

**МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ  
ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСОВ ДЛЯ СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ**

**МЕТОД ВИКОРИСТАННЯ НЕСЕПАРАБЕЛЬНИХ  
ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСІВ ДЛЯ СТИСКАННЯ ЗОБРАЖЕНЬ**

**THE METHOD OF USE OF NON-SEPARABLE  
WAVELET BASES FOR IMAGE COMPRESSION**

**Аннотация.** Проанализированы проблемы использования несепарабельных вейвлет-базисов, изучены особенности их характеристик. Представлен метод использования несепарабельных вейвлет-базисов для сжатия изображений.

**Анотація.** Проаналізовані проблеми використання несепарабельних вейвлет-базисів, вивчено особливості їх характеристик. Представлено метод використання несепарабельних вейвлет-базисів для стискання зображень.

**Summary.** The problems of the use of non-separable wavelet bases are analyzed, the features of their characteristics are investigated. A method of using non-separable wavelet bases for image compression are presented.

Важным и перспективным методом развития информационных технологий, ориентированных на распознавание, анализ и обработку сложных биортогональных изображений являются вейвлетные базисы [1,2]. Наиболее фундаментальные результаты были получены в работах [1, 2, 3]. В телекоммуникационных системах ключевой проблемой на первых этапах является разложение бинарных изображений по биортогональным классам функций. Математические методы построения таких алгоритмов сжатия изображений ориентированы, как правило, на минимальную величину потерь информации и сохранение качества изображений. По этой тематике опубликовано значительное количество фундаментальных работ. При этом всегда фундаментальной проблемой является задача выбора оптимального биортогонального базиса данного класса функциональных пространств с заданной метрикой. Несмотря на достаточно высокоразвитые методы конструирования биортогональных вейвлетных базисов в кратномасштабном анализе, существует проблема степени адекватности функциональных пространств изображений с заданной метрикой. Она не всегда позволяет с необходимой точностью построить ортогональный вейвлетный базис, который с требуемым качеством аппроксимирует функциональное пространство изображений. Большинство конкретных прикладных задач сводилось к задаче сжатия изображений, когда мера пространства биортогональных вейвлетных базисов совершенно не соответствовала мере сжимаемого функционального пространства. Поиск биортогональных вейвлетных базисов для распознавания метрических функциональных пространств с эффективной мерой сжатия изображений продолжается и в настоящее время. Следует признать, что некоторые проблемы сжатия функциональных пространств с заданной метрикой требуют построения специальных классов биортогональных вейвлетных базисов с заданными свойствами. В настоящее время количество классов настолько велика, что выбор вейвлетных базисов образовал весьма сложную в вычислительных отношениях математику.

Следует заметить, что спорность данной проблемы обусловило появление значительного многообразия базисных функций для сжатия изображения весьма различных классов. К ним можно отнести риджелеты, куравлеты, блоклеты и другие. Тем не менее, расширение классов биортогональных классов функций не позволило получить универсальный, биортогональный вейвлетный базис функции для распознавания.

Проблема синтеза новых классов биортогональных базисов по-прежнему носит ограничительный характер для статических изображений еще и в силу того обстоятельства, что отсутствуют конструктивно выбираемые меры потери информации, которые могли бы гарантировать эффективные процедуры передачи информации не только относительно качества сжатия изображения, но и относительно величины потерь информации.

На протяжении последних 20 лет появился новый класс развивающихся вейвлет-базисов, основанный на различных методах усреднения функциональных пространств изображений. Вейвлет-

базисы являются частным классом разделимых (сепарабельных) базисов. Частым подходом при этом было использование либо схемы Маллы [1], либо тензорного произведения одномерных базисов [2]. Использование сепарабельного базиса является традиционным для современных кодеков [2, 3], однако, **цель данной работы** – доказать, что значительно более эффективным является использование систем вейвлет-фильтров, основанных на несепарабельных базисах.

Сам процесс сжатия будет основываться на использовании каскадного алгоритма дискретного вейвлет-преобразования [4]. Данный алгоритм опирается на формулы декомпозиции (1, 2) и на формулы реконструкции:

$$c_k^j = \sum_{n \in Z} c_n^{j+1} \bar{h}_{n-2k}, \quad (1)$$

$$d_k^j = \sum_{n \in Z} c_n^{j+1} \bar{g}_{n-2k}, \quad (2)$$

$$c_k^{j+1} = \sum_{n \in Z} c_n^j h_{k-2n} + \sum_{n \in Z} d_n^j g_{k-2n}, \quad (3)$$

где  $i, j, k \in Z$ ,

$c, d$  – вейвлет-коэффициенты,

$g, h$  – вейвлет-фильтры,

$\bar{g}, \bar{h}$  – фильтры, являющиеся зеркальными перестановками  $g$  и  $h$ ,

$$g_n = (-1)^{1-n} \bar{h}_{1-n}.$$

Качество сжатия (определяемое на основе коэффициента сжатия и пикового отношения сигнала к шуму PSNR) при этом существенно зависит от выбора коэффициентов  $h_n$  фильтрующей маски.

Для трех шагов вейвлет-преобразования были построены фильтры  $H_0, H_1, H_2$  (таким образом, что  $H_k = \{h_{i,j}^k\}_{i,j=-21}^{21}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) состоит из коэффициентов, обладающих следующей симметрией:

$$h_{i,j}^k = h_{i,1-j}^k, \quad h_{i,j}^k = h_{1-i,j}^k, \quad h_{i,j}^k = h_{1-i,1-j}^k. \quad (4)$$

Поэтому, если известны  $h_{i,j}^k$  для  $i, j = 0, 1, \dots, 21, k = 0, 1, 2$ , то остальные коэффициенты определяются однозначно.

Фильтр  $H_0$  используется на первом шаге декомпозиции (при переходе с нулевого на первый уровень разделения частот), фильтр  $H_1$  – при втором (с первого на второй), и фильтр  $H_2$  – на третьем (со второго на третий) соответственно.

Для разделения частот на каждом уровне с помощью полученных масок фильтров строится набор фильтров по следующим правилам:

$$G^{k,1} = \{g_{n,m}^{k,1}\}, \quad \text{где } g_{n,m}^{k,1} = (-1)^m h_{n-1,m}^k,$$

$$G^{k,2} = \{g_{n,m}^{k,2}\}, \quad \text{где } g_{n,m}^{k,2} = (-1)^n h_{n,m}^k,$$

$$G^{k,3} = \{g_{n,m}^{k,3}\}, \quad \text{где } g_{n,m}^{k,3} = (-1)^{n+m} h_{n-1,m}^k$$

Обозначим через  $c_{i,j}^{0,0}$  исходное значение цветовой компоненты для пикселя с номером  $(i, j)$ .

Используя последовательность коэффициентов  $h_{i,j}^0$ , проведем фильтрацию изображения на низкие  $c_{n,m}^{0,1}$ ; средние  $c_{n,m}^{1,1}, c_{n,m}^{2,1}$  и высокие  $c_{n,m}^{3,1}$  частоты в соответствии с формулами декомпозиции:

$$c_{n,m}^{0,1} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,0} h_{i-2n,j-2m}^0, \quad (5)$$

$$c_{n,m}^{k,1} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,0} g_{i-2n,j-2m}^{0,k}, \quad (6)$$

где  $k = 1, 2, 3$ .

В результате получим отфильтрованные высокие и низкие частоты изображения, разложенные в соответствующие четыре панели коэффициентов (рис. 1).

Для панели значений  $c_{n,m}^{0,1}$  применим те же формулы декомпозиции, заменив фильтр  $H_0$  на фильтр  $H_1$ ;  $G^{0,1}$  – на  $G^{1,1}$ ;  $G^{0,2}$  – на  $G^{1,2}$ ;  $G^{0,3}$  – на  $G^{1,3}$ .

$$c_{n,m}^{0,2} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,1} h_{i-2n,j-2m}^1, \quad (7)$$

$$c_{n,m}^{k,2} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,1} g_{i-2n,j-2m}^{1,k}, \quad (8)$$

где  $k = 1, 2, 3$ .

$c_{n,m}^{0,1}$	$c_{n,m}^{2,1}$
$c_{n,m}^{1,1}$	$c_{n,m}^{3,1}$

Рисунок 1 – Распределение коэффициентов после первого уровня преобразования

Аналогично используем формулы декомпозиции для панелей средних и высоких частот.

После этого шага применяем еще раз формулы декомпозиции, но уже с маской  $H_2, G^{2,1}, G^{2,2}, G^{2,3}$ . В результате получим 64 панели коэффициентов.

Далее все коэффициенты упорядочиваются по убыванию, и данные квантуются по равномерной шкале. Под квантованием понимается нелинейная операция, приводящая к сокращению объема передаваемых данных и, соответственно, к потере информации. В данном методе используется скалярное квантование, в котором каждый элемент  $y$  из множества коэффициентов квантуется индивидуально. Проквантованные коэффициенты обозначим через  $y_q = Q[y]$ , где  $Q[\bullet]$  – оператор квантования. Скалярное квантование переводит интервалы действительных чисел  $(q_i^k + q_{i+1}^k)$  в действительные числа для всех  $y[k]$ , удовлетворяющих условию  $q_i^k \leq y[k] < q_{i+1}^k$ :

$$y_q[k] = \frac{1}{2}(q_i^k + q_{i+1}^k),$$

где  $i$  – уровень квантования;  $k$  – шаг квантования.

Далее квантованные значения кодируются методом RLE и методом арифметического кодирования.

Последовательно применяя скалярное квантование, метод сжатия по Хаффману и метод арифметического кодирования, получаем результирующий файл данных.

Для восстановления закодированного изображения используются формулы реконструкции. По заданным значениям  $c_{n,m}^{0,3}, c_{n,m}^{1,3}, c_{n,m}^{2,3}, c_{n,m}^{3,3}$ , вычисляется  $c_{n,m}^{0,2}$  согласно формуле:

$$c_{n,m}^{0,2} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,3} h_{n-2i,m-2j}^3 + \sum_{p=1}^3 \sum_{i,j} c_{i,j}^{p,3} g_{n-2i,m-2j}^{p,3}, \quad (9)$$

где  $k = 1, 2, 3$ .

Аналогично находим  $c_{n,m}^{0,1}$ :

$$c_{n,m}^{0,1} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,2} h_{n-2i,m-2j}^2 + \sum_{p=1}^3 \sum_{i,j} c_{i,j}^{p,2} g_{n-2i,m-2j}^{p,2}, \quad (10)$$

и  $c_{n,m}^{0,0}$ :

$$c_{n,m}^{0,0} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,1} h_{n-2i,m-2j}^1 + \sum_{p=1}^3 \sum_{i,j} c_{i,j}^{p,1} g_{n-2i,m-2j}^{p,1}, \quad (11)$$

где  $k = 1, 2, 3$ .

По этой же схеме находятся значения  $c_{n,m}^{1,2}, c_{n,m}^{2,2}, c_{n,m}^{3,2}$  и др.

Общая схема алгоритма приведена на рис. 2.

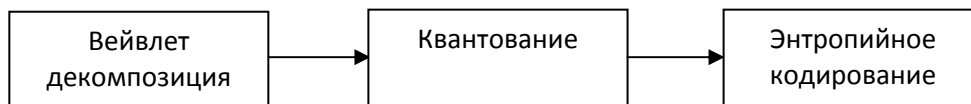


Рисунок 2 – Схема сжатия на основе несепарабельных вейвлет-базисов

Стоит также отметить, что для уменьшения влияния границ изображение с левого и верхнего краев продолжается четным образом и замыкается на противоположный край. При этом для расчетов изображение преобразовывается из RGB в YCbCr по формулам:

$$Y = \frac{1}{23}(7R + 2B + 14G),$$

$$Cb = -\frac{4}{23}(R - 3B + 2G),$$

$$Cr = \frac{4}{69}(8R - B - 7G).$$

После восстановления компонентов YCbCr цветовая гамма преобразовывается обратно в палитру RGB:

$$R = Y + \frac{3}{2}Cr,$$

$$G = Y - \frac{1}{4}(Cb + 3Cr),$$

$$B = Y + \frac{7}{4}Cb.$$

Метод был протестирован на ряде изображений. Некоторые результаты приведены далее в табл. 1.

Таблица 1 – Результат сжатия тестовых изображений

№ изображения	Степень сжатия	Качество восстановленного изображения PSNR							
		JPEG2000				Предлагаемый метод			
		Y	Cr	Cb	RGB	Y	Cr	Cb	RGB
1	29,1	27,81	38,03	37,46	27,62	31,19	32,11	33,53	29,94
2	26,7	26,91	35,72	36,32	26,65	30,01	31,56	32,13	28,85
3	34,26	29,02	37,75	37,65	28,86	30,49	40,52	34,1	29,99

На рис. 3, 4, 5 приведены примеры изображений, для сжатия которых использовался один из наиболее простых алгоритмов построения несепарабельных вейвлетов.

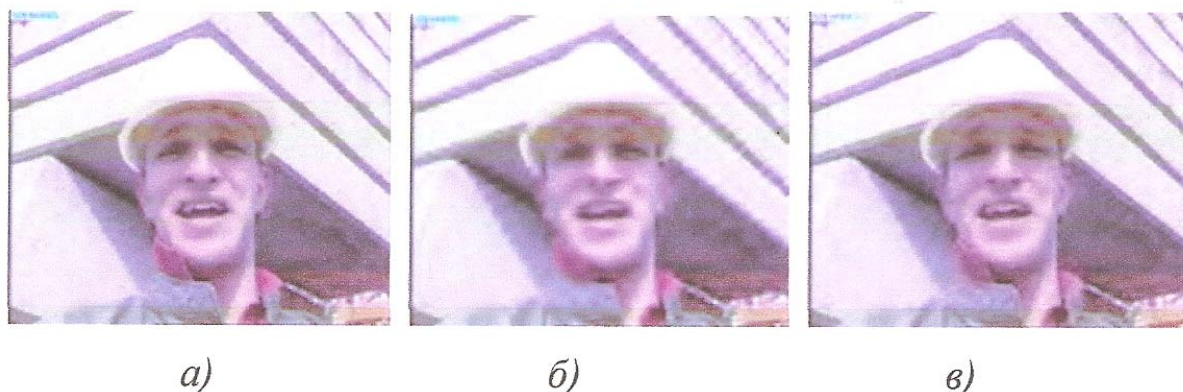


Рисунок 3 – а) Исходное изображение № 1; б) сжатое изображение № 1 методом JPEG2000; в) сжатое изображение № 1 предлагаемым методом



а)

б)

в)

Рисунок 4 – а) Исходное изображение № 2; б) сжатое изображение № 2 методом JPEG2000; в) сжатое изображение № 2 предлагаемым методом



а)

б)

в)

Рисунок 5 – а) Исходное изображение № 3; б) сжатое изображение № 3 методом JPEG2000; в) сжатое изображение № 3 предлагаемым методом

Восстановление функции по узлам регулярной решетки относится к классическим задачам теории аппроксимации. Продолжительное время классическими методами восстановления функции являлись алгебраические и тригонометрические полиномы и сплайны, основой которых являлась теория вейвлет-функций. Процесс восстановления на основе средних значений оставался наименее исследованным разделом теории приближений.

В работе впервые была поставлена задача линейного метода восстановления двумерных линейных функций по значениям элементов правильных квадратов решетки, основанная на расслоении двумерных данных. В работе было доказано, что построенный оператор восстановления совокупности двумерных данных является линейным оператором сумматорного типа с базовой функцией, имеющей малый носитель. Доказано, что базисные функции, представленные в виде линейной комбинации сжатых в два раза и смещенных тех же базисных функций, могут быть использованы в качестве масштабирующих функций в кратномасштабном анализе [1]. При этом возникает возможность использовать их для постоянного кодирования процесса сжатия и восстановления данных.

Все рассмотренные методы порожденные операторами от 6 до 12 порядка.

Всего таких методов 72.

В качестве примера приведем результат, соответствующий апертуре  $A^{10}$  (рис. 6).

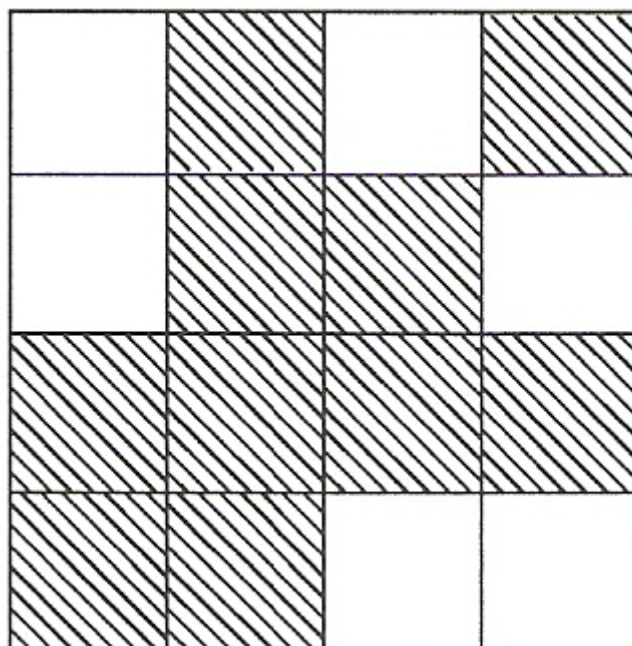


Рисунок 6 – Геометрическая апертура  $A^{10}$

Выбирая в качестве тестовых функций маномы  $x^v y^\mu$  ( $0 \leq v, \mu \leq 3$  и пары  $v = 4, \mu = 1, \mu = 4, v = 1$ ) приходим к функционалу.

$$\beta^{10} = \{a_{i,j}^{10}\}_{i,j=-1}^2 = \frac{1}{512} \begin{pmatrix} 0 & -21 & 0 & -3 \\ 0 & 102 & 34 & 0 \\ -50 & 409 & 102 & -21 \\ 10 & -50 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Ниже приведены графики базисной функции и поточечной нормы (рис. 7, 8). Доказано, что базисная функция является несепарабельным вейвлетом. Предложена стратегия построения несепарабельных вейвлетов различного уровня и сложности. Алгоритмы в работе не рассматриваются в силу их алгоритмической сложности и отсутствия конструктивных методов выбора оптимальных методов их построения.

На рис. 7 приведен более сложный класс несепарабельных вейвлетов.

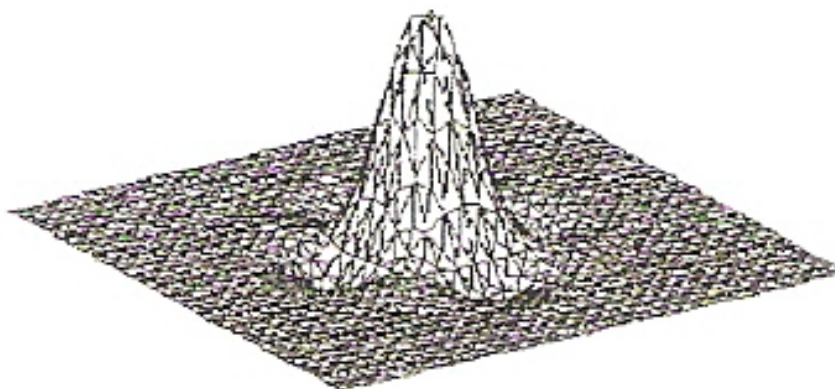


Рисунок 7 – График функции  $\Psi = (A_1^{10}, \beta, x, y)$

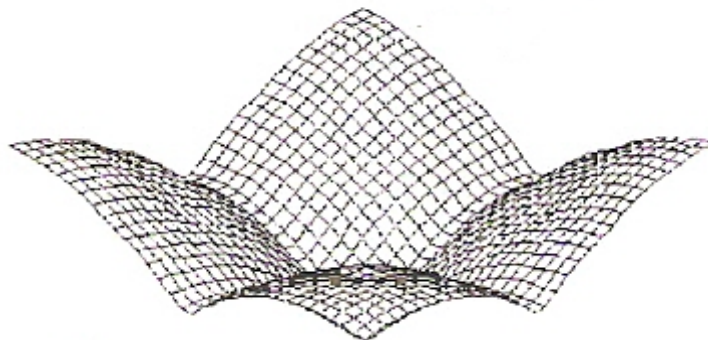


Рисунок 8 – График функции  $N_6(A_1^{10}, \beta, x, y)$

Получены два класса несепарабельных вейвлетов, которые были применены для сжатия изображения. Из результатов видно, что несепарабельные вейвлеты позволяют достичь существенно более высокого качества сжатия изображений с минимальными потерями.

**Выводы.** Таким образом, полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Несепарабельные вейвлеты в большинстве прикладных задач сжатия статических изображений позволяют достичь более высокого качества сжатия изображений. Это, прежде всего, касается проблемы минимизации потерь информации. Качество сжатия изображений можно всегда увеличивать, за исключением тех случаев, когда процедура усреднения носит асимметрический характер относительно точки усреднения. Степень сжатия изображений достигает максимум тогда, когда процесс усреднения носит равномерный характер во всех направлениях относительно выбранной точки усреднения.

#### **Литература**

1. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов / Малла С. – М.: Мир, 2005. – С. 658.
2. Kovacevic J. Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for  $R^{sup.n}$ . J. / Kovacevic J., Vetterli M. // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1992. – Vol. 38. – № 2. – P. 533-555.
3. Cohen A. I. Non-separable bidimensional wavelet bases / Cohen A., Daubechies I. // Rev. Mat. Iberoamericana. – 1993 – Vol.9. – № 1. – P. 51-137.
4. Воробьев В.И. Теория и практика вейвлет-преобразования / Воробьев В.И., Грибунин В.Г. – СПб.: ВУС, 1999. – С. 204.
5. Лигун А.А. Асимптотические методы восстановления кривых / Лигун А.А., Шумейко А.А. – К.: Изд. Института математики НАН Украины, 1997.