УДК 519.16:621.39

Ткаченко В.Г.
Ткаченко В.Г.
Tkachenco V.G.

МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО ПЕРЕБОРА МИНИМАЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ И ОСТОВОВ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

МЕТОД ЕФЕКТИВНОГО ПЕРЕБОРУ МІНІМАЛЬНИХ РОЗРІЗІВ Й ОСТОВІВ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖ

METHOD FOR TELECOMMUNICATION NETWORKS' MINIMAL CUTS AND SKELETONS EFFECTIVE ITERATION

Аннотация. Разработан метод перебора минимальных разрезов графа и его остовов. Этот метод реализует перебор минимальных разрезов сети путем сложения по модулю два комбинаций базовых разрезов, которые находятся для произвольного остова. В результате получаем монотонную булеву функцию минимальных разрезов в виде конъюнктивной нормальной формы и преобразуем ее в дизъюнктивную нормальную форму остовов.

Анотація. Розроблено метод перебору мінімальних розрізів графа і його остовів. Цей метод реалізує перебір мінімальних розрізів мережі шляхом додавання по модулю два комбінацій базових розрізів, які знаходяться для довільного остова. В результаті отримуємо монотонну бульову функцію мінімальних розрізів у вигляді кон'юнктивної нормальної форми, яку перетворюємо у диз'юнктивну нормальну форму остовів.

Summary. Developed a method for iteration of minimal grapf cuts and graph skeletons. This method implements a minimal grapf cuts iteration in network by “exclusive or” of basic combinations of cuts, for random graph skeleton. The result is a monotonous Boolean function of minimal cuts as a conjunctive normal form which we convert into disjunctive normal form presentation of skeletons.

При проектировании и эксплуатации сети возникает проблема повышения качества обслуживания. Для решения этой проблемы применяются следующие способы: оптимизация структуры сети, многомерная интеллектуальная маршрутизация пакетов, резервирование каналов. Во всех этих способах важно использовать эффективные методы анализа структуры сети.

В ряде случаев необходимо делать перебор остовов, базовых и минимальных разрезов [1]. (Определения всех понятий из теории графов приведены в [1]). Прямой и обратный методы перебора остовов описаны в [2].

Однако эти методы не подходят для перебора базовых и минимальных разрезов, хотя анализ минимальных разрезов фрагментов сети может быть использован в различных алгоритмах и методах работы сети.

Целью статьи является разработка метода нахождения базовых разрезов и остовов телекоммуникационной сети за время, сравнимое с нахождением исключительно остовов.

Монотонная булева функция (МБФ) – это булева функция, значение которой не уменьшается при увеличении любого из её аргументов. В [3] показано, что монотонные булевы функции можно представить в виде булевых выражений, где присутствуют только операции дизъюнкции и конъюнкции, но нет операции отрицания.

Двойственная МБФ – монотонная булева функция, в которой все операции конъюнкции заменены на операции дизъюнкции, а операции дизъюнкции, на операции конъюнкции.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) – нормальная форма, в которой булева функция имеет вид конъюнкции дизъюнкций элементов.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – нормальная форма, в которой булева функция имеет вид дизъюнкции конъюнкций элементов.

Метод основан на получении минимальных разрезов из базовых разрезов. Затем получается остовную МБФ, раскрывая скобки КНФ минимальных разрезов.

Один из наиболее распространенных способов перевода булевой функции из КНФ формы в ДНФ состоит в раскрытии скобок. Проиллюстрируем его на примере функции

$f = (A \vee B)\,(C \vee D)$,

заданной в виде КНФ. Раскроем скобки:

$f = (A \vee B)\,(C \vee D) = AC \vee AD \vee BC \vee BD$.

В данном случае после раскрытия скобок получилась минимальная ДНФ той же функции. Но для более сложных функций в результате раскрытия будут встречаться элементы полностью входящие в другие конъюнкции, такие функции можно минимизировать.

Один из наиболее распространенных методов приведения КНФ формы к ДНФ форме состоит в раскрытии скобок и затем приведении функции к нормальной форме (минимизации).

Например, функция:

$f = (A \vee B \vee C)\,(A \vee B \vee D)$

после раскрытия скобок даёт выражение:

$f = AA \vee AB \vee AD \vee AB \vee BB \vee BD \vee AC \vee BC \vee CD$,

после приведения подобных элементов получаем:

$f = A \vee B \vee CD.$

Метод раскрытия скобок применим лишь в самых простых случаях, так как с ростом числа элементов в КНФ растет сложность вычислений. Для решения задачи приведения КНФ формы в ДНФ со значительным количеством элементов при помощи ЭВМ значительно проще перебрать выражения удовлетворяющие КНФ, для чего можно использовать алгоритмы перебора, предложенные в [2], или множество других алгоритмов.

Перейдем к описанию самого метода. В качестве исходных данных используется представление сети в виде связанного графа, каждая из вершин которого имеет минимум два ребра.

Этапы алгоритма:

1. Поиск произвольного остова сети.
2. Поиск базовых разрезов сети.
3. Нахождение минимальных разрезов сети.
4. Нахождение остовов сети путем раскрытия скобок в двойственной МБФ разрезов.

Разберем этапы:

На первом этапе находим один, любой остов сети. Метод поиска остова не важен, так как не важны параметры ребер. К примеру, можно использовать алгоритм Дейкстры [1], считая вес каждого ребра за единицу.

Для поиска базовых разрезов выполняем следующий алгоритм: выбираем ребро, принадлежащее остову, считаем его разделителем вершин на две группы и ищем все ребра, соединяющие эти две группы. Найденные ребра и являются базовым разрезом. Алгоритм необходимо повторить для всех ребер остова. Найденные базовые разрезы сохраняем для следующего этапа.

Перебор всех комбинаций базовых разрезов в виде МБФ сложением по модулю два позволяет получить все возможные разрезы, но может сгенерировать несколько разрезов входящих в другие разрезы (не все разрезы минимальны). Перебор осуществляется последовательным увеличением переменной-счетчика на 1, начиная с 1 до двоичного числа, состоящего из n единиц, где n – число ребер в сети. По завершению формирования списка всех комбинаций проще всего провести сравнение всех найденных разрезов по принципу каждый с каждым и проверить вхождение, если в комбинацию полностью входит проверяемый разрез, то комбинация не является минимальным разрезом.

Этап нахождения остовов можно представить как преобразование КНФ в ДНФ. Однако вместо раскрытия скобок, используемых при преобразовании, оптимальнее осуществить выборку всех подграфов с количеством ребер, равным числу ребер остова, и затем проверку подграфов на принадлежность к ДНФ. Преобразование КНФ в ДНФ перебором подграфов подразумевает некоторое число условий, роль которых выполняют разрезы в виде двойственной МБФ (составляющие КНФ) и некоторое число предполагаемых ответов в виде выборки МБФ подграфов, принадлежность которых к ДНФ мы проверяем. Т.е., чтобы узнать является ли подграф частью ДНФ, проверяем, соответствует ли ответ условию – разрезы должны включать по одному или более ребру МБФ подграфа. При большом количестве элементов такой подход заменяет обычное раскрытие скобок и экономит ресурсы.

Полученные подграфы в составе ДНФ и являются остовами.

Разберем предложенный метод на примере сети из пяти вершин и семи ребер (рис. 1):

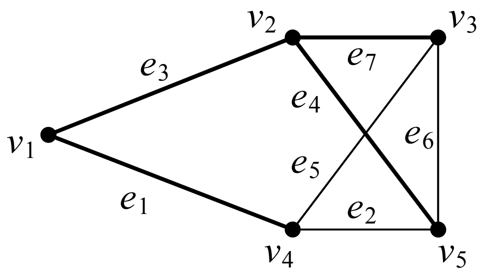

Рисунок 1 – Пример сети из пяти вершин и семи ребер

В качестве произвольного остова выбираем подграф $e_1 \vee e_3 \vee e_4 \vee e_7$ (этот остов выделен на рис. 1 жирной линией). Находим базовые разрезы на его основе:

1) $e_1 \vee e_2 \vee e_5$;
2) $e_2 \vee e_4 \vee e_6$;
3) $e_2 \vee e_3 \vee e_5$;
4) $e_5 \vee e_6 \vee e_7$.

Базовые циклы можно найти и более простым способом. Для этого достаточно выписать ребра , инцидентные всем вешинам графа, кроме одной.

Разрезами являются все базовые разрезы, плюс комбинации, полученные сложением по модулю два базовых разрезов:

1) $e_1 \vee e_2 \vee e_5$;
2) $e_2 \vee e_4 \vee e_6$;
3) $e_2 \vee e_3 \vee e_5$;
4) $e_5 \vee e_6 \vee e_7$;
5) $(e_1 \vee e_2 \vee e_5) \oplus (e_2 \vee e_4 \vee e_6) = e_1 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_6$;
6) $(e_1 \vee e_2 \vee e_5) \oplus (e_2 \vee e_3 \vee e_5) = e_1 \vee e_3$;
7) $(e_1 \vee e_2 \vee e_5) \oplus (e_5 \vee e_6 \vee e_7) = e_1 \vee e_2 \vee e_6 \vee e_7$;
8) $(e_2 \vee e_4 \vee e_6) \oplus (e_2 \vee e_3 \vee e_5) = e_3 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_6$.
9) $(e_2 \vee e_4 \vee e_6) \oplus (e_5 \vee e_6 \vee e_7) = e_2 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_7$;
10) $(e_2 \vee e_3 \vee e_5) \oplus (e_5 \vee e_6 \vee e_7) = e_2 \vee e_3 \vee e_6 \vee e_7$;
11) $(e_1 \vee e_2 \vee e_5) \oplus (e_2 \vee e_4 \vee e_6) \oplus (e_2 \vee e_3 \vee e_5) = e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_6$;
12. $(e_1 \vee e_2 \vee e_5) \oplus (e_2 \vee e_4 \vee e_6) \oplus (e_5 \vee e_6 \vee e_7) = e_1 \vee e_4 \vee e_7$;
13) $(e_1 \vee e_2 \vee e_5) \oplus (e_2 \vee e_3 \vee e_5) \oplus (e_5 \vee e_6 \vee e_7) = e_1 \vee e_3 \vee e_5 \vee e_6 \vee e_7$;
14) $(e_2 \vee e_4 \vee e_6) \oplus (e_2 \vee e_3 \vee e_5) \oplus (e_5 \vee e_6 \vee e_7) = e_3 \vee e_4 \vee e_7$;
15) $(e_1 \vee e_2 \vee e_5) \oplus (e_2 \vee e_4 \vee e_6) \oplus (e_2 \vee e_3 \vee e_5) \oplus (e_5 \vee e_6 \vee e_7) = e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_7$.

Однако нам требуются не просто разрезы, а минимальные разрезы. Разрез 1, 6 и 14 входят в разрез 11 и 15, следовательно 15 не является минимальным. Такая же ситуация с разрезом 13, в него входит разрез 4 и 6. Итого остается 12 минимальных разрезов.

Представляем все минимальные разрезы в виде дизъюнкций из входящих в эти разрезы переменных. Обьединяя все эти дизъюнкции в КНФ, получаем двойственную МБФ минимальных разрезов:

$$(e_1 \vee e_2 \vee e_5)(e_2 \vee e_4 \vee e_6)(e_2 \vee e_3 \vee e_5)(e_5 \vee e_6 \vee e_7)(e_1 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_6)(e_1 \vee e_3)(e_1 \vee e_2 \vee e_6 \vee e_7)(e_3 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_6)$$
$$(e_2 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_7)(e_2 \vee e_3 \vee e_6 \vee e_7)\ e_1 \vee e_4 \vee e_7)(e_3 \vee e_4 \vee e_7).$$

МБФ разрезов имеет следующий вид:

$$e_1e_2e_5 \vee e_2e_4e_6 \vee e_2e_3e_5 \vee e_5e_6e_7 \vee e_1e_4e_5e_6 \vee e_1e_3 \vee e_1e_2e_6e_7 \vee e_3e_4e_5e_6 \vee e_2e_4e_5e_7 \vee e_2e_3e_6e_7 \vee e_1e_4e_7 \vee e_3e_4e_7.$$

После преобразования КНФ в ДНФ раскрытием скобок в двойственной МБФ минимальных разерезов и минимизации получаем остовную МБФ из 24 остовов:

$$e_3e_4e_6e_7\vee e_1e_5e_6e_7\vee e_2e_3e_6e_7\vee e_1e_2e_6e_7\vee e_3e_4e_5e_7\vee e_3e_4e_5e_7\vee e_1e_4e_5e_7\vee e_2e_3e_5e_7\vee$$
$$\vee e_1e_2e_5e_7\vee e_2e_3e_4e_7\vee e_1e_3e_4e_7\vee e_1e_2e_4e_7\vee e_1e_2e_3e_7\vee e_3e_4e_5e_6\vee e_1e_4e_5e_6\vee e_1e_3e_5e_6\vee$$
$$\vee e_2e_3e_4e_6\vee e_1e_3e_4e_6\vee e_1e_2e_4e_6\vee e_1e_2e_3e_6\vee e_2e_3e_4e_5\vee e_1e_3e_4e_5\vee e_1e_2e_4e_5\vee e_1e_2e_3e_5.$$

В качестве замены обычного раскрытия скобок при преобразовании КНФ в ДНФ оптимальнее применять перебор подграфов из четырех ребер (в данном графе каждый остов состоит из четырех ребер). Для перебора подграфов можно использовать методы из [2]. Если в каждый из минимальных разрезов входит хотя бы одно ребро подграфа, то такой подграф является остовом. Этот метод поиска ДНФ значительно проще раскрытия скобок, но все равно наиболее ресурсоемкая часть алгоритма из-за генерации подграфов. В качестве оптимизации возможно использовать таблицы под конкретные размеры коостовов, но без привязки к размеру графа. Так как перебор не зависит от структуры графа и её изменений в процессе работы, а только от числа ребер и размера остова, то можно существенно сократить время на выполнение. Также не обязательно выполнять полный перебор остовов – возможно нахождение лишь части значений, методом перебора, выбирающим значения согласно весу.

В данном случае для перебора берутся сочетания по четыре из семи – необходимо перебрать 35 значений. Всего в данном графе имеется 12 минимальных разрезов. Из них шесть состоит из трех ребер, пять из четырех ребер и один из двух. При обычном раскрытии скобок двойственной КНФ минимальных разрезов получаем $2\times3^6\times4^5$ = 1492992 конъюнкций без учета минимизации (при обычном раскрытии скобок количество получаемых элементов равно произведению количеств элементов в каждой из скобок). Преимущества предложенного метода перебора в сравнении с классическим раскрытием скобок в данном случае очевидно и при росте количества ребер это преимущество быстро растет.

Оценим скорость работы метода на примере сети с 20 ребрами и 10 вершинами (рис. 2):

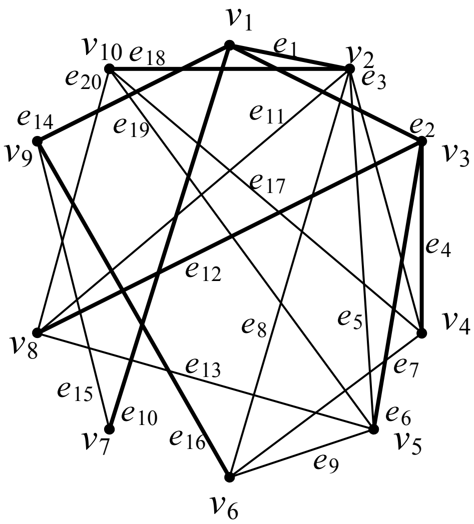

Рисунок 2 – Пример сети из 10 вершин и 20 ребер

На первом этапе в качестве остова выбираем подграф $e_1\vee e_2\vee e_4\vee e_6\vee e_{10}\vee e_{12}\vee e_{14}\vee e_{16}\vee e_{18}$ (этот остов выделен на рис. 2 жирной линией), на его основе получаем девять базовых разрезов. Этими разрезами являются:

1) $e_1\vee e_3\vee e_5\vee e_8\vee e_{11}\vee e_{17}\vee e_{19}\vee e_{20}$;
2) $e_2\vee e_3\vee e_5\vee e_7\vee e_9\vee e_{11}\vee e_{17}\vee e_{19}\vee e_{20}$;
3) $e_3\vee e_4\vee e_7\vee e_{17}$;
4) $e_5\vee e_6\vee e_9\vee e_{13}\vee e_{19}$;
5) $e_7\vee e_8\vee e_9\vee e_{16}$;
6) $e_{10}\vee e_{15}$;
7) $e_{11}\vee e_{12}\vee e_{13}\vee e_{20}$;
8) $e_7\vee e_8\vee e_9\vee e_8\vee e_{14}\vee e_{15}$;

9) $e_{17} \vee e_{18} \vee e_{19} \vee e_{20}$.

Из девяти базовых разрезов сложением по модулю два можно получить 511 комбинаций, однако только 175 являются минимальными разрезами. Минимальными разрезами не являются те комбинации, из которых можно выделить подмножество ребер, являющееся разрезом. К примеру базовые разрезы $e_7 \vee e_8 \vee e_9 \vee e_{16}$ и $e_{10} \vee e_{15}$ после операции сложения по модулю два дадут разрез полностью включающий оба базовых разреза, а значит минимальным не является. Как следствие необходима поэлементная проверка на вхождение всех найденных минимальных разрезов по принципу каждый с каждым.

В процессе раскрытия скобок при нахождении коостовов необходимо делать минимизацию (приведение) получаемых выражений. Для МБФ это значительно проще, чем для булевых функций произвольного вида. На примере поиска минимизированной ДНФ [5], можно сделать вывод, что программная реализация предлагаемого метода выполняется значительно быстрее, чем реализация метода [5], так как в предлагаемом методе требуется рассматривать в два раза меньше переменных. Метод [5] рассматривает отдельно переменные с отрицанием и без отрицания, т.е. для 20 ребер пришлось бы рассматривать 40 переменных.

После раскрытия скобок и минимизации получаем 21077 остовов. В сравнении с алгоритмами [2] отличия по времени выполнения не более ±0,1% в зависимости от графа, так как используется тот же принцип решения задачи NP типа перебором, но изменен метод определения комбинаций.

При нахождении остовов в предложенном методе требуется перебрать сочетания ребер по девять из 20, что составляет 167960 подграфов. Так как в данном графе 327 минимальных разрезов, из них одно с двумя ребрами; 3 с 3; 7 с 4; 5 с 5; 8 с 6; 16 с 7; 26 с 8; 39 с 9; 46 с 10; 20 с 11 и четыре разреза с 12 ребрами, то в случае обычного раскрытия скобок потребуется обработать $2 \times 3^3 \times 4^7 \times 5^5 \times 6^8 \times 7^{16} \times 8^{26} \times 9^{39} \times 10^{46} \times 11^{20} \times 12^4 \approx 13{,}2 \times 10^{138}$ элементов без учета минимизации. Данное количество операций невозможно осуществить на современных ЭВМ за разумное время (более 10^9 лет), тогда как в предложенном методе все действия по нахождению разрезов и остовов (в том числе раскрытие скобок и минимизация) для рассмотренного графа из 20 ребер осуществляются за время не более 4 с.

В заключение отметим следующее. Разработан новый эффективный метод перебора минимальных разрезов и остовов телекоммуникационной сети на основе монотонных булевых функций. На базе этого метода написана программа, позволяющая быстро анализировать структуру телекоммуникационной сети или ее фрагмента. Использование данной программы возможно как при проектировании сети, так и при ее эксплуатации, например, при выходе из строя или перегрузке отдельных линий связи.

Литература

1. *Свами М.* Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
2. *Ткаченко В.Г.* Методы прямого и обратного перебора остовов графов телекоммуникационных сетей / В.Г. Ткаченко, Д.Г. Ларин // Труды одесского политехнического университета. – 2011. – № 2 (36) . – С. 210-216.
3. *Иваницкий А.М.* Графы, матроиды, монотонные булевы функции и принцип взаимосоответсвия / А.М. Иваницкий, В.Г. Ткаченко. – Одесса: ОНАС им. А.С. Попова, 2012. – 148 с.
4. *Ткаченко В.Г.* Метод проверки связности и цикличности фрагмента сети на основе монотонных булевых функций / В.Г. Ткаченко, А.О. Клещев // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2011. – № 2. – С. 114-121.
5. *Закревский А.Д.* Минимизация булевых функций многих переменных в классе ДНФ – итеративный метод и программная реализация / А.Д. Закревский, Н.Р. Топоров // Объединенный институт информатики НАН Беларуси. – 2009. – № 1 (3) . – С. 5-14.