УДК 621.391.83

Михальчан В.С.
Mykhalchan V.S.

НЕЯВНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

IMPLICIT ITERATIVE METHOD ADAPTIVE SIGNAL PROCESSING

Аннотация. В статье предложен итерационный метод настройки нерекурсивных фильтров, используемых при адаптивной обработке сигналов в условиях межсимвольной интерференции, отличный от известных итерационных методов тем, что минимум среднеквадратичной ошибки не определяется явно последовательностью точек, сходящихся к решению, а через значения двух вспомогательных последовательностей точек, каждая из которых сходится к соответствующей вершине *наименьшей оси одного из гиперэллипсоидов, который принадлежит функционалу.*

Summary. In this article the iterative method of nonrecursive filters tuning used at adaptive signal processing in conditions of an intersymbol interference, distinct from known iterative methods by is offered that the minimum of a MSE is not defined explicitly by polymarker converging to a solution, and through values of two auxiliary polymarkers, each of which converges to appropriate top of the least axis of one of hyperellipsoids, which belongs to a functional.

Для настройки нерекурсивных фильтров при адаптивной обработке сигналов [1, 2] наиболее часто применяется метод скорейшего спуска, который хорошо работает только на первых этапах поиска минимума заданного функционала [1-3]. Это связано с тем, что в окрестности точки минимума функционала норма вектора градиента близка к нулю, и любой итерационный метод становится очень чувствительным к неизбежным погрешностям вычислений [2,3], особенно в условиях шума. Поэтому вблизи точки минимума пользуются более точными и более трудоемкими методами [3]. В предложенном методе отсутствует указанный недостаток, вычислительный алгоритм прост для реализации.

Математическая модель и постановка задачи. Рассмотрим режим настройки нерекурсивного адаптивного фильтра по периодической последовательности одиночных сигналов, следующих через интервал, превышающий длительность отклика канала, что позволяет получить статистическую независимость на каждой итерации поиска минимума среднеквадратической ошибки (СКО):

$$\varepsilon(\varphi)=E\left[\varepsilon_N(\varphi)\right]=E\left[\sum_k\left(a_k-d_k\right)^2\right]=E\left[\sum_k r_k^2\right], \tag{1}$$

где $r_k=a_k-d_k$ – отсчеты сигнала ошибки, т.е. отклонение отсчетов сигнала a_k на выходе фильтра от отсчетов требуемого сигнала d_k $(k=-2N,...,2N)$; $E(\cdot)$ – математическое ожидание.

Отсчетные значения сигнала a_l связаны с отсчетными значениями x_i на входе фильтра через значения регулируемых весовых параметров φ_i фильтра соотношением свертки:

$$a_k=\sum_i x_{k-i}\varphi_i\,,\ i=-N,...,N\,;\ k=-2N,...,2N\,. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\varepsilon(\varphi)=\sum_i\varphi_i\sum_j\varphi_j\sum_k x_{k-i}x_{k-j}-2\sum_j\varphi_j\sum_k x_{k-i}d_k+E\left[\sum_k d_k^2\right]=$$
$$=\left(\varphi,A^TA\varphi\right)-2\left(\varphi,A^Td\right)+E\left[\sum_k d_k^2\right], \tag{3}$$

здесь и далее A – матрица, составленная из отсчетов x_i тестового сигнала на входе фильтра, размером $(2N+1)\times(4N+1)$; A^TA – корреляционная матрица входного сигнала, размером $(2N+1)\times(2N+1)$; φ – вектор неизвестных, составленный из значений регулируемых весовых параметров φ_i фильтра; $(\cdot)$ – знак скалярного произведения; T – знак транспонирования.

Продифференцируем выражение (3) по параметрам φ_i и, приравняв нулю результат, получим

$$\sum_k x_{k-i} \sum_i x_{k-i}\varphi_i = \sum_k x_{k-i} d_k \,, \tag{4}$$

или, в матричном виде

$$A^T A\varphi = b \,, \tag{5}$$

где $b = A^T d$ – известный вектор эталонного сигнала, размером $1\times\left(2N+1\right)$.

Из формулы (4) получаем компоненты вектора градиента функционала (3):

$$g_i = \sum_k x_{k-j} \sum_i x_{k-i} d_k = \sum_k x_{k-i} r_k \,.$$

Из выражения (5) получаем вектор градиент

$$\mathrm{grad}\ \varepsilon\left(\varphi\right) = g = A^T A\varphi - b \,.$$

Цель адаптации заключается в нахождении такого набора регулируемых весовых параметров $\tilde{\varphi}_i$ фильтра, который в каждый момент обеспечил бы наиболее близкое соответствие между сигналом на выходе адаптивного фильтра и требуемым (эталонным) сигналом, а для этого необходимо решить уравнение (5).

Задача решения уравнения (5) эквивалентна задаче поиска минимума функционала (3). Известно, что геометрический смысл любого итерационного метода состоит в том, что для минимизации заданного квадратичного функционала необходимо отыскать центр семейства подобных гиперэллипсоидов, координаты которого и есть решение заданной системы (5).

Описание итерационного метода адаптации. Рассмотрим итерационный процесс [4], который состоит в том, что из произвольной точки, принадлежащей одному из гиперэллипсоидов минимизируемого функционала (3), и которой соответствует определенное значение СКО, начинаем движение в направлении, противоположном вектору градиента до тех пор, пока не достигнем точки пересечения с этим же гиперэллипсоидом. Получим координаты новой точки с таким же значением СКО, как и в предыдущей точке. Затем процесс повторяется. В результате получаются две вспомогательные последовательности точек, находящихся на одном гиперэллипсоиде, при этом каждая из вспомогательных последовательностей по своей «орбите» сходится к одной из двух вершин наименьшей оси данного гиперэллипсоида. Определив координаты обеих вершин гиперэллипсоида с заданной точностью, вычисляют координаты его центра, т.е. получают решение системы (5).

Пусть $\varphi^{(0)}$ – произвольный начальный вектор, составленный из начальных значений регулируемых весовых параметров адаптивного фильтра, для которого вектор градиент $g^{(0)} = A^T A\varphi^{(0)} - b$. Первое приближение к искомому решению φ^* будем искать в виде

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_i^{(0)} - \alpha^{(0)} \sum_k x_{k-i} r_k = \varphi_i^{(0)} - \alpha^{(0)} g_i^{(0)} ,$$

где $\alpha^{(0)}$ – скалярный параметр, пока произвольный.

Подставляя последнее выражение в (2), затем полученную формулу в (1), получим

$$\varepsilon\left[\varphi^{(1)}\right] = \sum_k r_k^{(1)2} = \sum_k r_k^{(0)2} - 2\alpha^{(0)} \sum_k r_k^{(0)} f_k^{(0)} + \alpha^{(0)2} \sum_k f_k^{(0)2} \,, \tag{6}$$

где

$$f_k^{(0)} = \sum_i x_{k-i} g_i^{(0)} \,.$$

Так как последовательные приближения строятся таким образом, что $F = \varepsilon\left[\varphi^{(0)}\right] = \varepsilon\left[\varphi^{(1)}\right] = \ldots = \varepsilon\left[\varphi^{(k)}\right] = \varepsilon\left[\varphi^{(k+1)}\right]$, то, непосредственно по формуле (6), исходя из условия $\sum_k r_k^{(0)2} = \sum_k r_k^{(1)2}$, определим $\alpha^{(0)}$:

$$\alpha^{(0)} = \frac{2\sum_k r_k^{(0)} f_k^{(0)}}{\sum_k f_k^{(0)2}} = \frac{2\left(A^T r_k^{(0)}, A^T r_k^{(0)}\right)}{\left(A^T r_k^{(0)}, A^T A A^T r_k^{(0)}\right)} . \tag{7}$$

Пользуясь описанной методикой, построим итерационный процесс, в котором переход от k-го приближения $\varphi^{(k)}$ к $k+1$-му приближению $\varphi^{(k+1)}$ производится по формуле:

$$\varphi^{(k+1)} = L\varphi^{(k)} = \varphi^{(k)} - 2\frac{\left(A^T r^{(k)}, A^T r^{(k)}\right)}{\left(A^T r^{(k)}, A^T A A^T r^{(k)}\right)} A^T r^{(k)}, \tag{8}$$

где $g^{(k)} = A^T A\varphi^{(k)} - b = A^T r^{(k)}$ – вектор градиент функционала (3) в точке с координатами $\varphi^{(k)}$; L – оператор, который является однородным и непрерывным.

Квадратичный функционал (3), после ряда преобразований, и без учета постоянных составляющих, можно представить в следующем виде

$$\overline{\varepsilon}(\varphi) = \left(A^T A\varphi - b, \varphi - \left(A^T A\right)^{-1} b\right). \tag{9}$$

Последовательные векторы градиента связаны рекуррентным соотношением:

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} - 2\frac{\left(A^T r^{(k)}, A^T r^{(k)}\right)}{\left(A^T r^{(k)}, A^T A A^T r^{(k)}\right)} A^T A A^T r^{(k)}. \tag{10}$$

Доказательство сходимости итерационного метода адаптации. Обозначим через $e_1, e_2, ..., e_{2N+1}$ полную ортонормированную систему собственных векторов матрицы $A^T A$, соответствующих собственным числам $m = \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_{2N+1} = M$, и пусть $g^{(0)} = A^T r^{(0)} = \sum_{i=1}^{2N+1} c_i^{(0)} e_1$, а $A^T A g^{(0)} = \sum_{i=1}^{2N+1} c_i^{(0)} \lambda_i e_i$, где $c_i^{(0)}$ – коэффициенты при соответствующих векторах e_i. Пусть далее вектор $g^{(0)}$ лежит в плоскости, натянутой на собственные векторы e_1 и e_{2N+1} матрицы $A^T A$, при этом вектор $g^{(0)}$ расположен под углом 45^0 к указанным собственным векторам e_1 и e_{2N+1}, т.е.

$$c_1^{(0)} = c_{2N+1}^{(0)} = c^{(0)} = c, \qquad c_2^{(0)} = c_3^{(0)} = ... = c_{2N}^{(0)} = 0. \tag{11}$$

Имеет место следующая лемма.

***Лемма* 1.** Если вектор градиент $g^{(k)} = \sum_{i=1}^{2N+1} c_i^{(k)} e_i$ не является собственным вектором матрицы $A^T A$, и $c_{2N+1}(k) \neq 0$, то:

а) коэффициент $c_{2N+1}^{(k)}$ при собственном векторе e_{2N+1} по абсолютной величине монотонно возрастает в процессе настройки адаптивного фильтра, т.е. $\left|c_{2N+1}^{(k+1)}\right| > \left|c_{2N+1}^{(k)}\right|$;

б) последовательные коэффициенты $c_{2N+1}^{(k+1)}$ и $c_{2N+1}^{(k)}$ противоположны по знаку, т.е.

$$\operatorname{sign} c_{2N+1}^{(k+1)} = -\operatorname{sign} c_{2N+1}^{(k)};$$

в) последовательные коэффициенты $c_{2N+1}^{(k+1)}$ и $c_{2N+1}^{(k)}$ связаны соотношением

$$c_{2N+1}^{(k+1)} \geq \left[\frac{(m-2M)\beta_k^2 - M}{M + m\beta_k^2}\right] c_{2N+1}^{(k)},$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_{k+1} = c_1^{(k)} / c_{2N+1}^{(k)} = \beta_k \dfrac{M - m\left(\beta_k^2 + 2\right)}{(m-2M)\beta_k^2 - M}$.

г) последовательные коэффициенты $c_1^{(k+1)}$ и $c_1^{(k)}$ связаны соотношением

$$c_1^{(k+1)} \leq \left[\frac{M - m\left(\beta_k^2 + 2\right)}{M + m\beta_k^2}\right] c_1^{(k)}.$$

Доказательство. Из формулы (10) имеем:

$$g^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{2N+1} c_i^k \left(1 - 2 \frac{\sum_{j=1}^{2N+1} c_j^{(k)2}}{\sum_{j=1}^{2N+1} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} c_j^{(k)2}} \right) e_i = \sum_{i=1}^{2N+1} c_i^{(k+1)} e_i \,.$$

Отсюда коэффициент $c_{2N+1}^{(k+1)}$ при собственном векторе e_{2N+1}, равный

$$c_{2N+1}^{(k+1)} = c_{2N+1}^{(k)} \left(1 - 2 \frac{\sum_{j}^{2N+1} c_j^{(k)2}}{\sum_{j=1}^{2N+1} \frac{\lambda_j}{M} c_j^{(k)2}} \right), \tag{12}$$

по абсолютной величине монотонно возрастает на каждом шаге итерационного процесса, так как $\sum_{j}^{2N+1} c_j^{(k)2} \Big/ \sum_{j=1}^{2N+1} \frac{\lambda_j}{M} c_j^{(k)2} \geq 1$ и, очевидно, что выражение в скобках соотношения (12) по абсолютной величине всегда больше единицы, если вектор $g^{(k)}$ не является собственным вектором матрицы $A^T A$. Из (12) видно, что $\operatorname{sign} c_{2N+1}^{(k+1)} = -\operatorname{sign} c_{2N+1}^{(k)}$.

Оценим снизу вычитаемое в правой части соотношения (12). С учетом условий (11), имеем

$g^{(0)} = c_1^{(0)} e_1 + c_{2N+1}^{(0)} c_{2N+1} = c e_1 + c e_{2N+1}$, $\quad A^T A g^{(0)} = c_1^{(0)} \lambda_1 e_1 + c_{2N+1}^{(0)} \lambda_{2N+1} e_{2N+1} = c m e_1 + c M e_{2N+1}$.

Следовательно,

$$\frac{\sum_{j=1}^{2N+1} c_j^{(0)2}}{\sum_{j=1}^{2N+1} \frac{\lambda_j}{M} c_j^{(0)2}} \geq \frac{c^2 + c^2}{\frac{m}{M} c^2 + \frac{M}{M} c^2} = \frac{2M}{M+m} > 1 ,$$

и соотношение (12) принимает следующий вид

$$c_{2N+1}^{(1)} \geq c_{2N+1}^{(0)} \left(1 - \frac{4M}{M+m} \right) = c \frac{m - 3M}{M+m} , \tag{13}$$

откуда, очевидно $\left| \frac{m-3M}{M+m} \right| > 1$.

Аналогично, получаем

$$c_1^{(1)} \leq c_1^{(0)} \left(1 - \frac{4m}{M+m} \right) = c \frac{M - 3m}{M+m} , \tag{14}$$

откуда

$$\left| \frac{M-3m}{M+m} \right| < 1 .$$

Тогда, вектор градиент в точке $\varphi^{(1)}$ равен

$$g^{(1)} = c_1^{(1)} e_1 + c_{2N+1}^{(1)} e_{2N+1} = c^{(0)} \frac{M-3m}{M+m} e_1 + c^{(0)} \frac{m-3M}{M+m} e_{2N+1} . \tag{15}$$

Можно показать, что получена нижняя оценка изменения значений $c_{2N+1}^{(k)}$ и $c_1^{(k)}$, которая действительна только при выполнении условий (11), т.е. любое их изменение приводит к ускорению сходимости итерационного процесса.

Из соотношений (13) и (14) также очевидно $\left| c_{2N+1}^{(1)} \right| > \left| c_{2N+1}^{(0)} \right|$ и, кроме того, $\left| c_1^{(1)} \right| < \left| c_1^{(0)} \right|$.

Положим

$$\beta_0 = \frac{c_1^{(0)}}{c_{2N+1}^{(0)}} = 1 ; \quad \beta_1 = \frac{c_1^{(1)}}{c_{2N+1}^{(1)}} = \frac{M - 3m}{m - 3M} .$$

Подставляя полученные значения $c_1^{(1)}$ и $c_{2N+1}^{(1)}$ из (13) и (14) в (12), с учетом последних соотношений, имеем

$$c_{2N+1}^{(2)} \geq c^{(0)} \frac{(m-3M)}{(m+M)} \cdot \frac{\left[(m-2M)\beta_1^2 - M\right]}{\left(M+m\beta_1^2\right)} =$$

$$= c\frac{\left[(m-2M)\beta_0^2 - M\right]}{\left(M+m\beta_0^2\right)} \cdot \frac{\left[(m-2M)\beta_1^2 - M\right]}{\left(M+m\beta_1^2\right)} = c_{2N+1}^{(1)} \frac{\left[(m-2M)\beta_1^2 - M\right]}{\left(M+m\beta_1^2\right)},$$

и далее, на основе метода индукции, получаем выражение общего вида

$$c_{2N+1}^{(k+1)} \geq c_{2N+1}^{(k)} \frac{\left[(m-2M)\beta_k^2 - M\right]}{\left(M+m\beta_k^2\right)}, \qquad \beta_k = c_1^{(k)} \big/ c_{2N+1}^{(k)}.$$

Следовательно,

$$c_{2N+1}^{(k+1)} \geq c^{(0)} \prod_{k=0}^{k} \frac{\left[(m-2M)\beta_k^2 - M\right]}{\left(M+m\beta_k^2\right)}, \;\; \beta_{k+1} = \frac{M - m\left(\beta_k^2+2\right)}{(m-2M)\beta_k^2 - M} \cdot \beta_k.$$

Аналогично получаем

$$c_1^{(k+1)} \leq c_1^{(k)} \frac{\left[M - m\left(\beta_k^2+2\right)\right]}{\left(M+m\beta_k^2\right)},$$

и, очевидно

$$c_1^{(k+1)} \leq c^{(0)} \prod_{k=0}^{k} \frac{\left[M - m\left(\beta_k^2+2\right)\right]}{\left(M+m\beta_k^2\right)}.$$

Лемма доказана.

Следствие. Если последовательность $g^{(k)}$ стремится к некоторому собственному вектору матрицы $A^T A$, то ее пределом $\bar{g}$ может быть только вектор, пропорциональный вектору e_{2N+1}. Кроме того, так как $\operatorname{sign} c_{2N+1}^{(k+1)} = -\operatorname{sign} c_{2N+1}^{(k)}$, то таких предельных элементов должно быть два, и отличаться они должны только знаками, и к ним сходятся, соответственно, последовательности вектора градиента четных и нечетных приближений.

***Лемма* 2**. Если вектор градиент $g^{(k)}$ не является собственным вектором матрицы $A^T A$, то:

$$\text{а) } \left\|L\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\| = \left\|\varphi^{(k+1)} - \varphi^*\right\| < \left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\|; \tag{16}$$

$$\text{б) } \left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\|^2 - \left\|\varphi^{(k+1)} - \varphi^*\right\| \leq 4c_{2N+1}^{(k)2} \frac{\beta_k^2\left(1+\beta_k^2\right)(M-m)^2}{\left(M+m\beta_k^2\right)^2}. \tag{17}$$

Доказательство. Из формулы (8) имеем

$$\varphi^{(k+1)} - \varphi^* = \varphi^{(k)} - \varphi^* - 2\frac{\left(g^{(k)}, g^{(k)}\right)}{\left(g^{(k)}, A^T A g^{(k)}\right)} g^{(k)}, \tag{18}$$

учитывая, что

$$b = A^T A\varphi^* \text{ и } g^{(k)} = A^T A\varphi^{(k)} - b = A^T A\varphi^{(k)} - A^T A\varphi^*,$$

и применяя преобразование $\left(A^T A\right)^{-1}$ к обеим частям последнего равенства, получим соотношение

$$\varphi^{(k)} - \varphi^* = \left(A^T A\right)^{-1} g^{(k)},$$

подставляя в (18), получим

$$\left\|\varphi^{(k+1)} - \varphi^*\right\|^2 - \left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\|^2 = -4\frac{\left(g^{(k)}, g^{(k)}\right)}{\left(g^{(k)}, A^T A g^{(k)}\right)^2}\left[\left(g^{(k)}, A^T A g^{(k)}\right)\left(g^{(k)}, \left(A^T A\right)^{-1} g^{(k)}\right) - \left(g^{(k)}, g^{(k)}\right)\right]. \tag{19}$$

Так как $g^{(k)}$ не является собственным вектором матрицы $A^T A$, то в силу неравенства Буняковского

$$\left(g^{(k)}, A^T A g^{(k)}\right)\left(g^{(k)}, \left(A^T A\right)^{-1} g^{(k)}\right) - \left(g^{(k)}, g^{(k)}\right)^2 > 0,$$

откуда следует первое утверждение леммы.

Оценим снизу правую часть выражения (19). Применяя условия (11), получим:

$$\left\|\varphi^{(0)} - \varphi^*\right\|^2 = \left(\left(A^T A\right)^{-1} g^{(0)}, \left(A^T A\right)^{-1} g^{(0)}\right) \geq c^2 \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{M^2}\right) = c^2 \frac{m^2 + M^2}{m^2 M^2}. \quad (20)$$

Далее, имеем

$$\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^*\right\|^2 = \left\|\varphi^{(0)} - 2\alpha^{(0)} g^{(0)} - \varphi^*\right\|^2 = \left\|\left(A^T A\right)^{-1} g^{(0)} - 2\alpha^{(0)} g^{(0)}\right\|^2 =$$

$$= \left\|\varphi^{(0)} - \varphi^*\right\|^2 - 4\frac{\left(g^{(0)}, g^{(0)}\right)}{\left(g^{(0)}, A g^{(0)}\right)^2}\left[\left(g^{(0)}, \left(A^T A\right)^{-1} g^{(0)}\right)\left(g^{(0)}, A^T A g^{(0)}\right) - \left(g^{(0)}, g^{(0)}\right)^2\right],$$

или после преобразований получим

$$\left\|\varphi^{(0)} - \varphi^*\right\|^2 - \left\|\varphi^{(1)} - \varphi^*\right\|^2 \leq 4c^2 \frac{2\left(M - m\right)^2}{mM\left(M + m\right)^2}.$$

Аналогично определим

$$\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^*\right\|^2 - \left\|\varphi^{(2)} - \varphi^*\right\|^2 \leq 4c_{2N+1}^{(1)2} \frac{\beta_1^2\left(1 + \beta_1^2\right)\left(M - m\right)^2}{mM\left(M + m\beta_1^2\right)^2}.$$

Используя метод индукции, получаем неравенство общего вида:

$$\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\| - \left\|\varphi^{(k+1)} - \varphi^*\right\|^2 \leq 4c_{2N+1}^{(k)2} \frac{\beta_k^2\left(1 + \beta_k^2\right)\left(M - m\right)^2}{mM\left(M + m\beta_k^2\right)^2}.$$

Лемма доказана.

Из последнего соотношения видно, что при $k \to \infty$, так как $\beta_k \to 0$,

$$\lim\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\|^2 = \overline{c}_{2N+1}^2 \frac{1}{M^2}. \quad (21)$$

Напомним, что последовательные приближения строились таким образом, что $\overline{\varepsilon}\left[\varphi^{(0)}\right] = \ldots = \overline{\varepsilon}\left[\varphi^{(k)}\right] = F$. Вычислим значение функционала (9) в точке $\varphi^{(0)}$:

$$\overline{\varepsilon}\left[\varphi^{(0)}\right] = \left(A^T A\varphi^{(0)} - b, \varphi^{(0)} - \varphi^*\right) = \left(g^{(0)}, \left(A^T A\right)^{-1} g^{(0)}\right) = c^2 \frac{M + m}{mM}. \quad (22)$$

С другой стороны,

$$F = \overline{\varepsilon}\left[\varphi^{(k)}\right] = \left(A^T A\varphi^{(k)} - b, \varphi^{(k)} - \varphi^*\right) =$$

$$= \left(A^T A\varphi^{(k)} - A^T A\varphi^*, \varphi^{(k)} - \varphi^*\right) \leq M\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\|^2.$$

Таким образом,

$$\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\|^2 \geq \frac{F}{M},$$

но из (22)

$$F = c^2 \frac{M + m}{mM},$$

следовательно,

$$\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\|^2 \geq \frac{c^2\left(M + m\right)}{mM^2}. \quad (23)$$

Из формул (22) и (23) очевидно

$$\overline{c}_{2N+1}^{(2)} = c^2 \frac{M+m}{m},$$

$$\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\| \geq \pm \frac{c}{M} \sqrt{\frac{M+m}{m}}.$$

Обозначим $d = \left|\frac{c}{M}\sqrt{\frac{M+m}{m}}\right| = \lim\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^*\right\| > 0$. Из результатов леммы 1, а также из неравенств (16), (17) и (23) вытекает существование подпоследовательности $\left\{\varphi^{(k')}\right\}$ последовательности $\left\{\varphi^{(k)}\right\}$, сходящейся к некоторому элементу $\overline{\varphi} \neq \varphi^*$.

Лемма **3**. Всем предельным точкам $\overline{\varphi}$ последовательности $\left\{\varphi^{(k)}\right\}$ соответствуют векторы $\overline{g}$ уравнения (8), являющиеся собственными векторами матрицы $A^T A$.

Доказательство. Пусть $\overline{\varphi}$ – предельная точка последовательности $\left\{\varphi^{(k)}\right\}$. Очевидно

$$\left\|\overline{\varphi} - \varphi^*\right\| = d. \tag{24}$$

Из непрерывности оператора L следует ограниченность, т.е.

$$\lim_{k'\to\infty} \varphi^{(k'+1)} = \lim_{k'\to\infty} L\,\varphi^{(k')} = L\overline{\varphi}$$

и далее

$$\left\|L\overline{\varphi} - \varphi^*\right\| = d. \tag{25}$$

Если бы $\overline{g}$ не являлось собственным вектором матрицы $A^T A$, то равенства (24) и (25) противоречили бы неравенствам, полученным в леммах. Лемма доказана.

Из доказанных положений следует, что существует два различных предела последовательности $\left\{g^{(k)}\right\}$, а значит и последовательности $\left\{\varphi^{(k)}\right\}$. К одному из них сходится последовательность четных, а к другому – нечетных приближений. Будем считать, что

$$\overline{\varphi} = \lim_{k\to\infty} \varphi^{(2k)},\ L\overline{\varphi} = \lim_{k\to\infty} \varphi^{(2k+1)}.$$

Согласно формуле (8) очевидно будет иметь место формула

$$L\overline{\varphi} = \overline{\varphi} - \frac{2}{M}\overline{g}.$$

Положим $\overline{g}/M = e_M$, при этом $e_M = \overline{c}_M e_{2N+1}$, причем коэффициент $\overline{c}_M$ имеет знак $c_{2N+1}^{(0)}$. Тогда

$$L\overline{\varphi} = \overline{\varphi} - 2e_M.$$

Кроме того, так как $\overline{g} = A^T A\varphi - b = Me_m$, учитывая, что $b = A^T A\varphi^*$, имеем

$$\overline{\varphi} = \varphi^* + e_M,$$

и аналогично

$$L\overline{\varphi} = \varphi^* - e_M.$$

Из последних формул получаем

$$\varphi^* = \frac{\overline{\varphi} + L\overline{\varphi}}{2}, \qquad e_M = \frac{\overline{\varphi} - L\overline{\varphi}}{2},$$

т.е. полусумма координат предельных точек дает решение системы (5), а полуразность есть собственный вектор, принадлежащий максимальному собственному числу матрицы $A^T A$.

Алгоритм адаптации. Таким образом, итерационный процесс, описываемый формулой (8) позволяет получить две вспомогательные последовательности четных $\varphi^{(2k)}$ и нечетных $\varphi^{(2k+1)}$ значений. На основе полученных формул, очевидно, что алгоритм вычисления регулируемых весовых параметров нерекурсивного фильтра на каждой итерации описывается формулой

$$\tilde{\varphi}_i^{(k+1)} = \frac{\varphi_i^{(k+1)} + \varphi_i^{(k)}}{2}, \; i = -N, ..., N, \qquad \tilde{\varphi}_i^{(0)} = \varphi_i^{(0)}.$$

Сформулируем основные полученные результаты в виде теоремы.

Теорема. Алгоритм настройки регулируемых весовых параметров нерекурсивного адаптивного фильтра с применением построенного итерационного метода позволяет вычислять две вспомогательные последовательности четных и нечетных точек, каждая из которых сходится монотонно к таким предельным элементам $\overline{\varphi}$ и $L\overline{\varphi}$, соответственно, векторы градиента которых пропорциональны собственному вектору, соответствующему наибольшему собственному числу корреляционной матрицы входного сигнала, при этом регулируемые весовые параметры фильтра, изменяемые в соответствии с алгоритмом

$$\tilde{\varphi}^{(k+1)} = \frac{\varphi^{(k+1)} + \varphi^{(k)}}{2}, \qquad \tilde{\varphi}^{(0)} = \varphi^{(0)}$$

стремятся к значениям φ^*, при которых достигается минимум среднеквадратичной ошибки.

Во всех традиционных итерационных методах адаптации вектор градиент по норме стремится к нулю при приближении к точке решения. Поэтому вычисления элементов вектора градиента в явных методах связано с вычислением разности почти совпадающих чисел, что приводит к большим влияниям на конечный результат, и, соответственно, к уменьшению скорости сходимости.

В предложенном итерационном методе вспомогательный вектор градиент при приближении к решению, т.е. к предельным точкам решения $\overline{\varphi}$ и $L\overline{\varphi}$ не стремится к нулю, а наоборот, увеличивается по норме. В окрестностях точек $\overline{\varphi}$ и $L\overline{\varphi}$ последовательные значения вектора градиента $g^{(k)}$ и $g^{(k+1)}$ равны по норме и отличаются только знаками.

Предложенный метод не чувствителен к неизбежным погрешностям вычислений, даже в том случае, если происходит постепенный уход с «орбиты» исходного гиперэллипсоида (за счет накопления ошибок округления), большого влияния на скорость сходимости не будет. Кроме того, можно периодически производить рестарт, т.е. возвращаться к исходному значению функционала, решая вспомогательное уравнение второго порядка. В этом случае ошибки округления практически не влияют на процесс настройки фильтра.

Можно показать, что по скорости сходимости предложенный метод не уступает методу скорейшего спуска, при этом, в отличие от последнего, применение неявного итерационного метода позволяет сохранить оптимальную теоретическую скорость сходимости, так как она не зависит от чувствительности к погрешностям вычислений.

Литература

1. *Уидроу Б., Стирнз С.* Адаптивная обработка сигналов: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.

2. *Михальчан В.С.* Синтез автоматических и адаптивных алгоритмов настройки нерекурсивных корректоров: Учебн. пособие / Одесский электротехн. ин-т связи им. А.С. Попова. – Одесса, 1989. – 52 с.

3. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.

4. *Костарчук В.Н.* Об одном методе решения систем линейных уравнений и отыскания собственных векторов матрицы // Доклады Академии наук СССР. – 1954. – Т. 98,. – №4. – С.531 – 534.