УДК 621.391:62-503.56

Борщ В.І., Коваль В.В., Костік Б.Я., Туманов Ю.Г.
Borsch V.I., Koval` V.V., Kostik B.Y., Tumanov Yu.G.

ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ШВИДКОДІЄЮ ПЕРІОДИЧНЕ УПРАВЛІННЯ КОЛИВАЛЬНИМ ОБ'ЄКТОМ

OPTIMAL ON SPEED PERIODIC CONTROL OF THE OSCILLATING OBJECT

Анотація. В статті будується оптимальне за швидкодією періодичне управління коливальним об'єктом на основі принципу максимуму акад. Л.С. Понтрягіна.

Виявлені особливості отриманого оптимального алгоритму як функції, яка періодична за фазовою координатою управляючого збудження коливальним об'єктом та виконано порівняльний аналіз з відомими традиційними управліннями.

Summary. In this article the periodic control of the oscillating object is created optimal on speed on the basis of a maximum principle by academician L.S. Pontriagin.

The obtaining features of optimal algorithm periodic in the function of phase coordinate of controlling energizing by the oscillating object are defined and the comparative analysis with known traditional controls is fulfilled.

Постановка проблеми теорії оптимальних управлінь у загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими і практичними завданнями достатньо відомі [1-3]. Наведемо короткий аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано вирішення проблеми створення теорії оптимальних систем, і виділимо невирішені раніше частини загальної проблеми, що являють постановку задачі даної статті. Фундаментальні роботи, які наведені, послідовно використовувались при реалізації об'єктів управління , математичною моделлю яких є лінійні однорідні дифрівняння з постійними параметрами, зі змінними параметрами, з розподіленими параметрами, з запізненнями, з обмеженням фазових координат, дискретними, стохастичними тощо. Були установлені основні факти для лінійних однорідних дифрівнянь з постійними коефіцієнтами, які переносяться на випадок лінійних неоднорідних дифрівнянь із змінними коефіцієнтами; при цьому наведені формулювання отриманих теорем зазначених відповідних змін. Перший доказ принципу максимуму для лінійних управляємих об'єктів дав Р.В.Гамкрелідзе. Він же побудував повну теорію цих об'єктів. Для нелінійних управляних об'єктів множина всіх фазових точок, які утримуються за допомогою допустимих управлінь, не випукла і неосяжна. В загальному нелінійному випадку принцип максимуму доказав В.Г.Болтянський і побудував основи нелінійної теорії оптимального управління. Складено принцип максимуму для неавтономних об'єктів, розроблено дискретний принцип максимуму.

Таким чином, дістані раніше теоретичні передумови і технічний досвід використовувались як методологія пошуку нових рішень оптимальності з урахуванням специфічних особливостей різноманітних об'єктів управління з доказом змін, які необхідно внести при отриманні математичної теорії, що дозволяє їх дослідження.

Об'єктом дослідження даної роботи є зведені пристрої синхронізації з фазовим автопідстроюванням частоти інформаційних мереж й інфраструктур.

Предметом дослідження є математичне визначення й аналіз оптимального за швидкодією періодичного управляючого збудження веденим пристроєм синхронізації.

Інформація про поточний стан об'єкта управління є функція виходу коливального об'єкта управління (КОУ), в якості якої є похибка фаз між сигналом опорного (ведучого) і веденого (величиною, яка управляється) тактовими генераторами. Ведучий тактовий генератор (ВТГ) в вигляді первинного джерела синхронізації (ПДС), звичайно це генератор на основі цезієво-променевої техніки, наприклад, атомний стандарт частоти, що генерує опорний тактовий синхросигнал, який переміщується по лініях зв'язку до задаючого тактового генератора регіональних вузлів синхронізації. Задаючий тактовий генератор, який є ведучим на даному регіональному вузлі, обробляє отриману з лінії зв'язку синхроінформацію і розподіляє її по об'єктах синхронізації вузла синхронізації. Якісні характеристики ВТГ і веденого тактового генератора (ВдТГ) регламентовані міжнародними організаціями (МСЕ-Т, ETSI, ANSI) і національними документами (ДСТУ). Таким чином, величиною, якою управляють веденого пристрою синхронізації, є похибка фаз тактових синхросигналів між ВТГ і ВдТГ.

Фазова похибка об'єкта синхронізації поступає на вхід сервомеханізму (СМ), який виробляє управляюче збудження. Останнє поступає на вхід об'єкта управління і в залежності від величин і знака розладки частот тактових генераторів зводить фазову похибку до мінімального значення. Управляюче збудження знімається з виходу фазового детектора (ФД). На виході ФД напруга визначається його дискримінаційною характеристикою, яка є періодичною функцією фазової похибки, тобто управляюче збудження, яке поступає на об'єкт управління, є періодичним у функції управляної координати об'єкта.

Таким чином, управління веденим пристроєм синхронізації на основі фазового автопідстроювання частоти – коливальним об'єктом з математичної точки зору є періодичним управлінням. Така постановка проблеми відсутня в літературі і потребує її вирішення.

Метою статті є побудова й аналіз оптимального за швидкодією періодичного управління коливальним об'єктом на основі принципу максимуму акад. Л.С.Понтрягіна.

1. Математична модель поведінки коливального об'єкта управління й її еквівалентне перетворення до комбінованого з'єднання типових ланок першого порядку

Загальновідомі представлення математичної моделі поводження коливальної ланки у виді неоднорідного диференціального рівняння другого порядку [4]. Для подальшого розгляду візьмемо одне з них, а саме:

$$T_{\text{ф}} \cdot \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + T_{\text{ПГ}} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = k\, u(t), \tag{1}$$

якому відповідає передатна функція виду:

$$K(p) = \frac{\Phi(p)}{U(p)} = \frac{k}{T_{\text{ф}} p^2 + T_{\text{ПГ}} p + 1}. \tag{2}$$

При виконанні умови:

$$T_{\text{ПГ}}^2 - 4T_{\text{ф}} < 0 \tag{3}$$

корені характеристичного полінома, що відповідають рівнянню (1), будуть комплексно спряженими, а, отже, об'єкт управління буде уявляти собою коливальну ланку.

Поставимо задачу: еквівалентно аналітично перетворити математичну модель коливального об'єкта управління (КОУ) з передатною функцією виду (2) і представити її структуру у вигляді з'єднання типових ланок першого порядку (у досліджуваному випадку у вигляді двох умовних аперіодичних послідовно з'єднаних ланок першого порядку).

З математики відомо, що за наявності комплексно спряжених коренів повний квадратний тричлен неможливо розкласти на дійсні множники першого ступеня. Разом з тим технічну нереалізованість уявності можна компенсувати використанням спеціальних апаратних прийомів: у розглянутому варіанті за допомогою застосування від'ємного жорсткого зворотнього зв'язку.

Розглянемо також математичну модель КОУ наступного виду:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + 2B\frac{d\varphi(t)}{dt} + (B^2 + M^2)\varphi(t) = ku(t), \tag{4}$$

де B и M – відповідно дійсна й уявна частини коренів характеристичного полінома, що відповідають диференційному рівнянню (1)

$$T_{\text{ф}} p^2 + T_{\text{ПГ}} p + 1 = 0, \tag{5}$$

$$p_{1,2} = -B \pm jM = -\frac{T_{\text{ПГ}}}{2T_{\text{ф}}} \pm \frac{\sqrt{T_{\text{ПГ}}^2 - 4T_{\text{ф}}}}{2T_{\text{ф}}};\ j = \sqrt{-1};\ B > 0;\ M > 0.$$

З урахуванням виразу:

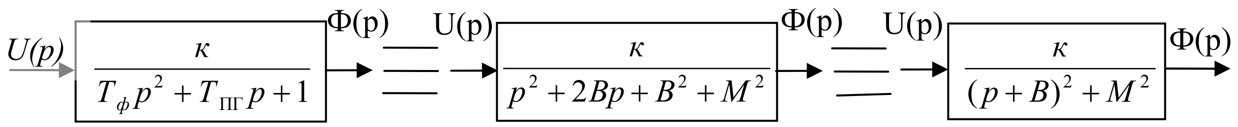
$$\begin{cases} p_1 + p_2 = -2B = -\dfrac{T_{\text{ПГ}}}{T_{\text{ф}}}; \\ p_1 \cdot p_2 = B^2 + M^2 = \dfrac{1}{T_{\text{ф}}}, \end{cases} \tag{6}$$

дійдемо висновку про ідентичність диференційних рівнянь (1) і (4).

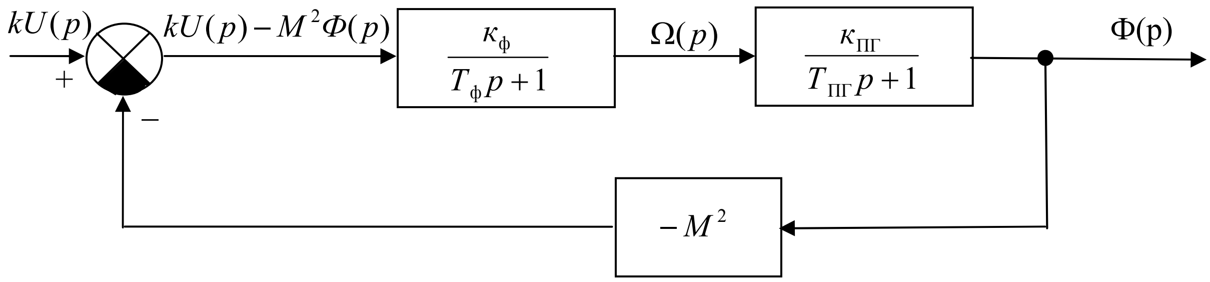
Об'єкт управління, поведінка якого описується диференційним рівнянням (4), представимо передатною функцією виду:

$$K(p) = \frac{\Phi(p)}{U(p)} = \frac{k}{p^2 + 2Bp + B^2 + M^2} = \frac{k}{(p+B)^2 + M^2}. \tag{7}$$

Еквівалентне перетворення передатних функцій (2) і (7) зображене на рис.1.



а)



б)

Рисунок 1 – Еквівалентне перетворення КОУ до комбінації інерційних ланок з від’ємним зворотним зв’язком

З метою отримання більш зручних фазових координат, виконаємо ще два лінійні еквівалентні перетворення. Нехай :

$$x_1(t) = \varphi(t);\; x_2 = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \tag{8}$$

то тоді рівняння (4) можливо представити у формі системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -(B^2 + M^2)x_1(t) - 2Bx_2(t) + k\cdot u(t)\,, \end{cases} \tag{9}$$

або у вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(B^2 + M^2) & -2B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ ku(t) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Уведемо ще вихідні координати $y_1(t)$ і $y_2(t)$ як еквівалентне перетворення вигляду:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \cdot \begin{bmatrix} M & 0 \\ B & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

то отримаємо наступну форму системи (10):

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B & M \\ -M & -B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

2. Постановка задачі і побудова оптимального за швидкодією алгоритму управляючого збудження

Нехай на величину управляючого збудження накладено умови типу “насичення”:

$$|\mathrm{u(t)}| \le 1. \tag{13}$$

У фазовому просторі станів об’єкта (12) потрібно знайти таке управляюче збудження *u(t)* для *t* ≥ 0, яке переміщує відображаючу точку з будь-якого початкового положення (Φ, Ω) до початку координат (0, 0) при допустимих його величинах (13) за найменше значення інтегрального критерію оптимальності у вигляді функціонала:

$$J = \int_{T_{\text{п}}}^{T_{\text{k}}} 1 \cdot dt = T_{\text{К}} - T_0 \Rightarrow \text{мін}. \qquad (14)$$

Згідно з принципом максимуму [1-3] для об'єкта управління (12), оптимального за швидкодією, необхідна наявність таких ненульових безперервних допоміжних функцій $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, щоб для всіх t в заданому інтервалі $T_{\text{н}} \le t \le T_{\text{к}}$ функція Гамільтона $H[u(t)]$ в заданій області допустимих значень змінної $u(t) \in U_{\text{д}}(\Phi_n \cdot t) \in R^m$ досягала максимуму:

$$\underset{\text{макс}\, u(t)}{H} = H\left[u(t), \Psi_1(t), \Psi_2(t),\, y_1(t), y_2(t)\,\right] \qquad (15)$$

з дотриманням умов постійності в часі

$$H(u, \Psi_1, \Psi_2, y_1, y_2) \ge 0. \qquad (16)$$

Складемо функцію Гамільтона як суму добутків відповідно до допоміжних змінних Ψ_1 і Ψ_2 на праві частини рівнянь системи (12):

$$\underset{\text{макс}\, u(t) \in U_{\text{д}} \in R^{\text{m}}}{H} = \Psi_1(t) \cdot \left[-B \cdot y_1(t) + M \cdot y_2(t)\right] + \Psi_2(t) \cdot \left[-M \cdot y_1(t) - B \cdot y_2(t)\right] + \Psi_2(t) \cdot u(t). \quad (17)$$

Максимальна функція Гамільтона (17) з урахуванням обмежень (13) звідки отримаємо наступний оптимальний за швидкодією алгоритм управляючого збудження об'єктом (12):

$$u(t) = sign\left[\Psi_2(t)\right]. \qquad (18)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\Psi_1(t)}{dt} = -\dfrac{\partial \text{H}}{\partial y_1(t)} = B \cdot \Psi_1(t) + M \cdot \Psi_2(t), \\ \dfrac{d\Psi_2(t)}{dt} = -\dfrac{\partial \text{H}}{\partial y_2(t)} = -M \cdot \Psi_1(t) + B \cdot \Psi_2(t), \end{cases} \qquad (19)$$

або у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\Psi_1(t)}{dt} \\ \dfrac{d\Psi_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & M \\ -M & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Фундаментальна матриця системи (20) дорівнює:

$$\Phi(t) = \exp(B \cdot t) \cdot \begin{bmatrix} \cos Mt & \sin Mt \\ -\sin Mt & \cos Mt \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Виразимо допоміжний вектор $\Psi(t)$ у вигляді:

$$\Psi(t) = e^{Bt} \cdot \text{O}(t) \cdot S, \;\; S = \Psi(\text{O}), \qquad (22)$$

$$\left\|\Psi(t)\right\| = e^{Bt} \cdot \left\|S\right\|, \qquad (23)$$

де $\Psi(t)$ – матриця невідомих початкових умов допоміжних змінних $\Psi_1(t)$ і $\Psi_2(t)$; $\text{O}(t)$ – ортогональна матриця, яка дорівнює:

$$\text{O}(t) = \begin{bmatrix} \cos Mt & \sin Mt \\ -\sin Mt & \cos Mt \end{bmatrix}. \qquad (24)$$

Вектор $\Psi(t)$, очевидно, рухається по спіралі, яка розкручується від початку координат площини $\Psi_1\Psi_2$. Враховуючи рішення рівнянь (12) для оптимального управляючого збудження за умови (13)

$$u(t) = U = \pm 1, \qquad (25)$$

$$\lim_{t\to\infty} y_1(t) = U, \; \lim_{t\to\infty} y_2(t) = \frac{B}{M} \cdot U, \qquad (26)$$

можливо отримати відповідні рівняння логарифмічних спіралей, які прямують до точки (U , $\frac{B}{M} \cdot U$) площини

$$\left(\frac{B^2 + M^2}{M} \cdot y_1, \frac{B^2 + M^2}{M} \cdot y_2\right) \qquad (27)$$

у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{B^2+M^2}{M}\cdot y_1(t)=\frac{B^2+M^2}{M}\cdot\Phi\cdot e^{-Bt}\cdot\cos Mt+\frac{B^2+M^2}{M}\cdot\Omega\cdot e^{-2Bt}\cdot\sin Mt- \\ -U\cdot\frac{\sqrt{B^2+M^2}}{M}\cdot e^{-Bt}\cdot\sin(Mt+\alpha)+U; \\ \frac{B^2+M^2}{M}\cdot y_2(t)=-\frac{B^2+M^2}{M}\cdot\Phi\cdot e^{-Bt}\cdot\sin Mt+\frac{B^2+M^2}{M}\cdot\Omega\cdot e^{-2Bt}\cdot\cos Mt- \\ -U\cdot\frac{\sqrt{B^2+M^2}}{M}\cdot e^{-Bt}\cdot\cos(Mt+\alpha)+\frac{B}{M}\cdot U, \end{cases} \tag{28}$$

де, як завжди, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{M}{B}$.

Із виразів (20) і (24) складова допоміжної змінної, яку шукаємо в алгоритмі (18) представляється у формі:

$$\Psi_2(t)=e^{Bt}\cdot(S_1\cdot\cos Mt+S_2\cdot\sin Mt)\ . \tag{29}$$

Проаналізуємо вид функції $\Psi_2(t)$ і отриманий оптимальний за швидкодією алгоритм управляючого збудження об’єктом (12).

Функція $\Psi_2(t)$ є добутком наростаючої експоненти на синусоїду. Оригіналом функції $\frac{k}{(p+B)^2+M^2}$, в зображенні за Лапласом, є вираз:

$$e^{Bt}\cdot\sin Mt, \tag{30}$$

а його графік показано на рис. 2.

Управляюче збудження

$$u\{F[\varphi(t)]\}=u(t)+u(\varphi) \tag{31}$$

має дві складові: 1) $u(t)$ як функція часу; 2) $u(\varphi)$ як функція фазової координати об’єкта управління.

Складова управляючого збудження $u(\varphi)$ є періодичною миттєвої напруги ФД і представляє собою суттєво нелінійну періодичну функцію (з періодом $T_\varphi=2\pi$), яка однозначна функції помилки миттєвих фаз генераторів і має один максимум і один мінімум за період. Максимізація функції Гамільтона за складовою миттєвої помилки фаз змінної $u(\varphi)$ й управлінням (31) за заданим періодом T_φ=const реалізується знакозмінною у функції помилки фаз характеристикою ФД у формі:

$$u_{\text{ФД}}(\varphi)=U_{\text{ФД}}\cdot\operatorname{sign}\sin\varphi, \tag{32}$$

або в нормованій формі:

$$u(\varphi)=\operatorname{sign}\sin\varphi. \tag{33}$$

Вираз (33) за умови обмеження величини

$$u_{\text{ФД}}(\varphi)=\frac{U_{\text{ФД}}}{U_{\text{екстр}}},\ U_{\text{екстр}}=\pm U_{\text{ФД}}; \tag{34}$$

або в нормованому вигляді

$$u(\varphi)=\pm1 \tag{35}$$

визначає прямокутну характеристику ФД.

Доведемо тепер, що складова управляючого збудження $u(t)$ виразу (31) при оптимальному за швидкодією управлінні консервативним КОУ є періодичною функцією часу.

Вираз (32) є алгоритмом управляючої послідовності, яка представляє собою можливі оптимальні за швидкодією складової управління у функції часу. Ясно, що функція $u(t)$ визначається функцією часу компоненти $\psi_2(t)$ вектор-функції $\psi(t)$. Функція $\psi_2(t)$, як випливає із алгоритму (32), дорівнює сумі двох синусоїд, і, як така, сама є синусоїдальною:

$$\Psi_2(t)=A_t\cdot\sin(Mt+\alpha)\ . \tag{36}$$

Таким чином, управління консервативним КОУ у функції часу в силу виразу (32) з урахуванням (36) є періодичною функцією часу з періодом T_t, який визначається рішенням (36). Цю тезу в геометричному вигляді показано на рис. 2.

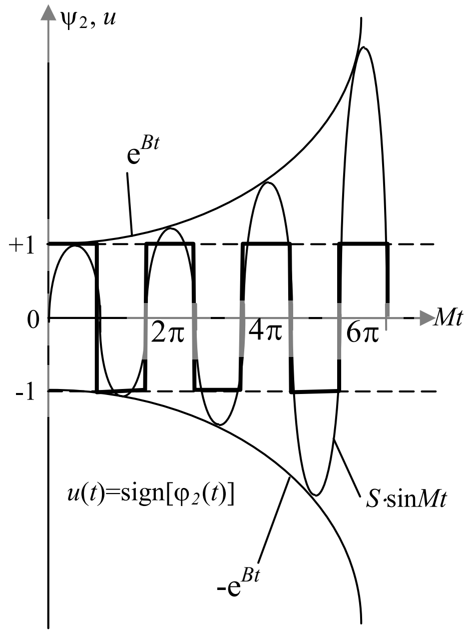


Рисунок 2 – Графік функції $\psi_2(t)$ і оптимального за швидкодією управляючого збудження об’єктом

Проінтерпретуємо специфічні якості оптимальних управляючих збуджень об’єктом (12) у відповідності з алгоритмом (18) та умовами (13).

1. Оптимальне за швидкодією управління об’єктом (12) за аналогією з традиційними управліннями [1-5] може бути також кусочно-постійними і переключатись в рамках умови (13) від $u(t) = +1$ до $u(t) = -1$ і навпаки. Але в цьому випадку кусочна постійність управляючого збудження дорівнює половині хвилі коливання і фактично є періодичною з періодом $T_u = 2\pi$ за умови $T_\varphi \geq T_u$, де T_φ – період управляючого збудження по фазовій координаті системи; T_u – період оптимального управляючого збудження в часі.

2. За умови $T_\varphi < T_u$ оптимальне за швидкодією управляюче збудження на півперіодах T_u буде періодичним по T_φ.

3. В традиційних управліннях [1-5] число переключень управляючих збуджень може бути не більше *n,* де *n* – порядок диференційного рівняння об’єкта управління типу (1). В коливальному об’єкті, який розглядається, число перемикань управляючих збуджень може бути нескінченними.

4. Оптимальне управління не може бути постійним триваліше, ніж $\dfrac{\pi}{M}$ одиниць часу.

5. В статиці в об’єкті управління спостерігаються примусові коливання, що збуджуються періодичним управлінням з періодом T_φ.

Наприкінці статті сформулюємо отримані результати.

Запропоновано аналітичні еквівалентні лінійні перетворення математичної моделі КОУ з метою подальшого отримання оптимальних за швидкодією періодичних управлінь.

На основі використання принципу максимуму акад. Л.С.Понтрягіна побудовано алгоритм оптимального за швидкодією управляючого збудження та проаналізовано його графік.

Підкреслено особливості отриманих оптимальних за швидкодією періодичних управляючих збуджень КОУ порівняно з відомими управліннями.

Література

1. *Атанс М, Фалб П.* Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. – 768 с.
2. *Гамкрелидзе Р.В.* Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Изв. АН СССР, серия матем., 22, №41, 1958. – С.449-474.
3. *Математическая* теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969. – С. 384.
4. *Егоров К.В.* Основы теории автоматического регулирования. – М.: Энергия, 1967. – 648 с.
5. *Борщ В.И., Коваль В.В., Костик Б.Я.* Колебания в оптимальных по быстродействию системах радиоавтоматики // Радиотехника. – 2002. – Вып. 128. – С.219-225.