УДК 621.391.1 (075)

Горбачев М.Н.
Gorbachev M.N.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПИ RL ПРИ НЕГАРМОНИЧЕСКОМ ВХОДНОМ НАПРЯЖЕНИИ

ENERGY ANALYSIS OF PERIODIC PROCESSES IN CIRCUIT RL AT NONHARMONIC INPUT VOLTAGE

Аннотация. Дан энергетический анализ периодических процессов в цепи RL с изменяющимися параметрами на основе компонент полной мощности при негармонических сигналах на входе.

Summary. Energy analysis periodic processes in circuit RL with various parameters on basis component of full power with nonharmonic signals on input is given.

Анализ и расчет энергетических периодических процессов в линейных радиотехнических цепях с переменными параметрами при существенно негармонических входных воздействиях является важной научной проблемой, связанной с решением ряда теоретических и практических задач.

Актуальность этой проблемы состоит в том, что указанные цепи широко применяются не только в радиотехнике, но также в системах электросвязи и телекоммуникаций, например, в транзисторных преобразователях постоянного напряжения в переменное периодическое напряжение типа меандр, в импульсных преобразователях и усилителях различной мощности и др. При разработке и проектировании такого рода импульсных преобразователей с целью оптимизации режимов их работы необходимо находить аналитическим путем энергетические параметры (энергетические соотношения) с учетом спектрального состава используемых негармонических сигналов.

Работам в этой области посвящен ряд публикаций, например, [1–5]. В указанных публикациях при исследовании энергетических процессов в импульсных преобразователях напряжения используют ограниченное количество гармоник, входящих в состав напряжений и токов, действующих в цепях схемы преобразователя и имеющих существенно несинусоидальную форму. Получаемые в результате энергетические соотношения имеют приближенный характер, в связи с чем возникает необходимость решения дополнительной задачи определения погрешности выполненных расчетов.

Настоящая статья посвящена проблеме повышения точности анализа и расчета энергетических параметров периодических процессов в радиотехнических цепях с индуктивной реакцией и изменяющимися параметрами при воздействии существенно негармонических сигналов на основе учета полного спектра этих сигналов.

В связи с этим рассматривается задача энергетического анализа негармонических периодических процессов в радиотехнических цепях с переменной добротностью. Такие цепи широко применяются в радиотехнике и электросвязи [6, 7].

Постановка задачи состоит в следующем: на вход линейной цепи RL с переменной добротностью подаются сигналы в виде напряжения типа меандр; требуется определить все компоненты полной мощности S в этой цепи (активную P, реактивную Q мощности и мощность искажения T) как функции добротности q.

При решении задачи используем известный в теории цепей подход для определения указанных компонент полной мощности [8]. Добротность q определяется на рабочей частоте (частоте следования сигналов) Ω.

При этом активная P и реактивная Q мощности в цепи негармонического (несинусоидального) периодического тока определяются как полные суммы активных и реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$P=\sum_{k=0}^{\infty}U_k I_k \cos\varphi_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}U_{km}I_{km}\cos\varphi_k\,, \qquad (1)$$

$$Q=\sum_{k=1}^{\infty}U_k I_k \sin\varphi_k\,, \qquad (2)$$

где φ_k – угол сдвига фаз между напряжением и током отдельной гармоники.

Полная мощность S и мощность искажения T определяются следующими соотношениями:

$$S = UI = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2\right)}, \tag{3}$$

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}\ . \tag{4}$$

Так как входное напряжение типа меандр содержит только нечетные гармоники и описывается рядом Фурье

$$u_{вх}(t) = \frac{4}{\pi} E \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\Omega t + \psi_u)}{k}, \tag{5}$$

где начальная фаза принимается равной нулю ($\psi_u = 0$), то мгновенное значение тока в цепи RL можно представить в виде следующего ряда:

$$i(t) = \frac{4E}{\pi R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\Omega t - \varphi_k)}{k\sqrt{1 + q^2 k^2}}, \tag{6}$$

где $k = 2n - 1$; $n = 1, 2, 3, \ldots\infty$; $q = \dfrac{\Omega L}{R}$; $\varphi_k = \mathrm{arctg}(kq)$.

Поскольку $\cos(\mathrm{arctg}(kq)) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + q^2 k^2}}$, то выражение (1) с учетом формул (5) и (6) принимает следующий вид:

$$P = \frac{8E^2}{\pi^2 R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(1 + q^2 k^2)} = \frac{8E^2 \lambda^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^2 + \lambda^2)}, \tag{7}$$

где $\lambda = \dfrac{1}{q}$.

Далее необходимо просуммировать ряд в правой части выражения (7), который сходится равномерно согласно признакам сходимости числовых рядов [9, 10].

С этой целью представим указанный ряд в виде суперпозиции более простых рядов и учитывая, что

$$\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2 + \lambda^2} \cong \frac{\lambda^2}{(2n-1)^4}, \tag{8}$$

поскольку $\lambda^2 << (2n-1)^2$ и q имеет порядок 100-300, находим приближенную сумму бесконечного числового ряда в выражении (7)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^2 + \lambda^2)} \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}. \tag{9}$$

Сумма ряда (9) является известной [10].

Таким образом, на основе выражения (7) с учетом суммы (9) получаем приближенную формулу для определения искомой величины P:

$$P \cong \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E^2}{q^2 R} \cong f_1(q). \tag{10}$$

Аналогично находим реактивную мощность Q по формуле (2) с учетом соотношения

$$\sin\varphi_k = \sin(\mathrm{arctg}(kq)) = \frac{kq}{\sqrt{1 + q^2 k^2}}. \tag{11}$$

В результате получаем:

$$Q = \frac{8E^2}{\pi^2 R} \cdot q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1 + q^2 k^2)} = \frac{8E^2}{\pi^2 R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2 + \lambda^2)}. \tag{12}$$

Ряд в правой части выражения (12) сходится по признаку Раабе [9]. Сумму этого ряда можно найти, сравнив его с другими числовыми рядами [9, 10]. В результате установлено, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(k^2+\lambda^2\right)}=\frac{1}{1+\lambda^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)^3}\cong\frac{q}{1+q^2}+0{,}05 \tag{13}$$

и выражение (12) приводится к окончательному виду

$$Q\cong\frac{8.1167}{\pi^2}\cdot\frac{E^2}{R}\cdot\frac{q}{1+q^2}=f_2(q). \tag{14}$$

Так как амплитуды k-х гармоник тока I_{km} и напряжения U_{km} определяются соответственно соотношениями:

$$I_{km}=\frac{4E}{\pi R}\cdot\frac{1}{k\sqrt{1+q^2k^2}},\qquad U_{km}=\frac{4E}{\pi}\cdot\frac{1}{k},$$

где k – нечетные числа натурального ряда, то полную (кажущуюся) мощность S находим по формуле (3) с учетом выражения (9) и известной суммы бесконечного числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, в котором k = 1, 3, 5, 7, … ∞, приведенной в [10]:

$$S=UI=\sqrt{\frac{16E^2}{2\pi^2}\cdot\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\cdot\frac{16E^2}{2\pi^2R^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\cdot(1+q^2k^2)}\right)\right]}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{E^2}{R}. \tag{15}$$

На основании формулы (4) с учетом полученных соотношений (10), (12) и (15) находим мощность искажения T. Опуская промежуточные выкладки, приводим окончательную формулу:

$$T=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{E^2}{R}\cdot\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\cdot f(q)}=f_3(q), \tag{16}$$

где

$$f(q)=\frac{1}{q^4}+\frac{q^2}{\left(1+q^2\right)^2}, \tag{17}$$

$$a=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=0{,}90688;\quad b=a^2=\frac{\pi^2}{12}=0{,}82244.$$

Следовательно, полученные функции (10), (14) и (16) можно представить в виде системы трех уравнений, в которых аргументом является добротность q цепи RL на постоянной частоте следования входных сигналов ($\Omega=\text{const}$):

$$\begin{cases} x=P=\dfrac{bE^2}{R}\cdot\dfrac{1}{q^2}, \\ y=Q=\dfrac{bE^2}{R}\cdot\dfrac{q}{1+q^2}, \\ z=T=\dfrac{aE^2}{R}\cdot\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot f(q)}. \end{cases} \tag{18}$$

При этом формула (15) для расчета величины полной мощности с учетом принятых обозначений для числовых коэффициентов принимает следующий вид:

$$S=a\cdot\frac{E^2}{R}. \tag{19}$$

Таким образом, в результате исследования выражений (10), (14) и (16), определяющих распределение ортогональных компонент полной мощности S в RL цепи в рассматриваемой задаче как функций добротности, установлено, что $P=f_1(q)$ и $Q=f_2(q)$ являются монотонно убывающими функциями, а $T=f_3(q)$ является монотонно возрастающей функцией. Асимптотами для этих функций являются прямые, которым соответствуют уравнения:

$$P=0;\quad Q=0;\quad T=\frac{aE^2}{R}=\text{const.}$$

Физически это означает, что при возрастании добротности RL цепи, питаемой негармоническим напряжением, имеющим форму меандра, компоненты P и Q существенно уменьшаются по сравнению с компонентой T, которая возрастает при увеличении q ($q = 1{,}4 \div 100$).

С другой стороны, полученная система функций (18) определяет некоторую пространственную кривую, заданную в параметрическом виде и лежащую на сферической поверхности, что следует из уравнения энергетического баланса

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2 . \tag{20}$$

Действительно, подстановка x, y и z из системы (18) и выражения (19) в уравнение (20) обращает последнее в тождество:

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2 ,$$

где $C = S$ – радиус сферы.

Отсюда следует, что плавному изменению величины добротности q при постоянстве частоты Ω соответствует перемещение точки $M(x,\ y,\ z)$, изображающей энергетическое состояние рассматриваемой цепи, по некоторой пространственной кривой общего вида, что вытекает из параметрической системы (18). При этом начальное и конечное положения точки $M(x,\ y,\ z)$ на указанной кривой легко могут быть определены с помощью системы параметрических уравнений (18) путем подстановки в них соответствующих значений $q_{\min}$ и $q_{\max}$, поскольку величина добротности изменяется в заданных ограниченных пределах: $q_{\min} \le q \le q_{\max}$.

В заключении отметим, что полученные результаты могут быть использованы в качестве трехмерных пространственных (геометрических) моделей для сравнения и оценки энергетических состояний цепей индуктивного характера с переменной добротностью, применяющихся в радиотехнических устройствах и системах электросвязи.

Литература

1. *Транзисторные* усилители и преобразователи. Передовой научно-технический и производственный опыт / Ю.И. Конев и др. – ГОСИНТИ, 1963. – №28-63-58/13.
2. *Rye T.P.* High-power transistor DC converters. Electronic and Radio Engineering, 1959. – V. 36. – №3, March.
3. *Никитин В.Б.* Транзисторные преобразователи постоянного напряжения в синусоидальное // Полупроводниковые приборы и их применение: Сб. статей / Под ред. Я.А. Федотова. – Вып.14. – М.: Советское радио, 1965. – С. 243-259.
4. *Радиоприемные* схемы на полупроводниковых приборах. Проектирование и расчет / Под ред. Валитова Р.А. и Куликовского А.А. – М: Советское радио, 1968. – 384 с.
5. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наукова думка, 1999. – 184 с.
6. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Советское радио, 1977. – 608 с.
7. *Заездный А.М.* Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 536 с.
8. *Нетушил А.В., Страхов С.В.* Основы электротехники. Ч.2. Цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1955. – 216 с.
9. *Фихтенгодьц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1966. – 800 с.
10. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит., 1954. – 608 с.