

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ЭКВИВАЛЕНТНОГО
ПОВЕРХНОСТНОГО ИМПЕДАНСА КАНАВКИ**

**AN APPROXIMATE FORMULAE OF AN EQUIVALENT
SURFACE IMPEDANCE OF A SINGLE FLUTE**

Аннотация. Предложены инженерные формулы расчета эквивалентного поверхностного импеданса одиночной канавки.

Summary. The analytical formulas for calculating of equivalent surface impedance of a single flute are offered.

Известно, что импедансные поверхности находят применение при разработке: устройств СВЧ с заданными свойствами [1], импедансных антенн с заданными характеристиками излучения [2, 3], развязывающих антенных структур [4, 5], направляющих систем с требуемыми характеристиками [6] и др. В качестве импедансных поверхностей широко используются ребристые структуры, представляющие собой систему канавок прямоугольного профиля, расположенных на проводящей поверхности [4, 7, 8].

Рассмотрение задач анализа и синтеза ребристых структур обычно проводится в импедансной постановке. При этом в качестве характеристики импедансных свойств канавок используется либо поверхностный импеданс (ПИ), либо эквивалентный поверхностный импеданс (ЭПИ) канавки.

ПИ определяется как отношение касательных составляющих векторов электрического и магнитного полей в раскрытие канавки при учете только одного (основного) типа волны, возбуждающегося в канавке (в волноводе, образующем канавку) [2, 3]. При таком определении ПИ является сторонним (не зависит от структуры поля сторонних источников, возбуждающих канавку), не зависит от ширины канавки и неограничен при определенных значениях глубины канавки. Последнее приводит к значительным ошибкам при рассмотрении задач анализа ребристых структур и при реализации структур с заданными импедансными свойствами.

В работе [9] показано, что при учете высших типов волн, возбуждающихся в канавке, отношение касательных составляющих векторов электрического и магнитного полей существенно меняется в раскрытие канавки и не может служить характеристикой импедансных свойств канавки. В [9] импедансные свойства «апертуры» канавки предложено характеризовать величиной ЭПИ, который определяется на основе энергетических соображений. При этом ЭПИ зависит от ширины канавки и стремится к ПИ при уменьшении ширины канавки.

В [9] показано, что для расчета величины ЭПИ (при заданных геометрических размерах канавки) необходимо для каждой длины волны решать бесконечную систему линейных алгебраических уравнений.

Целью настоящей работы является получение приближенных (инженерных) формул для ЭПИ одиночной канавки, расположенной в идеально проводящей плоскости. Такие формулы необходимы при рассмотрении задач, для решения которых требуется знать поведение ЭПИ при изменении от частоты и геометрических размеров канавок.

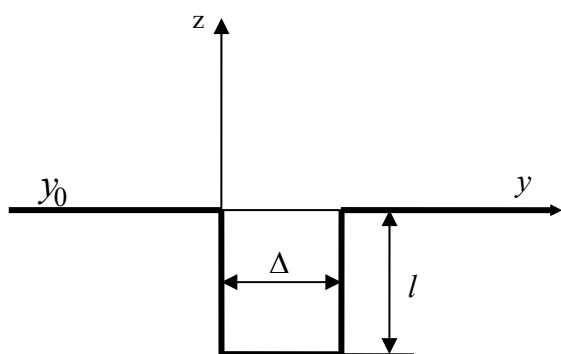


Рисунок 1 – Геометрия задачи

1. Общие соображения

Рассмотрим следующую двумерную задачу. На бесконечной идеально проводящей плоскости прорезана двумерная канавка шириной Δ и глубиной l . Пусть канавка возбуждается нитью магнитного тока бесконечной длины, которая расположена параллельно канавке на расстоянии y_0 от нее (рис. 1).

Как уже отмечалось, в [9] импедансные свойства канавки предложено характеризовать ЭПИ. При этом величина ЭПИ (Z_s) определяется следующей формулой:

$$Z_3 = \frac{\int_0^{\Delta} E_y(y) H_x^*(y) dy}{\int_0^{\Delta} |H_x(y)|^2 dy}, \quad (1)$$

где $E_y(y)$, $H_x(y)$ – комплексные амплитуды касательных составляющих векторов электрического и магнитного поля в раскрыве канавки.

В [9] показано, что для «узких» канавок ($\Delta < \lambda/2$) ЭПИ может быть использован при рассмотрении таких задач анализа и синтеза ребристых структур, которые возбуждаются источниками, расположенными на плоскости XOZ вдали от структуры.

Формула для расчета величины ЭПИ канавки, заполненной диэлектриком без потерь, имеет следующий вид:

$$Z_3 = iW \frac{|C_0|^2 \operatorname{tg}(2\pi \frac{l}{\lambda_0}) - 0,5 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 u_n \operatorname{th} \left[2\pi u_n \frac{l}{\lambda_0} \right]}{|C_0|^2 + 0,5 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2}, \quad (2)$$

где λ_0 – длина волны в верхнем полупространстве с параметрами ϵ_{a1}, μ_{a1} ; $u_n = \sqrt{\left(\frac{n\lambda}{2\Delta}\right)^2 - 1}$;

$W = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}$; ϵ_a, μ_a – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей канавку;

C_n – коэффициенты, которые определяют амплитуды волн, возбужденных в канавке.

Коэффициенты C_n в (2) находятся из следующей системы линейных уравнений:

$$\delta_m C_m + iC_0 W \operatorname{tg} \left(2\pi \frac{l}{\lambda_0} \right) F_{m0} - iW \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n \operatorname{th} \left(u_n 2\pi \frac{l}{\lambda_0} \right) F_{mn} = G_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\delta_0 = 1, \delta_m = 0,5$ при $m \geq 1$,

$$F_{mn} = \pi \frac{\Delta}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\epsilon_{a1}}{\mu_{a1}}} \int_0^1 \int_0^1 \cos(m\pi x) \cos(n\pi y) H_0^{(2)} \left(2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0} |x - y| \right) dx dy, \quad (4)$$

$$G_m = \int_0^1 \cos m\pi y H_0^{(2)} \left(2\pi \frac{\Delta}{\lambda_0} \left| y - \frac{y_0}{\Delta} \right| \right) dy. \quad (5)$$

Отметим, что формулы (2) – (5) получены путем простейших преобразований формул, приведенных в [9]. Проанализируем эти формулы.

2. Об эталонном значении эквивалентного поверхностного импеданса

Из формул (2) – (5) следует, что ЭПИ канавки формально зависит от величины y_0 , т.е. от расстояния между источником возбуждения и канавкой. В [9] показано, что при $y_0 > 0,5\lambda$ ЭПИ практически не зависит от y_0 , т.е. является сторонней величиной. В то же время в [9] не определены формулы, которые можно использовать для расчета значений ЭПИ, которые можно принять за эталон.

Нетрудно видеть, что для расчета эталонных значений ЭПИ необходимо величину y_0 , входящую в формулу (5), устремить к бесконечности. В этом случае, при вычислении интеграла в (5) можно использовать асимптотику функции Ганкеля следующего вида:

$$H_0^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[-i \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad x \gg 1. \quad (6)$$

Подставим асимптотику (6) в равенств (5). Тогда интеграл в (5) легко вычисляется и с точностью до несущественной (при нахождении величины ЭПИ) постоянной равен следующему значению:

$$G_m = \frac{[1 - \exp[i\pi(m - 2\Delta/\lambda_0)]]}{[(m)^2 - (2\Delta/\lambda_0)^2]}, m = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Подставим соотношение (7) в систему (3), тогда

$$\delta_m C_m + iC_0 W \operatorname{tg}\left(2\pi \frac{l}{\lambda_0}\right) F_{m0} - iW \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n \operatorname{th}\left(u_n 2\pi \frac{l}{\lambda_0}\right) F_{mn} = \frac{1 - \exp[i\pi(m - 2\Delta/\lambda_0)]}{[(m)^2 - (2\Delta/\lambda_0)^2]}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Соотношение (8) является системой линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка для определения коэффициентов C_m . Зная эти коэффициенты, по формуле (2) можно рассчитать эталонные значения ЭПИ рассматриваемой канавки. Отметим, что формула (2) пригодна для канавки произвольной глубины при $\Delta < 0,5\lambda$.

3. Анализ формул, определяющих ЭПИ

Проанализируем формулы (2) и (8). При этом будем считать, что $\varepsilon_{a1} = \varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_{a1} = \mu_a = \mu_0$. Очевидно, что в этом случае $\lambda_0 = \lambda$.

Из формулы (2) видно, что ЭПИ канавки без потерь является чисто мнимой величиной, т.е. $Z_y = iX_y$. В дальнейшем будем рассматривать нормированную величину $X_{эн}(l/\lambda)$, которую определим следующим образом:

$$X_{эн}(l/\lambda) = X_y/W \quad (9)$$

Определим число слагаемых, входящих в бесконечные суммы формул (2) и (8), которые надо учесть для получения значений ЭПИ канавки, мало отличающихся от эталонных.

Для этого по формулам (2), (4) и (8) были проведены численные расчеты величины $X_{эн}(l/\lambda)$ как функции глубины канавки ($0 < l/\lambda < 0,566$). Расчеты проводились для различных значений ширины канавки ($0,1 \leq \Delta/\lambda \leq 0,45$). При этом в бесконечных суммах формул (2) и (8) учитывалось от одного до 20 слагаемых.

Анализ полученных результатов позволяет заключить, что для вычисления величины ЭПИ достаточно учесть амплитуды девяти-десяти типов волн, возбуждающихся в канавке. Учет большего числа волн не приводит к заметному изменению результатов. Таким образом, при расчете эталонных значений ЭПИ в бесконечных суммах, входящих в формулы (2) и (8), достаточно ограничиться девятью слагаемыми. Отметим, что этот факт был также отмечен в [9] при вычислении ЭПИ по формулам (2) – (5) при $y_0 = 0,5\lambda$.

На рис. 2 приведены примеры зависимостей (от глубины канавки) эталонных значений ЭПИ. На оси ординат рис. 2 отложены значения величины $X_{эн}(l/\lambda)$, а на оси абсцисс отношение l/λ . При этом сплошная линия соответствует $\Delta/\lambda = 0,1$, пунктирная – $\Delta/\lambda = 0,33$, а штрихпунктирная – $\Delta/\lambda = 0,45$:

– при $0 < l/\lambda < 0,025$ величина ЭПИ практически не зависит от ширины канавки и совпадает со значениями ПИ. Отсюда следует, что расчет эталонных значений ЭПИ при $0 < l/\lambda < 0,025$ можно вести по формуле $X_{эн}(l/\lambda) \approx \operatorname{tg}(2\pi l/\lambda)$;

– значения ЭПИ в экстремальных точках различны для разной ширины канавки и уменьшаются с ее увеличением. При этом значение величины $X_{эн}(l/\lambda)$ в минимуме больше чем в максимуме (рис 2). Отсюда следует, что ЭПИ канавки с емкостным импедансом больше ЭПИ канавки той же ширины с индуктивным импедансом.

Отметим, что приведенные результаты незначительно отличаются от аналогичных результатов, полученных в [9]. Эти отличия, на наш взгляд, связаны как с различной точностью расчетов, так и с тем, что в [9] расчеты проводились для $y_0 = 10\lambda$.

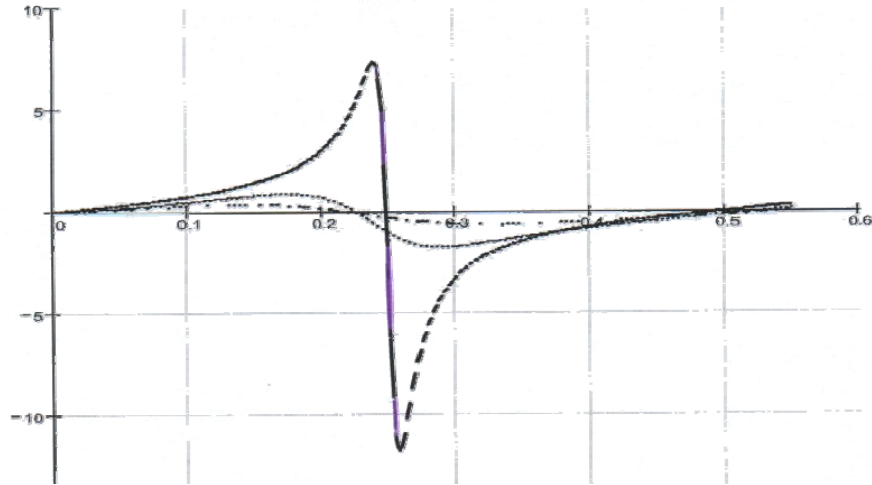


Рисунок 2 – Зависимости эталонных значений ЭПИ

Оценим погрешность определения ЭПИ при учете только нескольких первых типов волн, возбуждающихся в канавке.

Рассмотрим величины $X_{\text{эп}}(n; l/\lambda)$ ($n = 1, 2, \dots$), которые определяются по формулам (2) и (8), в бесконечных суммах которых учтены только первые n слагаемых. В предыдущем пункте показано, что эталонные значения ЭПИ практически совпадают с величиной $X_{\text{эп}}(9; l/\lambda)$, т.е. $X_{\text{эп}}(l/\lambda) \approx X_{\text{эп}}(9; l/\lambda)$.

Для оценки указанной погрешности были проведены расчеты зависимостей величин $X_{\text{эп}}(n; l/\lambda)$ для $n = 1, 2, 3$ и когда $\Delta/\lambda = 0,1; 0,33; 0,45$. На рис. 3 приведены (в качестве примера) характерные зависимости величин $X_{\text{эп}}(1; l/\lambda)$ (пунктирная линия) и $X_{\text{эп}}(l/\lambda)$ (сплошная линия) для $\Delta/\lambda = 0,33$. Отметим, что графики функций $X_{\text{эп}}(2; l/\lambda)$ и $X_{\text{эп}}(3; l/\lambda)$ на этом рисунке не приведены. Они «укладываются» между графиками функций $X_{\text{эп}}(1; l/\lambda)$ и $X_{\text{эп}}(l/\lambda)$.

Результаты расчетов позволяют отметить следующее:

- характер зависимостей $X_{\text{эп}}(n; l/\lambda)$ не меняется при изменении ширины канавки;
- величины $X_{\text{эп}}(n; l/\lambda)$ существенно отличаются от эталонных значений ЭПИ в максимуме, т. е. при индуктивном импедансе канавки;
- положения нулей функций $X_{\text{эп}}(n; l/\lambda)$ незначительно отличаются от положения нулей функции $X_{\text{эп}}(l/\lambda)$.

Используя численные результаты, была определена относительная погрешность вычисления ЭПИ по формулам для $X_{\text{эп}}(n; l/\lambda)$ при $n = 1, 2, 3$. В табл. 1 приведены значения относительной погрешности в максимуме ЭПИ.

Таблица 1

n		1	2	3
Относительная погрешность в максимуме ЭПИ, %	$\Delta/\lambda = 0,1$	14,2	5,4	2,2
	$\Delta/\lambda = 0,33$	16,6	7,1	4,4
	$\Delta/\lambda = 0,45$	24,3	8,7	6,3

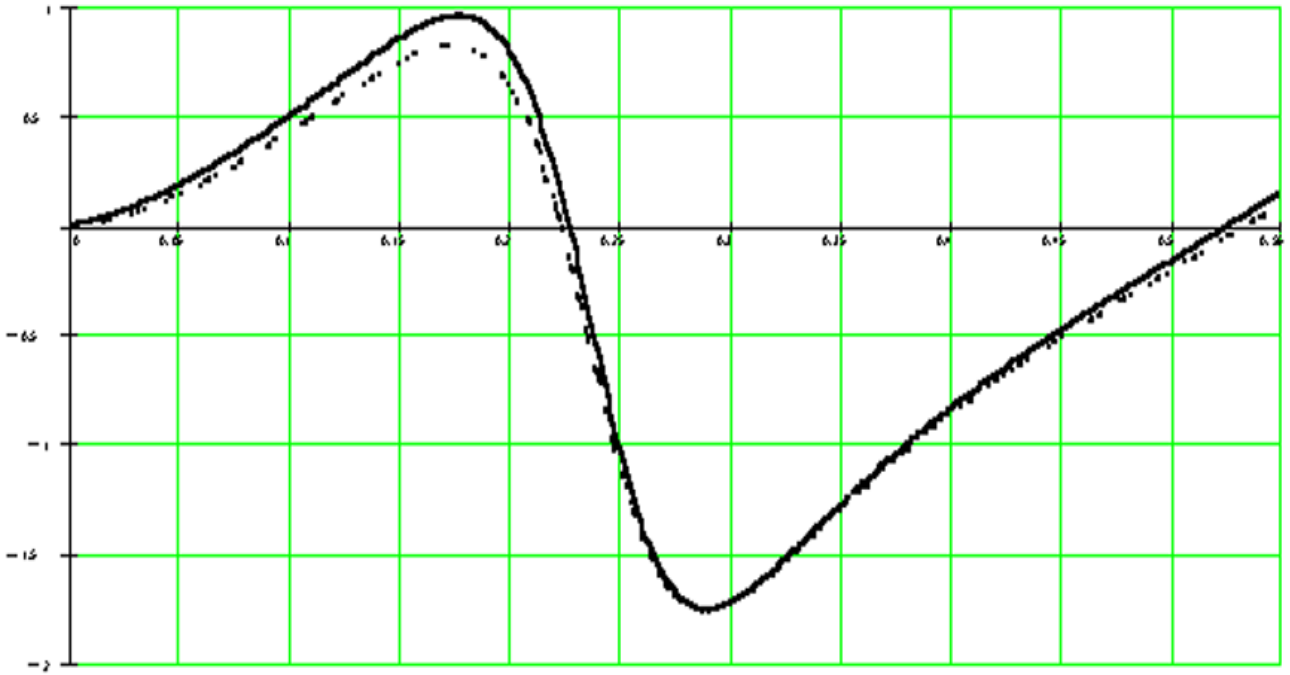


Рисунок 3 – Зависимости величин $X_{эп}(1;l/\lambda)$ и $X_{эп}(l/\lambda)$

Результаты, приведенные в табл. 1, позволяют выбрать нужную величину (из величин $X_{эп}(n;l/\lambda)$ ($n = 1, 2, 3$)) для расчета ЭПИ. Выбор определяется требуемой точностью вычисления ЭПИ.

3. Оценим ошибку определения ЭПИ за счет неточности выполнения геометрических размеров канавки. Для такой оценки были проведены расчеты зависимости эталонного значения ЭПИ канавок, ширина которых незначительно отличается друг от друга. На рис. 4 приведен пример таких расчетов. На этом рисунке средняя кривая соответствует зависимости $X_{эп}(l/\lambda)$ для $\Delta/\lambda = 0,33$, а верхняя и нижняя кривые для $\Delta/\lambda = 0,3$ и $\Delta/\lambda = 0,36$.

Анализ численных результатов позволяет заключить, что погрешность выполнения ширины канавки в 5% приводит к значительной ошибке определения ЭПИ. Эта ошибка имеет такой же порядок, что и ошибка, которая получается при использовании величины $X_{эп}(2;l/\lambda)$ для расчета ЭПИ.

Предварительные оценки показывают, что погрешность выполнения глубины и ширины канавки в 10% приводит к еще большей ошибке. Величина этой ошибки сравнима с ошибкой, которая получается при использовании величины $X_{эп}(1;l/\lambda)$.

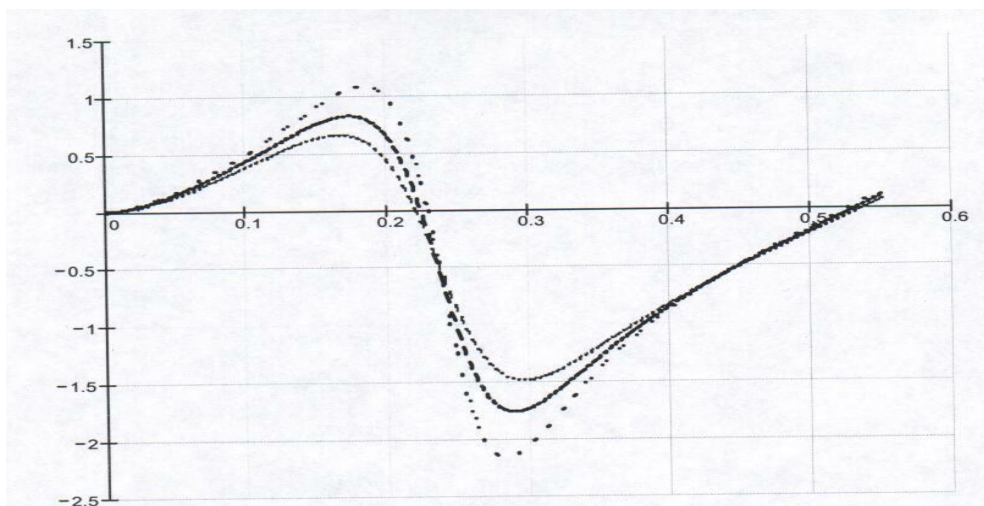


Рисунок 4 – Зависимости эталонных значений ЭПИ для различных значений Δ/λ

4. Приближенные формулы для определения ЭПИ канавки

Из результатов, изложенных выше, следует, что при проведение инженерных расчетов ЭПИ можно использовать формулы для величины $X_{эн}(1;l/\lambda)$ и $X_{эн}(2;l/\lambda)$, которые дают приемлемую для практики точность.

Для получения аналитических выражений для функций $X_{эн}(1;l/\lambda)$ и $X_{эн}(2;l/\lambda)$ рассчитаем значения коэффициентов F_{mn} , входящих в систему (8). Эти расчеты показывают, что матрица системы (8) имеет ярко выраженную диагональ. Элементы матрицы, расположенные на главной диагонали убывают с ростом m . На рис. 5 показана диаграмма, на которой приведены величины $|F_{mn}/F_{00}|$. Проведенные расчеты позволили выявить следующую интересную и важную закономерность. Значения коэффициентов F_{mn} , для которых величина $m + n$ является нечетной, близки к нулю (численные значения этих коэффициентов на 8 и более порядков меньше значений соседних элементов).

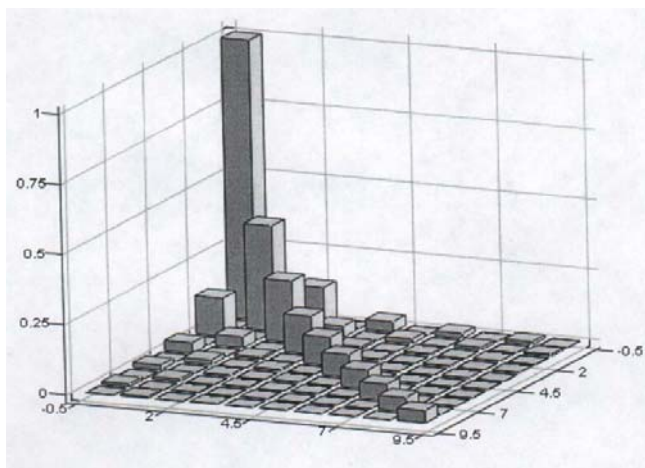


Рисунок 5 – Диаграмма поведения коэффициентов $|F_{mn}/F_{00}|$

Анализ поведения коэффициентов F_{mn} показывает, что для получения аналитических выражений для функций $X_{эн}(1;l/\lambda)$ и $X_{эн}(2;l/\lambda)$ нужно знать зависимости (от Δ/λ) только коэффициентов F_{00} , F_{11} , F_{22} и F_{20} . На рис. 6, 7, 8 и 9 приведены зависимости действительных (сплошные линии) и мнимых (пунктирные линии) частей этих коэффициентов, рассчитанные с помощью формулы (4).

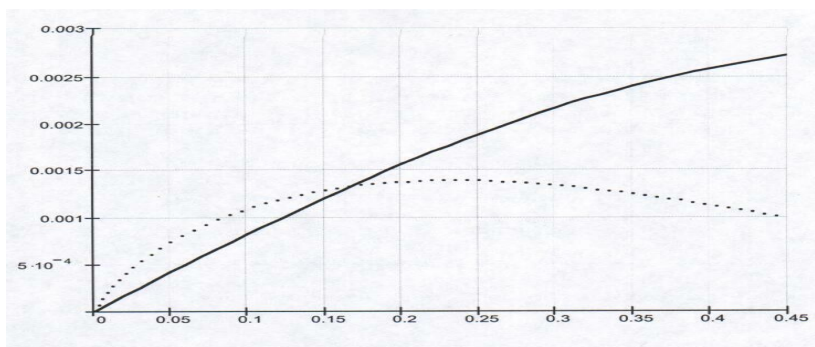


Рисунок 6 – Зависимости действительных и мнимых значений F_{00} от Δ/λ .

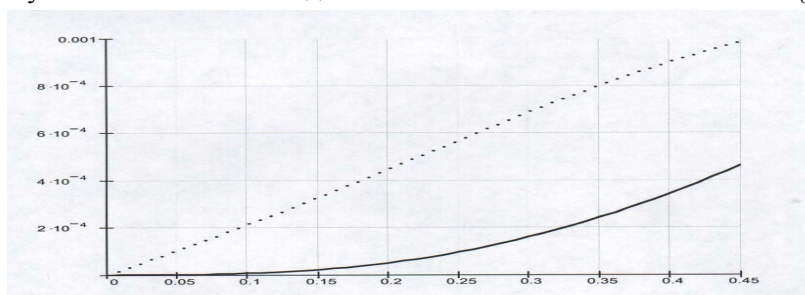


Рисунок 7 – Зависимости действительных и мнимых значений F_{11} от Δ/λ .

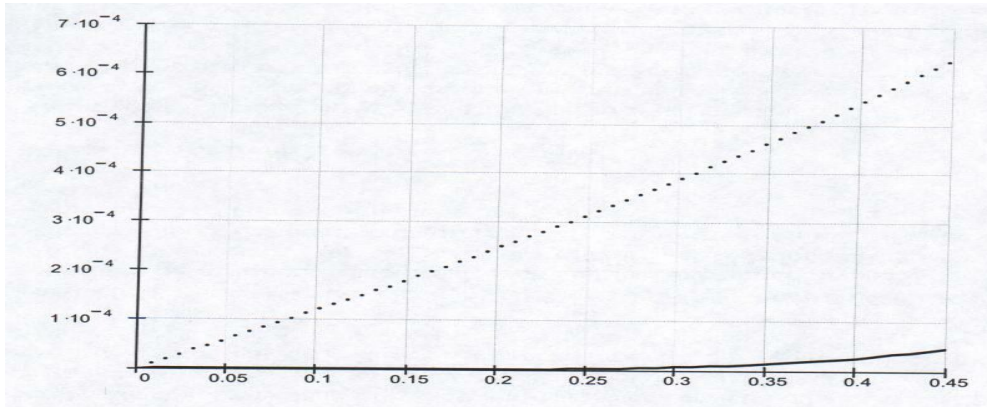


Рисунок 8 – Зависимости действительных и мнимых значений F_{22} от Δ/λ

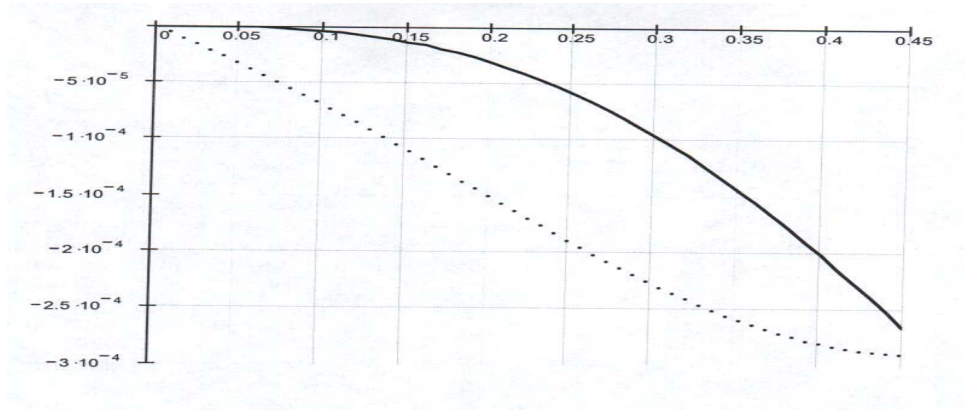


Рисунок 9 – Зависимости действительных и мнимых значений F_{20} от Δ/λ

Из изложенного выше следует, что для получения выражений для функций $X_{\text{эп}}(1;l/\lambda)$ и $X_{\text{эп}}(2;l/\lambda)$ необходимо решить соответствующую усеченную систему (8) и подставить полученные значения для коэффициентов C_n в формулу (2), ограничиваясь в ней соответствующим числом слагаемых. При этом для $X_{\text{эп}}(2;l/\lambda)$ система (8) сводится к системе трех уравнений, а для $X_{\text{эп}}(1;l/\lambda)$ – к системе двух уравнений. В результате таких вычислений получаем следующие выражения:

$$X_{\text{эп}}(1;l/\lambda) = 0,00265 \frac{\alpha(l/\lambda) - 0,5\beta(l/\lambda)V(l/\lambda)}{1 + 0,5V(l/\lambda)}, \quad (10)$$

$$X_{\text{эп}}(2;l/\lambda) = 0,00265 \frac{\alpha(l/\lambda) - 0,5[\beta(l/\lambda)V_1(l/\lambda) + \gamma(l/\lambda)V_2(l/\lambda)]}{1 + 0,5[V_1(l/\lambda) + V_2(l/\lambda)]}. \quad (11)$$

В выражениях (10) и (11) используются следующие обозначения:

$$V(l/\lambda) = \left| \frac{q_1 [1 + i\alpha(l/\lambda)F_{00}]}{q_0 [0,5 - i\beta(l/\lambda)F_{11}]} \right|^2, \quad (12)$$

$$V_1(l/\lambda) = \left| \frac{q_1 [(1 + i\alpha(l/\lambda)F_{00})(0,5 - i\gamma(l/\lambda)F_{22}) - \alpha(l/\lambda)\gamma(l/\lambda)F_{20}^2]}{[0,5 - i\beta(l/\lambda)F_{11}][q_0 \{0,5 - i\gamma(l/\lambda)F_{22}\} + i\gamma(l/\lambda)q_2 F_{20}]} \right|^2, \quad (13)$$

$$V_2(l/\lambda) = \left| \frac{q_2 (1 + i\alpha(l/\lambda)F_{00}) - iq_0 \alpha(l/\lambda)F_{20}}{q_0 (0,5 - i\gamma(l/\lambda)F_{22}) + i\gamma(l/\lambda)q_2 F_{20}} \right|^2, \quad (14)$$

$$\alpha(l/\lambda) = 120\pi \operatorname{tg}(2\pi l/\lambda), \quad (15)$$

$$\beta(l/\lambda) = 120\pi \left[\sqrt{(\lambda/2\Delta)^2 - 1} \right] th \left[\frac{2\pi l}{\lambda} \sqrt{(\lambda/2\Delta)^2 - 1} \right], \quad (16)$$

$$\gamma(l/\lambda) = 120\pi \left[\sqrt{(\lambda/\Delta)^2 - 1} \right] th \left[\frac{2\pi l}{\lambda} \sqrt{(\lambda/\Delta)^2 - 1} \right], \quad (17)$$

$$q_0 = -\frac{1 - \exp[-i2\pi\Delta/\lambda]}{(2\Delta/\lambda)^2}, \quad q_1 = \frac{1 - \exp[i\pi(1 - 2\Delta/\lambda)]}{[1 - (2\Delta/\lambda)^2]}, \quad (18)$$

$$q_2 = \frac{1 - \exp[i\pi(2 - 2\Delta/\lambda)]}{[4 - (2\Delta/\lambda)^2]}. \quad (19)$$

Выражения (10) и (11) являются приближенными формулами, которые позволяют рассчитать эквивалентный поверхностный импеданс одиночной канавки произвольной глубины, ширина которой меняется в пределах от 0 до $0,5\lambda$. Отметим, что величины F_{00} , F_{11} , F_{22} и F_{20} , входящие в полученные приближенные формулы, находятся из графиков, представленных на рис. 6, 7, 8 и 9.

Результаты статьи позволяют заключить, что при расчете ЭПИ канавки шириной $\Delta/\lambda \leq 0,1$ можно использовать формулу (10), а при расчете ЭПИ канавки шириной $0,1 < \Delta/\lambda \leq 0,45$ можно использовать формулу (11). При этом погрешность определения ЭПИ будет не более 10%.

Литература

1. Моденов В.П. Собственные колебания электромагнитного резонатора с импедансной сферической поверхностью // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45. – №10. – С. 1198-1201.
2. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенно-фидерные устройства. – М.: Из-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1959. – С. 551.
3. Терешин О.Н., Седов В.М., Чаплин В.Ф. Синтез антенн на замедляющих структурах. – М.: Связь, 1980. – С. 192.
4. Кюркчан А.Г. Связь между антеннами в присутствии ребристых структур // Радиотехника и электроника. – 1977. – Т. 22. – № 7. – С. 1362.
5. Габриэльян Д. Д., Звездина М.Ю., Костенко П.И. Уменьшение уровня бокового и заднего излучения антенны на основе использования импедансных структур // Радиоэлектроника. – 2003. – №2. – С. 38-43.
6. Экспериментальное исследование структуры высокочастотного поля в сверхразмерной осесимметричной периодической структуре / У.Ф. Мясин, С.Г. Чигарев, В.В. Евдокимов, А.Ю. Ильин // Радиотехника и электроника. – 2001. – Т. 46. – № 6. – С. 752-756.
7. Терешин О.Н. Развязка двух антенн щелевого типа при помощи ребристой структуры, расположенной в плоскости щелей // Радиотехника и электроника. – 1960. – Т.5. – №12. – С.1944-1950.
8. Марцафей В.В., Швайко И.Г. Влияние ребристых структур на взаимодействие антенных решеток // Изв. Вузов "Радиоэлектроника". – 1982. – Т. 25. – №2. – С. 12-19.
9. Цалиев Т.А., Черенков В.С. Возбуждение канавки и эквивалентный поверхностный импеданс ребристых структур // Радиотехника и электроника. – 1985. – Т. 30. – № 9. – С. 1689-1694.