении условия устойчивости (2) [4]. Поэтому исследование устойчивости фильтра можно свести к исследованию сходимости ряда.

Предлагаемую методику можно рассмотреть на примере.

При проектировании РЦФ по аналоговому прототипу было получено семейство рекурсивных цифровых фильтров второго порядка [5]. Полученные фильтры многофункциональны: узлы 3,5,7,9 их структур являются выходами соответственно режекторного, ВЧ, селективного и НЧ фильтров. Ниже приведены результаты исследования устойчивости двух фильтров из этой группы (рис. 1, а, б).

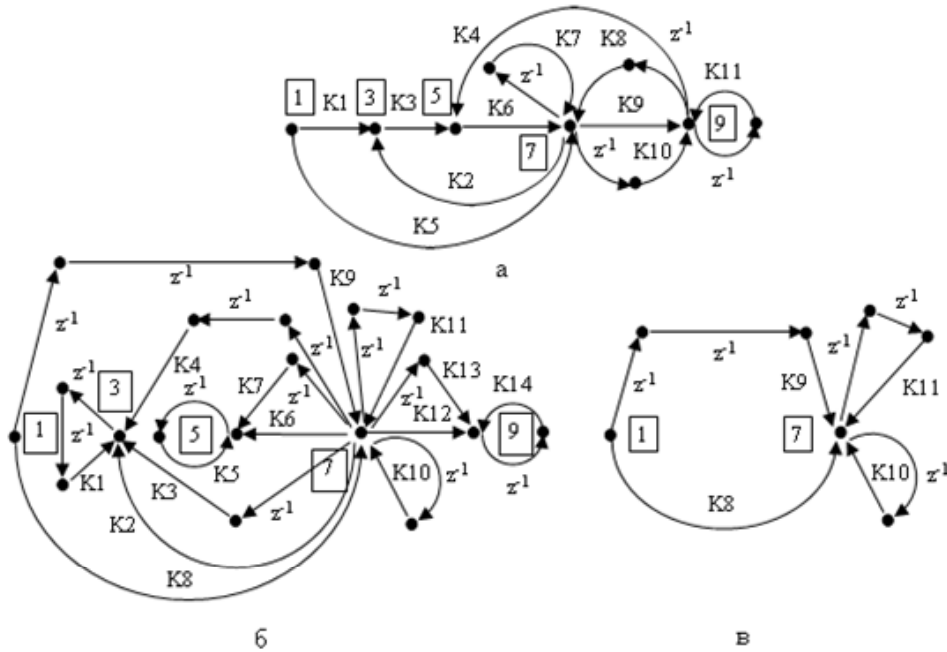


Рисунок 1 – Графы структур многофункциональных РЦФ второго порядка Ф1 (а), Ф2 (б) и селективного РЦФ 2-го порядка, выделенного из фильтра Ф2 (в)

Фильтры Ф1 и Ф2 могут быть описаны системами дискретных уравнений соответственно (5), (6):

$$\begin{cases} U_3 = K_1 U_1 + K_2 U_7 \\ U_5 = K_3 U_3 + K_4 U_9 \\ U_7 = K_5 U_1 + K_6 U_5 z^{-1} + K_7 U_7 z^{-1} + K_8 U_9 z^{-1} \\ U_9 = K_9 U_7 + K_{10} U_9 z^{-1} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} U_7 = K_8 U_1 + K_9 U_1 z^{-2} + K_{10} U_7 z^{-1} + K_{11} U_7 z^{-2} \\ U_3 = K_1 U_3 z^{-2} + K_2 U_7 + K_3 U_7 z^{-1} + K_4 U_7 z^{-2} \\ U_5 = K_5 U_5 z^{-1} + K_6 U_7 + K_7 U_7 z^{-1} \\ U_9 = K_{12} U_7 + K_{13} U_7 z^{-1} + K_{14} U_9 z^{-1} \end{cases} \quad (6)$$

где z – дискретная комплексная переменная; K_i – коэффициенты, зависящие от значений пассивных элементов схемы аналогового прототипа и частоты отсчетов.

Исследование устойчивости математических моделей фильтров Ф1, Ф2 по рассматриваемой методике было выполнено в системе Matlab 6.0. При этом значения резонансной частоты, коэффициента передачи на резонансной частоте, добротности фильтра и частоты отсчетов были приняты равными соответственно 10; 2; 2; 200 кГц. Согласно обобщенной линейной модели ЦФ в узлах 3, 5, 7, 9 фильтров Ф1, Ф2 присутствуют эквивалентные источники шума [2]. Поэтому в соответствии с (3)

импульсные отклики в узлах 3,5,7,9 рассчитывались от единичных сигналов в узлах 1, 3, 5, 7, 9. Отсчеты каждого отклика сглаживались и суммировались на отрезках времени равных периоду свободных колебаний в фильтре. Сходимость полученных рядов исследовалась с помощью признака Коши.

В соответствии с признаком Коши, ряд с положительными членами $a_1 + a_1 + a_3 + \dots$ сходится, если величина $k = \sqrt[i]{a_i}$ имеет конечный предел $L = \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{a_i} < 1$, и расходится, если $L > 1$, ряд также расходится, если $L = 1$ и начиная с некоторого номера n , величина $k > 1$ [4].

На рис. 2 приведены величины k , определенные для фильтров структуры Ф1 при ограниченной разрядности данных. Все они асимптотически и монотонно приближаются к некоторому положительному значению, меньшему 0,5, т.е. выполняется условие сходимости ряда $L < 1$, что позволяет сделать вывод об устойчивости фильтра Ф1.

На рис. 3 приведены величины k и абсолютные значения импульсных характеристик фильтров структуры Ф2, определенные при условии ограниченной разрядности данных.

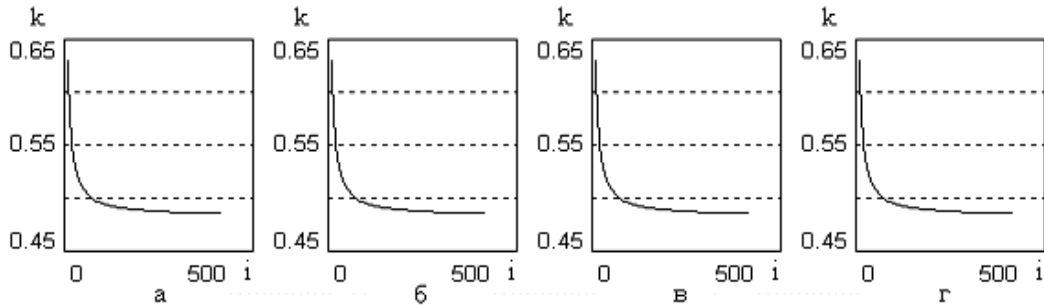


Рисунок 2 – Зависимости k от i , полученные для режекторного (а), ВЧ (б), НЧ (в), селективного (г) фильтров структуры Ф1 при ограниченной разрядности фильтров

Величина k , рассчитанная для селективного фильтра, асимптотически и монотонно приближается к некоторому положительному значению, меньшему 0,5. Величины k , характеризующие режекторный, ВЧ, НЧ фильтры, асимптотически приближаются к значению 1 сверху, абсолютные значения их импульсных характеристик $h^*(nT)$, рассчитанные в соответствии с (3), носят неубывающий характер. Полученные данные показывают, что фильтр Ф2 неустойчив. Однако, если узлы 3, 5, 9 и связанные с ними ветви исключить из структуры Ф2, то будет получен устойчивый полосовой фильтр 2-го порядка (см. рис. 1, в).

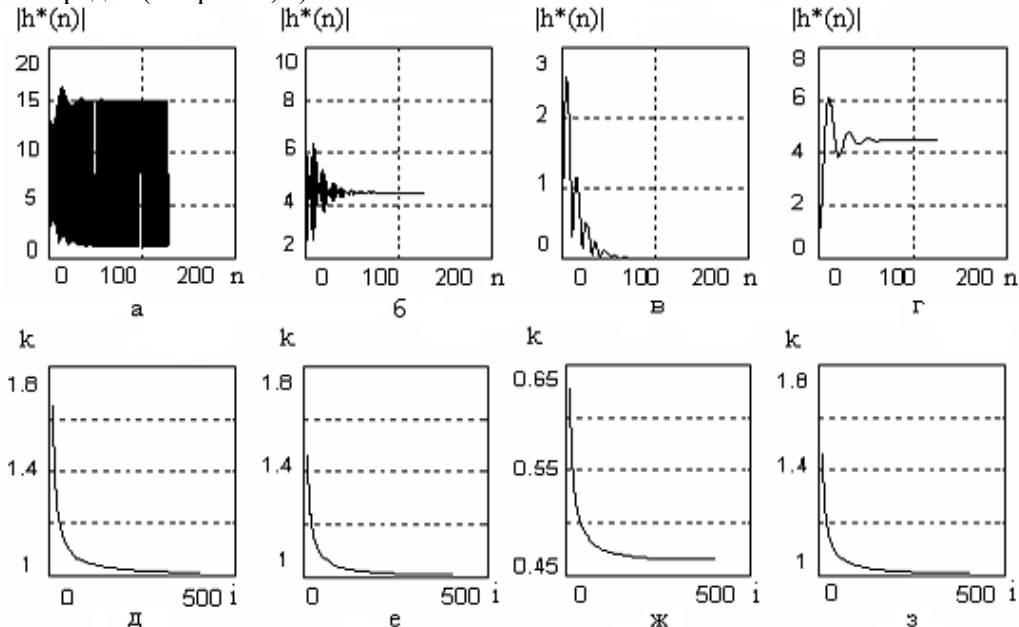


Рисунок 3 – Абсолютные значения импульсных характеристик и зависимости k от i , полученные для режекторного (а, д), ВЧ (б, е), НЧ (в, ж), селективного (г, з) фильтров структуры Ф2 при ограниченной разрядности фильтров

Для сравнения на рис. 4 приведены величины k и абсолютные значения импульсных характеристик фильтров структуры Ф2, рассчитанные для случая неограниченной разрядности фильтров. Им-

пульсные характеристики фильтров, определенные традиционным образом, как реакции на единичный импульс на входе фильтра, стремятся к 0. Величина k , рассчитанная для селективного фильтра, асимптотически и монотонно приближается к некоторому положительному значению, меньшему 0,47. Величины k , рассчитанные для режекторного, ВЧ, НЧ фильтров, асимптотически приближаются к 1 снизу. Полученных в этом случае данных недостаточно для заключения об устойчивости фильтра Ф2.

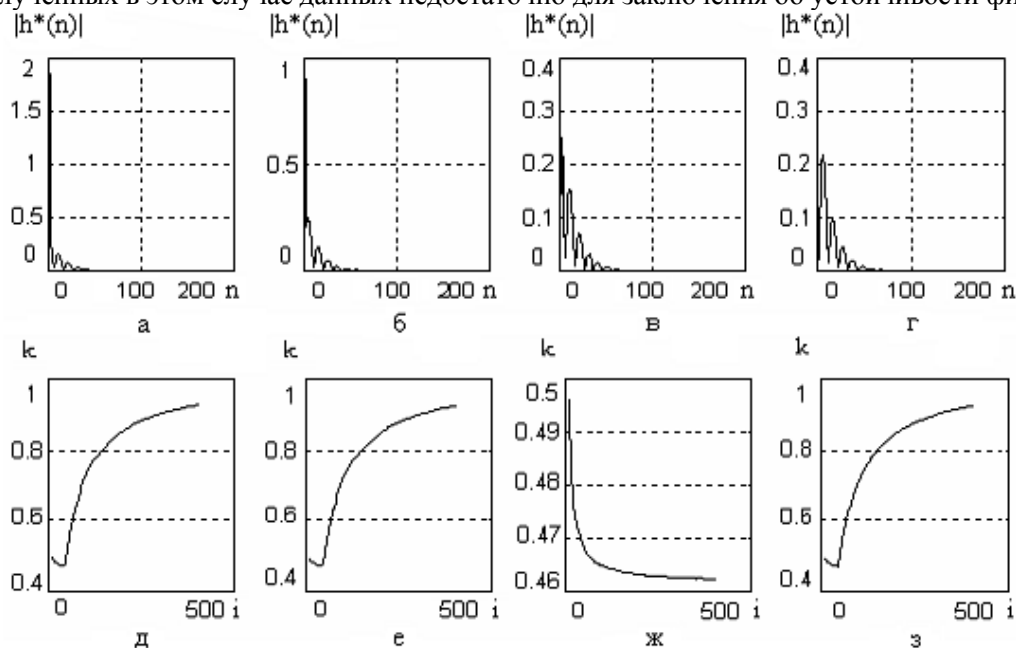


Рисунок 4 – Абсолютные значения импульсных характеристик и зависимости k от i , полученные для режекторного (а, д), ВЧ (б, е), НЧ (в, ж), селективного (г, з) фильтров структуры ЦФ2 при неограниченной разрядности фильтров

Проверка полученных результатов была выполнена путем исследования устойчивости математических моделей фильтров Ф1, Ф2 с разрядностью, равной 8 и 16 битам. Моделирование проводилось с различными видами периодических и непериодических входных сигналов. В процессе моделирования при некоторых входных сигналах были зафиксированы колебания переполнения в узлах 3, 5, 9 фильтра Ф2. В фильтре Ф1 колебания переполнения не наблюдались. Т.о. результаты моделирования совпали с результатами, полученными при реализации рассматриваемой методики.

Всего было исследовано 15 структур РЦФ второго порядка. Из них рассматриваемой методикой были оценены как устойчивые 11 структур, как неустойчивые – 4 структуры. При моделировании работы рекурсивных цифровых фильтров с ограниченной разрядностью все 11 предположительно устойчивых структур проявили себя как устойчивые. Из 4-х предположительно неустойчивых структур колебания переполнения были зафиксированы в двух структурах.

Результаты исследований позволяют сделать вывод, что рассмотренная методика дает возможность с высокой степенью вероятности оценить устойчивость рекурсивного цифрового фильтра. Методика является простым и эффективным средством исследования устойчивости РЦФ второго прядка с ограниченной разрядностью данных, не требующим анализа фильтра как нелинейного устройства. Возможность использования методики для оценки устойчивости РЦФ более высоких порядков требует проведения дополнительных исследований.

Литература

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978.
2. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1985.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – С.Пб.: Питер, 2002.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т 2. – М.: Наука, 1969.
5. Малахов В.П., Мартыненко В.В., Молчанов В.А. Синтез структур цифровых фильтров с сохранением топологии аналогового прототипа // Тр. Одес. политехн. ун-та. – Одесса, 2001. – Вып. 1 (13). – С. 130-135.