УДК *621.371; 621.372*

Иваницкий А.М.
Ivanitckiy A.M.

ЗАВИСИМОСТЬ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛ ОТ ПЕРВЫХ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПО

DEPENDENCE OF THE THIRD AND FOURTH THE MAXWELL'S EQUATIONS FROM THE FIRST TWO EQUATIONS WITH ARBITRARY EXCITATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD

Аннотация. Показано, что третье и четвертое уравнения Максвелла являются следствием первых двух уравнений при произвольном возбуждении электромагнитного поля.

Summary. It is shown what the third and fourth the Maxwell's equations are consequence of the first two equations with arbitrary excitation of electromagnetic field.

Построение любой теории по аксиоматическому принципу требует сформули основании минимум исходных определений и постулатов, выбранн общей научной проблемой, которую необходимо решить при жел указанному выше принципу. Не исключение и построение классичес в основе которой лежат четыре уравнения Максвелла (см., на впервые за основу изложения приняты аксиоматические введе Г.Р. Герцем «Об основных уравнениях электродинамики покоящих (см. в [3]). Являются ли четыре уравнения Максвелла независи в случае покоящихся сред первые два уравнения Максвелла, называемые основными аксиомами, с учетом трех материальных уравнений я дифференциальными уравнениями первого порядка для шести неизве напряженностей электрического и магнитного полей «в результате [3] в них полностью определенная математическая задача». Третье и чет рассматриваются как дополнительные ограничивающие условия к у дифференциальных уравнений. Таким образом, в [3] ... первых двух уравнений Максвелла по отношению к третьему и ч известно (см., например, [4]), что в случае излучения гармоническ полей, т.е. в случае монохроматических полей, четвертое уравнения Ма следствием первых двух. Аналогичная картина наблюдается и в с [5], если ядра экспофункций не зависят от времени или являю функциями [6]. Эти свойства монохроматических и экспофункциона линейных однородных изотропных покоящихся сред. Однако отс при произвольных функциях возбуждения поля, выясняющие в уравнений Максвелла. Поэтому целью данной статьи является д четвертое уравнения Максвелла являются следствием первого и линейных однородных изотропных покоящихся сред при произво

1. Свойство консервативности многомерных экспофункций. Прежде всего, покажем, что свойство консервативности экспофункций [7], которое наблюдае неоднородных дифференциальных m-го порядка уравнений с постоянными коэфф остается и в случае линейных неоднородных дифференциа производных с постоянными коэффициентами вида [8]:

$$P(\hat{\partial})u(x) = \sum_{|\alpha| \le m} p_\alpha \hat{\partial}^\alpha u(x) = f(x), \quad x \in \mathrm{R}^n, \tag{1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha_k \in Z_+$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$; $p_\alpha \in \mathrm{C}$; $\hat{\partial} = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$, $\partial_k = \partial / \partial x_k$;

$$\hat{\partial}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n}. \tag{2}$$

Здесь R^n – стандартное вещественное n-мерное векторное пространство; C – множество всех комплексных чисел; Z_+ – множество всех целых неотрицательных чисел.

Пусть $f(x)$ – многомерная экспофункция вида:

$$f(x) \quad e^{x}\tilde{f}(x), \qquad (3)$$

где R^n; $x \quad {}_1x_1 \quad {}_2x_2 \ \dots \ {}_nx_n$; $\tilde{f}(x)$ **Д**(R^n) **Д**.

Здесь **Д** – пространство всех обобщенных функций в $\boldsymbol{R}^n$ [8]. В класс функций (3) не входят функции введенные в [9], ядра которых являются частным случаем ядра $\tilde{f}(x)$.

Экспоненциальный множитель

$$e^{x} \quad e^{{}_1x_1}e^{{}_2x_2}\dots e^{{}_nx_n} \qquad (4)$$

относится к пространству бесконечно дифференцируемых функций в $\boldsymbol{R}^n$, т.е. e^{x} $C(\mathrm{R}^n)$ C.

Это следует из разложения (4), из того, что $e^{{}_kx_k}$, $k = \overline{1,n}$ – бесконечно дифференцируемы в $\boldsymbol{R}^1$ (см., например, в [10]) и из определения частной производной переменных. Известно [11], что умножение обобщенной функции из **Д** на бесконечно дифференцируемую функцию в $\boldsymbol{R}^n$ всегда определено, поэтому функция (3) в является обобщенной, если $\tilde{f}(x)$ **Д**, или – обычной функцией, если $\tilde{f}(x)$ – обычная функция [12].

Будем искать решение уравнения (1) в случае правой его части

$$u(x) \quad e^{x}\tilde{u}(x). \qquad (5)$$

Для $\tilde{u}(x)$ **Д** и e^{x} справедлива формула Лейбница для дифференцирования $e^{x}\tilde{u}(x)$ [11]:

$$\hat{\ } (e^{x}\tilde{u}(x)) \qquad \hat{\ } e^{x}\hat{\ } \quad \tilde{u}(x), \qquad (6)$$

где

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & & n \end{matrix} \qquad \frac{!}{!(\quad)!}. \qquad (7)$$

Здесь $! \quad {}_1! \ {}_2! \dots {}_n!$; аналогичные выражения справедливы для $!$ и $(\quad)!$. Рассмотрим отдельно выражение $\hat{\ } e^{x}$, которое перепишем с учетом соотношений (2):

$$\hat{\ } e^{x} \qquad {}_j^{\,j}\ {}_i^{\,i}\dots{}_r^{\,r}\, e^{{}_1x_1}e^{{}_2x_2}\dots e^{{}_nx_n} \qquad {}_j^{\,j}\ {}_i^{\,i}\dots{}_r^{\,r}\, e^{{}_1x_1}e^{{}_2x_2}\dots e^{{}_nx_n} \qquad e^{x}, \qquad (8)$$

где ${}_j^{\,j}\ {}_i^{\,i}\dots{}_r^{\,r}$.

Подставим выражение (8) в равенство (6), а так же полученное выражение в равенство (1), получим следующее уравнение:

$$\sum_{|\,|\,m} p \qquad e^{x}\hat{\ } \quad \tilde{u}(x) \quad e^{x}\tilde{f}(x). \qquad (9)$$

В последнем выражении можно вынести за знак суммы множитель e^{x}, так как этот множитель не зависит ни от, ни от, а находится в качестве множителя в каждом члене равенства (9). Поэтому обе части равенства (9) можно сократить на e^{x}. В результате получим

$$\sum_{|\,|\,m} p \qquad \hat{\ } \quad \tilde{u}(x) \quad \tilde{f}(x) \qquad (10)$$

или

$$\tilde{P}(\hat{\ })\tilde{u}(x) \quad \tilde{f}(x), \qquad (11)$$

где

$$\tilde{P}(\hat{\ }) \qquad \sum_{|\,|\,m} p \qquad \hat{\ } \qquad . \qquad (12)$$

Отсюда видно, что

$$\tilde{P}(\hat{\ }) \quad 0. \qquad (13)$$

Поэтому дифференциальный оператор $\tilde{P}(\hat{\ })$ по теореме Мальгранжа-Эренпрайса имеет фундаментальное решение в **Д**, которое находим из равенства [11]

$$\tilde{P}(\hat{\ })\ (x)\quad (x), \qquad (14)$$

где (x) – фундаментальное решение Д; (x) – многомерная дельта-функция. Имея фундамен

решение (x) оператора $\tilde{P}(\hat{\ })$, можно найти решение уравнения (11) [11]:

$$\tilde{u}(x)\quad (x)\ \ \tilde{f}(x), \qquad (15)$$

где – означает операцию свертки обобщенных функций $\tilde{f}(x)$ и (x) Д, для т

свертка существует Д. Например, если $\tilde{f}(x)$ и где – совокупность обобщенных
компактным носителем в R^n [11], то свертка (15) всегда существует [11]. В это
уравнения (1) с правой частью вида (3) существует $u(x)$ Д. Таким образом (5) ... доказано, что свойство консервативности экспофункций ... для случая
уравнений частных производных с постоянными коэффициента
(1) является многомерной экспофункцией, то и решение урав
экспофункцией с тем же экспоненциальным множителем.

При наличии системы линейных неоднородных дифференц
производных с постоянными коэффициентами свойство консерва
сохраняется, т.е. если вектор-функция правых частей системы имеет форму, подобную (3), г

$\tilde{f}(x)$ – векторы-столбцы; e^{x} – скалярный экспоненциальный множител

уравнения имеет форму, подобную (5), где $a(x)$, $\tilde{u}(x)$ – соответствующие векторы-столбцы. В
легко убедиться, проведя рассуждения, данные выше, для кажд

получим систему уравнений относительно $\tilde{u}(x)$ и $\tilde{f}(x)$, подобную (11). При ... функций
доказательство существования решения полученной системы уравн
результат подобен доказательству существования решения системы
уравнений с помощью матричного невырожденного параметра [13] ... год
или в случае соответствия матричного дифференциального о
многомерной аналоговой цепи [13-15].

2. Уравнения Максвелла при произвольном возбуждении. Рассмотрим однородную изотропную покоящуюся среду, в которой электромагнитное поле возбуждает
описываемым многомерной объемной плотностью тока проводимости

$$\bar{j}^{\text{ст}}(x,t)\quad e^{\ t}\,\tilde{\bar{j}}^{\text{ст}}(x,t), \qquad (16)$$

где $0;\ x\ \ (x_1,x_2,x_3)$; $t, x_i\ (i\ \ \overline{1,3})\ \ R$ – множество всех вещественных

$\tilde{j}_i^{\text{ст}}(x,t)\ (i\ \ \overline{1,3})$ Д – проекции вектора $\tilde{\bar{j}}^{\text{ст}}(x,t)$. Здесь x_1, x_2, x_3 – пространственные пер

декартовой системы координат; t – время протекания процесса возбуждения. $\tilde{j}^{\text{ст}}(x,t)\ \ 0$

Электромагнитное поле в рассматриваемой среде характеризуется [3] век

напряженности электрического поля E, напряженности магнитного поля H, электрической

индукции $\bar{D}$, магнитной индукции $\bar{B}$ и объемной плотности тока $\bar{j}$, которые между
собой связаны материальными уравнениями [3, 4]. Для данной сре
векторно-матричной форме имеют вид:

$$D\quad {}_aE, \qquad (17)$$

$$B\quad {}_aH, \qquad (18)$$

$$j\quad E, \qquad (19)$$

где $_a$, $_a$, R – абсолютная диэлектрическая проницаемость ср

проницаемость среды, удельная проводимость среды; E, H, D, B, j – матрицы-столбцы
столбцы размером 1 × 3 соответствующих векторов.

Первое и второе симметричные уравнения Максвелла в диф
записанные совместно, с применением операций векторного анал
учетом равенств (17) – (19) можно представить в виде одного матричного

$$(\quad _a \ _0)I \qquad E \qquad j^{ñò},$$
$$_a \ _0 I \quad H \qquad 0 \qquad (20)$$

где $_0 \ / t$; I – единичная матрица третьего порядка; $j^{ст}$ – матрица-столбец, соответствующая вектору $\bar{j}^{ñò}(x,t)$; 0 – нулевая матрица-столбец размера 3 1;

$$\begin{matrix} 0 & _3 & _2 \\ _3 & 0 & _1 \\ _2 & _1 & 0 \end{matrix} \qquad (21)$$

$$. \qquad (22)$$

Здесь и в дальнейшем штрих означает операцию транспонирования.

В связи с тем, что блок-матрицы $(\ _a \ _0)I$ и $_a \ _0 I$ являются диагональными и выполнено условие (22), то матрица дифференциальных операторов симметрична. Поэтому, если указанную матрицу отождествить с многомерной одной цепью [13–15], то для нее можно построить многомерную … методом, предложенным в [1]. Следовательно, на основании доказанной консервативности функций, если матрица-столбец $j^{ст}$ соответствует вектору (16), то возникает функция [5], т.е. матрицы E, H имеют вид:

$$E \quad e^{\ t}\tilde{E}(x,t), \qquad (23)$$

$$H \quad e^{\ t}\tilde{H}(x,t), \qquad (24)$$

где $\tilde{E}(x,t)$, $\tilde{H}(x,t)$ – матрицы-столбцы размера 3 1.

Подставим равенства (16), (23) и (24) в (20), вынесем множитель $e^{\ t}$ за знак матриц и сократим обе части равенства на указанный множитель. Получим равенство:

$$(\quad _a \quad _a \ _0)I \qquad \tilde{E}(x,t) \qquad \tilde{j}^{cò}(x,t)$$
$$(\quad _a \quad _a \ _0)I \quad \tilde{H}(x,t) \qquad 0 \qquad (25)$$

Умножим обе части равенства (25) слева на матрицу:

$$0 \qquad , \qquad 0 \qquad (26)$$

где – матрица-столбец размера 3 1, дифференциальных операторов $_1$, $_2$, $_3$, и учтем тождества [...]

$$0, \qquad (27)$$

$$0. \qquad (28)$$

После несложных преобразований получим два уравнения относительно неизвестных $\tilde{E}(x,t)$ и $\tilde{H}(x,t)$:

$$(\quad _a \quad _a \ _0) \ \tilde{E}(x,t) \qquad \tilde{j}^{cò}(x,t), \qquad (29)$$

$$(\quad _a \quad _a \ _0) \ \tilde{H}(x,t) \quad 0, \qquad (30)$$

которые найдены из первого и второго уравнений системы (25) соответственно.

Так как $\tilde{j}_i^{ñò}(x,t)(i \ \overline{1,3})$ **Д**, то функция $\tilde{j}_i^{ñò}(x,t)$ **Д** [12]. Поэтому по теореме Мальгранжа–Эренпрайса решение неоднородного уравнения (29) в виде:

$$\tilde{E}(x,t) \qquad (x,t) \quad \tilde{j}^{ñò}(x,t), \qquad (31)$$

где (x,t) – фундаментальное решение оператора $(\ _a \ _a \ _0)$; существует, например, $\tilde{j}^{ñò}(x,t)$, так как $\tilde{j}^{ñò}(x,t)$ в силу включения $\mathrm{supp}\ \hat{f} \quad \mathrm{supp}\ f$ [11], где supp – обозначает носитель f. Умножим обе части (31) на $e^{\ t}$ и учтем условие (23):

$$E \quad (\ (x,t) \quad \tilde{j}^{ñò}(x,t))e^{\ t} \ / \ _a , \qquad (32)$$

где – объемная плотность электрического заряда. Уравнени[е]
Максвелла. Таким образом, третье уравнение Максвелла является следствием перво[го]
Максвелла при произвольных возбуждениях электромагнитного
покоящейся среде.

Теперь продолжим решение второго уравнения Максвелла.
дифференциального уравнения (31) [12] найдем

$$\tilde{H}(x,t) \quad Ae^{\ t} , \qquad (33)$$

где A – постоянная величина. Эту величину можно определить, $t=0$:

$$A \quad \tilde{H}(x,0) . \qquad (34)$$

Подставив величину (34) в равенство (33), умножим обе части на e^{t} и получи[м]
учтем условие (24):

$$H \quad \tilde{H}(x,0) \quad / \ _a , \qquad (35)$$

где – объемная плотность магнитного потока (заряда). Интеграл
t, поэтому используем значение при $t=0$. Эта величина найдена в [6], которая в обознач[ениях]
данной работы имеет вид:

$$_0 \quad (\ ) \frac{_a}{|\quad _a|} \frac{\sqrt{\tilde{H}_1^2(x,0) \quad \tilde{H}_2^2(x,0) \quad \tilde{H}_3^2(x,0)}}{\sqrt{\tilde{E}_1^2(x,0) \quad \tilde{E}_2^2(x,0) \quad \tilde{E}_3^3(x,0)}} \Big| \ _a \quad \tilde{E}(x,0) \Big| , \qquad (36)$$

где $\tilde{H}_i(x,0), \tilde{E}_i(x,0) (i \quad \overline{1,3})$ – i-е проекции векторов $\tilde{H}(x,t), \tilde{E}(x,t)$ соответственно, при $t=0$; ( ) – знак, который не зависит от в множителе e^{t} 0. Подставив выраже[ние]
(36) в уравнение (35), окончательно получим:

$$H \quad (\ ) \frac{}{|\quad _a|} \frac{\sqrt{\tilde{H}_1^2(x,0) \quad \tilde{H}_2^2(x,0) \quad \tilde{H}_3^2(x,0)}}{\sqrt{\tilde{E}_1^2(x,0) \quad \tilde{E}_2^2(x,0) \quad \tilde{E}_3^2(x,0)}} \Big| \ _a \quad \tilde{E}(x,0) \Big| \quad / \ _a . \qquad (37)$$

Равенство (37) определяет истоки $\overline{H}$ рассматриваемого поля. В случ[ае] 0
имеет вид:

$$H \quad 0 . \qquad (38)$$

Уравнение (38) совпадает с четвертым уравнением Максвелла, а ра[...]
четвертым уравнением Максвелла [18]. Таким образом, четвертое уравнение Максве[лла]
следствием второго уравнения Максвелла при произвольных воз[буждениях]
однородной изотропной покоящейся среде.

В заключение отметим, что проведенные исследования [...]

Утверждение. При построении по аксиоматическому принципу
электродинамики линейных однородных изотропных покоящихся сре[д]
достаточно положить в ее основу два постулата: первое и второе

Литература

1. **Зелях Э.В.** Основы общей теории линейных электрических схем. – М.: АН СССР, 1951. – 336 с.
2. **Никольский В.В., Никольская Т.И.** Электродинамика и распространение радиоволн: Учебн. пособие для вузов. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1989. – 554 с.
3. **Зоммерфельд А.** Электродинамика. – М.: ИЛ, 1958. – 501 с.
4. **Вольман В.И., Пименов Ю.В.** Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971. – 488 с.
5. **Иваницкий А.М.** Экспофункционалы // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2001. – № 1. – С. 18-21.
6. **Иваницкий А.М.** Электрический заряд и магнитный поток экспофункционалы // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – № 1. – С. 3-8.
7. **Иваницкий А.М.** Реактивные элементы при экспофункциональных воздействиях // Информатика и связь: Сб. научн. тр. Укр. гос. академии связи им. А.С. Попова. – 1996. – С. 236-240.
8. **Комеч А.И.** Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Итоги науки и техн. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М., 1988. – Т. 31. – С. 127-261.
9. **Иваницкий А.М.** Комплексные изоморфные экспоненты. – Одесса: ОЭИС. – 1993. – 15 с. – Рус. – Деп. в ЦНТИ «Информсвязь» 06.04.93. – № 1961-св.
10. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики: В 5 т. – М.: ГИФМЛ. – М., 1961. – Т. 1. – 480 с.

11. ***Владимиров В.С.*** Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
12. ***Шилов Г.Е.*** Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
13. ***Иваницкий А.М.*** Свойство дифференциальных операторов многомерных электрических цепей // Информатика и связь: Сб. науч. тр. Укр. гос. академии связи им. А.С. Попова. – Одесса, 1998. – С. 37-41.
14. *Ivanitzki A.M.* General Principle of Duality in Multidimensional Electric Circuits // Engineering Simulation. – 2000. – Vol. 18. – P. 39-50.
15. ***Иваницкий А.М.*** Основы теории многомерных аналоговых и дискретных цепей: Учебное пособие. – Одесса: ОНАС, 2003. – 38 с.
16. ***Иваницкий А.М.*** Принцип дуальности в электродинамике // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2000. – № 3. – С. 29-35.
17. ***Иваницкий А.М.*** Матрицы с векторными элементами // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2002. – № 1. – С. 19-25.
18. ***Поиски монополя Дирака*** / Е. Амальди, Г. Барони, Х. Брандер, М. Карвальо, Л. Хоффман, А. Манфреди, Т. Вандерхаге // Монополь Дирака. – М.: Мир, 1970. – С. 112-237.