УДК 621.371:621.372

Дмитрієва І.Ю.
Дмитриева И.Ю.
Dmitrieva I.Yu.

ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ В ОДНОРІДНИХ ЛІНІЯХ ПРИ ЕКСПОФУНКЦІОНАЛЬНИХ ВПЛИВАХ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНЫХ ЛИНИЯХ ПРИ ЭКСПОФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN HOMOGENEOUS LINES BY EXPOFUNCTIONAL INFLUENCES

Анотація. Запропоновано аналітичне дослідження поширення електромагнітних хвиль і сигналів у довільних однорідних ізотропних лініях при експофункціональних впливах за будь-які кінцеві проміжки часу. Основою математичної моделі є спеціальний випадок диференціальної симетричної системи Максвела.

Побудовою оберненого матричного оператора цю систему зведено до узагальненого хвильового рівняння відносно всіх шуканих напруженостей електромагнітного поля. Доведено критерій правомірності застосування даного методу у класі неузагальнених функцій. Подані умови розв'язання дозволяють коректно формулювати та аналізувати крайові задачі, що математично описують різні випадки поширення хвиль і сигналів, включаючи і згаданий вище. Розв'язання запропонованих крайових задач отримано у явному вигляді класичним методом інтегральних перетворень за просторовою змінною. При цьому аргумент часу, що є основним у нестаціонарних процесах, не порушується.

Аннотация. Предлагается аналитическое исследование распространения электромагнитных волн и сигналов в произвольных однородных изотропных линиях при экспофункциональных воздействиях за любые конечные промежутки времени. Основой математической модели является специальный случай дифференциальной симметричной системы Максвелла.

Построением обратного матричного оператора эта система сводится к общему волновому уравнению относительно всех искомых напряженностей электромагнитного поля. Доказан критерий правомерности применения данного метода в классе не обобщенных функций. Представленные условия разрешимости позволяют корректно формулировать и анализировать краевые задачи, математически описывающие различные случаи распространения волн и сигналов, включая и упомянутый выше. Решение предложенных краевых задач получено в явном виде классическим методом интегральных преобразований по пространственной переменной. При этом аргумент времени, являющийся основным в нестационарных процессах, не затрагивается.

Summary. We propose analytical study of electromagnetic wave and signal propagation in arbitrary homogeneous isotropic lines by expofunctional influences during any finite time intervals. The basis of mathematical model is the specific case of differential symmetrical Maxwell system.

The inverse matrix operator construction reduces this system to the general wave equation regarding all unknown electromagnetic field intensities. Legitimacy of the proposed method applicability in the non generalized functional classes is proved by the corresponding criterion. Suggested solvability conditions allow formulating and analyzing correctly those boundary problems that describe mathematically various signal and wave propagation, including the above mentioned statement as well. Explicit solution of respective boundary problems is got using the classical integral transform method by the spatial variable. The temporal one, as the main in the non stationary cases, remains none affected.

Добре відомо, що електромагнітне поле та багатомірні електродинамічні процеси часто описуються системами диференціальних рівнянь у частинних похідних [1, 2]. Природно, що тут доводиться зіткатися з пошуком невідомої вектор-функції, відповідальної або за процес, або за структуру пристрою, що відображає передавання електромагнітних хвиль та сигналів [3, 4].

Отже, *проблема* утворення нових загальних методів вивчення вищезазначених функцій виявляється необхідною як з теоретичної, так і з практичної точок зору.

Оскільки вищезгадана невідома вектор-функція однозначно задається своїми скалярними компонентами та, як правило, присутня у деякій системі диференціальних рівнянь у частинних похідних, в першу чергу треба зробити так звану діагоналізацію даної системи. Ця операція означає зведення початкової матричної задачі до еквівалентної сукупності скалярних рівнянь, кожне з яких залежить лише від однієї невідомої компоненти шуканої вектор-функції. Звичайно, розв'язання таких скалярних рівнянь або добре відомо, або розробка методів їх розв'язання є незмірно простішою ніж вихідна постановка матричної задачі.

Класичні методи діагоналізації відображені у загальній алгебрі [5] та теорії звичайних диференціальних рівнянь [6]. Проте, у випадку системи диференціальних рівнянь у частинних похідних ефективна загальна процедура діагоналізації залишалась невизначеною навіть до сьогодні. Фактично, це означало відсутність аналітично строгого дослідження у даному напрямку прикладних та інженерних задач, включаючи питання сучасної радіотехніки та телекомунікацій.

Так, спочатку задача діагоналізації для так званої диференціальної «симетричної» системи Максвела була реалізована за допомогою операторного аналога методу Гаусса [7], а потім застосуванням побудови оберненого матричного оператора [8]. Обидва методи, як здається після аналізу існуючої відповідної наукової літератури, запропоновані вперше.

Згадана симетрична система Максвела описує поведінку електромагнітного поля при експофункціональних впливах у збуджених ізотропних однорідних лінійних середовищах, представляє математичну модель у теорії багатовимірних аналогових ланцюгів, фільтрів з розподіленими параметрами [9…11] та виглядає так

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{H} = (\sigma \pm \lambda\varepsilon_a)\vec{E} + \varepsilon_a \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\,\mathrm{CT}} \\ -\mathrm{rot}\,\vec{E} = (r \pm \lambda\mu_a)\vec{H} + \mu_a \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{e}^{\,\mathrm{CT}}. \end{cases} \tag{1}$$

Тут $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t)$, $\vec{H} = \vec{H}(x,y,z,t)$ – шукані вектор-функції зі скалярними компонентами $E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k}}(x,y,z,t)$, $H_{\mathrm{k}} = H_{\mathrm{k}}(x,y,z,t)$ ($\mathrm{k} = \overline{1,3}$) визначають напруженості електричного та магнітного полів; $\sigma, \mu_a, \varepsilon_a = \mathrm{const} > 0$ – питома провідність, абсолютна магнітна та електрична проникність середовища відповідно; $\lambda = \mathrm{const} > 0$ – параметр сигналу, що збуджує середовище. Знак попереду λ показує реакцію середовища. Поглинання сигналу відповідає "+", а активізація середовища пов'язана з "-". Теоретична стала $r > 0$ забезпечує симетричність правих частин (1) та може бути знищена на кінцевій стадії обчислювання. Задані функції $\vec{j}^{\,\mathrm{CT}} = \vec{j}^{\,\mathrm{CT}}(x,y,z,t)$, $\vec{e}^{\,\mathrm{CT}} = \vec{e}^{\,\mathrm{CT}}(x,y,z,t)$, чиї скалярні компоненти є $j_k^{\mathrm{CT}} = j_k^{\mathrm{CT}}(x,y,z,t)$, $e_k^{\mathrm{CT}} = e_k^{\mathrm{CT}}(x,y,z,t)$ $(i = \overline{1,3})$, характеризують зовнішні джерела електричного та магнітного струмів.

Хоча система (1) аналітично покриває досить широкий клас вищезгаданих інженерних явищ технічної електродинаміки, сучасні питання щодо нестаціонарного поширення хвиль та сигналів залишаються важливими також у спеціальних постановках. Це включає навіть одновимірні просторові випадки для однорідних ізотропних експофункціонально збуджених ліній, що може застосовуватись і в мобільному зв'язку. Оскільки відомо, аналітичне дослідження саме у цьому напряму ще не проводилось. Отже, *мета даної статті* полягає в аналітичному вивченні відповідної постановки, що математично зображує поширення електромагнітних хвиль та сигналів у півнескінченних одновимірних ізотропних однорідних лініях при експофункціональних збудженнях за наявності довільного обмеженого інтервалу часу.

1. Постановка задачі та попередні результати. У першу чергу, запишемо спеціальний випадок системи (1)

$$\begin{cases} \partial_1 H = (\sigma \pm \lambda\varepsilon_a)E + \varepsilon_a \dfrac{\partial E}{\partial t} + j^{\mathrm{CT}}, \\ -\partial_1 E = (r \pm \lambda\mu_a)H + \mu_a \dfrac{\partial H}{\partial t} + e^{\mathrm{CT}}, \end{cases} \tag{2}$$

де усі символи залишаються такими самими, як і в (1), тільки замість **rot** з'являється оператор $\partial_1 = \partial / \partial x$ та вектор-функції із (1) стають скалярами $E, H, j^{\mathrm{CT}}, e^{\mathrm{CT}} = E, H, j^{\mathrm{CT}}, e^{\mathrm{CT}}(x,t)$, хоча їх фізичне значення не змінюється.

Для досягнення мети даної статті потрібно сформулювати відповідну крайову задачу, що представляє математичну модель вищезгаданих явищ сучасної технічної електродинаміки. Очевидно, що для системи (2) підняте питання є неясним та неозорим. От чому (2) треба звести до спрощеного еквівалентного об'єкта, який є більш зручним для побудови необхідної крайової задачі. Природно, що як з теоретичної, так і з практичної точок зору перевага на боці не матричної, а скалярної постановки. Цей етап досягається діагоналізацією (2), що виконується у даному випадку застосуванням до (2) методу побудови оберненого матричного оператора, і який був коротко анонсований в [12]. Одночасно отримано критерій розв'язання (2), що дає можливість формулювання, існування та розв'язання у явному вигляді вищевказаної крайової задачі, а також інших, пов'язаних з (2).

Повертаючись знову до системи (2), записуємо її у матричній формі

$$MF = f\ ,\ M = \begin{bmatrix} \partial_1 & -C \\ -D & -\partial_1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} H \\ E \end{bmatrix},\quad f = \begin{bmatrix} j^{CT} \\ e^{CT} \end{bmatrix};$$

$$C = \sigma + \varepsilon_a \partial_0^*,\ D = r + \mu_a \partial_0^*;\ \partial_0^* = \partial_0 \pm \lambda,\ \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{3}$$

Побудова оберненого матричного оператора відносно M призводить до еквівалентного загального скалярного хвильового рівняння, що об'єднує всі шукані пружності електромагнітного поля, а саме:

$$M^{-1} = (\det M)^{-1} \begin{bmatrix} -\partial_1 & C \\ D & \partial_1 \end{bmatrix},\quad \det M = -\left(\partial_1^2 + \tilde{\partial}_0^2\right);$$

$$\tilde{\partial}_0^2 = CD = (\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*)(r + \mu_a \partial_0^*) = \mu_a \varepsilon_a (\partial_0^*)^2 + (\sigma\mu_a + r\varepsilon_a)\partial_0^* + r\sigma, \tag{4}$$

де M^{-1} – обернений оператор до M , а $\det M$ – визначник M .

У свою чергу, згадане загальне скалярне хвильове рівняння, що еквівалентне (2)$\equiv$(3), має такий вигляд

$$-(\partial_1^2 + \tilde{\partial}_0^2)F = \tilde{f}\ ;\ \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix},\ \tilde{f}_1 = -\partial_1 j^{CT} + Ce^{\mathrm{CT}},\ \tilde{f}_2 = \partial_1 e^{\mathrm{CT}} + Dj^{\mathrm{CT}}, \tag{5}$$

де F визначено у (3), а частинний диференціальний оператор, застосований до F , описано в (4). Дослідження ядра M $(\mathrm{Ker}\, M)$ [13] у термінах $\det M$ (4) приводить до критерію розв'язання (2), який повністю доведено в [12], та звучить так.

Критерій розв'язання системи (2). *Спеціальний випадок симетричної диференціальної системи Максвела – (2) розв'язується у явному вигляді у сенсі еквівалентності загальному скалярному хвильовому рівнянню у частинних похідних (5), тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови*

$$\left[\begin{array}{l} \partial_1^2 > \left(\dfrac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}} - r\sqrt{\dfrac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\right)\right)^2, \\ \left\{\begin{array}{l} \partial_1^2 \le \left(\dfrac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}} - r\sqrt{\dfrac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\right)\right)^2, \\ \partial_0 \ne \mp\lambda - \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_a} + \dfrac{r}{\mu_a}\right) \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_a} - \dfrac{r}{\mu_a}\right)^2 - \dfrac{4\partial_1^2}{\mu_a \varepsilon_a}}\right) \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{6}$$

розглядаючи при цьому тільки звичайні класичні, а не узагальнені функції.

Необхідність та достатність легко перевіряються відповідним застосуванням оберненого оператора M^{-1} до матриці з (3)$\equiv$(2) та вихідного оператора M – до загального скалярного хвильового рівняння (5). Числові значення нерівностей (6) зрозуміло стосується їх дії до тих функцій, що розглядаються у конкретних задачах.

2. Основні результати. Отриманий критерій надає реальну можливість формулювання крайових задач, що є математичними моделями поширення сигналів та / або електромагнітних хвиль у різних однорідних ізотропних лініях, в тому числі, і пів нескінченних, коли має місце експофункціональне збудження середовища. Отже, розглядається наступна крайова задача

$$\begin{cases} -\left(\partial_1^2 + \tilde{\partial}_0^2\right)F = \tilde{f},\ x \in [0, +\infty),\quad t \in [0, T]; \\ F(x,0) = g_1(x),\ F(x,T) = g_2(x),\ F(0,t) = g_3(t); \\ \partial_1^k F(x,t)|_{x=+\infty} = 0,\ (k = 0, 1), \end{cases} \tag{7}$$

де $F,\ \tilde{f} = F,\ \tilde{f}(x,t)$ – із (5), а функції $g_i \ldots \left(i = \overline{1,3}\right)$ неперервні та задані на відповідних множинах змінних x, t .

Порівняно з аналогічною постановкою, що заявлена в [12], (7) суттєво покращена узагальненням своєї третьої крайової умови. А саме, замість позитивної константи в правій частині в

[12], в (7) запропоновано розглядати довільну неперервну функцію $g_3(t),\ t \in [0,\ T]$. Безумовно, цей крок дозволяє поширити клас вивчення часової поведінки сигнально-хвильових процесів в прикладних і практичних інженерних задачах.

Розв'язання (7) у явному вигляді здійснюється добре відомим класичним методом інтегральних перетворень [14]. Після застосування континуального $\sin$ - перетворення Фур'є $\int\limits_0^\infty \sin \alpha x\, \mathrm{d}x$ за просторовою змінною x, отримано еквівалентну задачу, але вже з початковими умовами, у термінах трансформант, та чиє лінійне неоднорідне звичайне диференціальне рівняння другого порядку є простішим об'єктом дослідження за попереднє загальне хвильове рівняння у частинних похідних в (7):

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dt^2} + a\dfrac{d}{dt} + b \right) F_\alpha = f_\alpha^*,\ t \in [0,\ T]; \\ F_\alpha(0) = g_{1\alpha},\ F_\alpha(T) = g_{2\alpha}. \end{cases} \tag{8}$$

В (8): постійні коефіцієнти у звичайному диференціальному рівнянні мають такий вигляд

$$a = \frac{\sigma}{\varepsilon_a} + \frac{r}{\mu_a} \pm 2\lambda,\ \ b = \lambda^2 \pm \lambda\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_a} + \frac{r}{\mu_a} \right) + \frac{\sigma r - \alpha^2}{\mu_a \varepsilon_a}; \tag{9}$$

трансформанти функцій записано нижче

$$g_{i\alpha} = \int\limits_0^\infty g_i(x) \sin \alpha x\, \mathrm{d}x\ \ (i = 1, 2);\ \ F_\alpha = F_\alpha(t) = \int\limits_0^\infty F(x,t) \sin \alpha x\, \mathrm{d}x;\ \ \widetilde{f}_\alpha = \widetilde{f}_\alpha(t) = \int\limits_0^\infty \widetilde{f}(x,t) \sin \alpha x\, \mathrm{d}x;$$

$$f_\alpha^* = f_\alpha^*(t) = -\frac{\widetilde{f}_\alpha + \alpha g_3(t)}{\mu_a \varepsilon_a}, \tag{10}$$

а нижній індекс α вказує на застосування операції трансформування. Додатково треба відзначити, що ліву частину звичайного диференціального рівняння (8) отримано за допомогою четвертої крайової умови із (7), що задовольняє класичну вимогу континуального $\sin$ - перетворення Фур'є, а також нижче записаного виразу

$$\int\limits_0^\infty \partial_1^2 F(x,t) \sin \alpha x\ \mathrm{d}x = \alpha F(0,t) - \alpha^2 F_\alpha(t) = \alpha g_3(t) - \alpha^2 F_\alpha(t).$$

Остання формула є результатом подвійного інтегрування частинами.

Розв'язуючи звичайне диференціальне рівняння із (8) відомими методами [15], записуємо характеристичне рівняння

$$\omega^2 + a\omega + b = 0,$$

дискримінант D та дійсні різні корені $\omega_i\ (i = 1, 2)$ якого виглядають так

$$D = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_a} - \frac{r}{\mu_a} \right)^2 + \frac{4\alpha^2}{\mu_a \varepsilon_a} > 0;\ \ \omega_i = \frac{-a + (-1)^{i+1}\sqrt{D}}{2}\ \ (i = 1, 2);\ \ \sqrt{D} = \omega_1 - \omega_2. \tag{11}$$

Важливо відзначити, що знаки перед λ у коефіцієнті a із (9) змінюються незалежно від змін знаку, розміщеного перед $\sqrt{D}$ в (11).

Беручи до уваги, що фундаментальна система розв'язання звичайного диференціального рівняння, однорідного відносно вихідного неоднорідного рівняння із (8), має вигляд $\{\exp(\omega_i t)\}_{i=1,2}$, відповідний загальний розв'язок в однорідному випадку виглядає так [15]

$$F_{\alpha 0}(t) = \sum_{i=1}^{2} C_i \exp(\omega_i t),\ \ \forall C_i = \mathrm{const} \in \mathbf{R}. \tag{12}$$

Тоді частинний розв'язок початкового неоднорідного звичайного диференціального рівняння із (8)

$$F_{\alpha 1}(t) = \sum_{i=1}^{2} C_i(t) \exp(\omega_i t),\ \ C_i(t) - ? \tag{13}$$

знаходиться методом варіації довільних сталих, а невідомі функції $C_i(t)\ (i = 1, 2)$ із (13) визначаються із нижче записаної системи [15]

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} C_i'(t)\exp(\omega_i t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{2} \omega_i C_i'(t)\exp(\omega_i t) = f_\alpha^*(t), \; C_i'(t) = \dfrac{dC_i(t)}{dt} \; (i = 1, 2). \end{cases} \tag{14}$$

Отриманий розв'язок (14) – $C_i'(t) = \dfrac{(-1)^{i+1}\exp(-\omega_i t)}{\sqrt{D}} f_\alpha^*(t) \; (i = 1, 2)$ породжує шукані функції із (13)

$$C_i(t) = \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{D}} \int \exp(-\omega_i t) f_\alpha^*(t)\,\mathrm{d}t \quad (i = 1, 2). \tag{15}$$

Підставляючи (15) в (13), разом з (12) утворюємо загальний розв'язок неоднорідного звичайного диференціального рівняння із (8) [15]:

$$F_\alpha(t) = F_{\alpha 0}(t) + F_{\alpha 1}(t) = \sum_{i=1}^{2} \exp(\omega_i t)\left(C_i + \frac{(-1)^{i+1} s_i(t)}{\sqrt{D}} \right), \; \forall C_i \in \mathbf{R}, \tag{16}$$

де

$$s_i(t) = \int \exp(-\omega_i t) f_\alpha^*(t)\,\mathrm{d}t \quad (i = 1, 2). \tag{17}$$

Нарешті, реалізація обох початкових умов із (8) приводить до системи відносно довільних дійсних сталих $C_i \; (i = 1, 2)$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \left(C_i + \dfrac{(-1)^{i+1} s_i(0)}{\sqrt{D}} \right) = g_{1\alpha}, \\ \sum_{i=1}^{2} \exp(\omega_i T)\left(C_i + \dfrac{(-1)^{i+1} s_i(T)}{\sqrt{D}} \right) = g_{2\alpha}. \end{cases} \tag{18}$$

Допоміжні визначення

$$g_{4\alpha} = g_{1\alpha} + \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{i=1}^{2} (-1)^i s_i(0), \; g_{5\alpha} = g_{2\alpha} + \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{i=1}^{2} (-1)^i s_i(T)\exp(\omega_i T) \tag{19}$$

разом з (17), (10), зводять (18) до еквівалентної форми

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} C_i = g_{4\alpha}, \\ \sum_{i=1}^{2} C_i \exp(\omega_i T) = g_{5\alpha}. \end{cases} \tag{20}$$

Розв'язок системи (20) представляє бажані константи із (16)

$$C_i = \frac{(-1)^{i+1}}{2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{D}}{2} T \right)} \left(g_{5\alpha} \exp\left(\frac{a}{2} T \right) - g_{4\alpha} \exp\left((-1)^i \frac{\sqrt{D}}{2} T \right) \right), \tag{21}$$

а $g_{4\alpha}$, $g_{5\alpha}$ визначені в (19). Підстановка (21) до (16) приводить до наступного виразу

$$F_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \exp(\omega_i t) \left(\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{D}}{2} T \right)} \left(g_{5\alpha} \exp\left(\frac{a}{2} T \right) - g_{4\alpha} \exp\left((-1)^i \frac{\sqrt{D}}{2} T \right) \right) + \frac{s_i(t)}{\sqrt{D}} \right), \tag{22}$$

що є заключним розв'язком задачі з початковими умовами (8) – (10) та базується на формулах (16), (17), (19), (21).

Застосування зворотного континуального інтегрального $\sin$ - перетворення Фур'є [14] до (22), створює вихідну шукану функцію $F(x,t)$

$$F(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_\alpha(t)\sin\alpha x \;\mathrm{d}\,x\,, \tag{23}$$

яка є розв'язком вихідної крайової задачі (7) у явному вигляді та описує напруженості електромагнітного поля. Підінтегральна функція із (23) задана в (22).

Таким чином, поставлена задача розв'язана, і мету даної статті досягнуто.

Наприкінці треба відзначити, порівняно з операторним аналогом процедури діагоналізації Гауса [7], запропонований метод оберненого матричного оператора виглядає коротшим та ефективнішим, завдяки існуванню вищезазначеного критерію. Дійсно, беручи до уваги умови (6). Можна порівнювати їх із конкретними фізичними або інженерними чисельними значеннями та перевіряти, чи існує запропонований явний розв'язок. Додатково, функція $g_3(t)$ із третьої крайової умови в (7), дозволяє відібрати та зафіксувати ті вихідні риси поведінки електромагнітного поля, що є більш зручними або корисними у конкретному випадку розгляду.

Подальше дослідження, що базуватиметься на запропонованому у статті аналітичному методі розв'язання, в основному стосуватиметься формулювання відповідних крайових задач, їх математичних розв'язань та прямого практичного використання у технічній електродинаміці. Хоча майбутні труднощі щодо запропонованого методу побудови оберненого матричного оператора стосуються доведення відповідного критерію розв'язання, автор м'яко, але наполягає на використанні саме такої процедури. Очевидно, цей метод стає більш складним при зростанні порядку та структури матриці вихідної системи, але має такі переваги, які на даному етапі дослідження можна лише уявляти як з теоретичної, так і з прикладної точки зору.

Література

1. *Максвелл Дж.К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Максвелл Дж.К. – М.: Посуд. изд. технико-теоретич. литер.,1954. – 687 с.
2. *Пименов Ю.*В. Техническая электродинамика / Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. – М.: Радио и связь, 2002. – 536 с.
3. Proc of the 13th International Scientific Conference on the Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET 10) – Kiev: KPI, September 2010. – IEEE, 2010. – Print ISBN: 978 – 1 – 4244 – 8859 – 9. – 404 p.
4. Proc of the 14th International Scientific Conference on the Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET 12) – Kharkov: August 2012. – IEEE, 2012. – Print ISBN: 978 – 1 – 4673 – 4480 – 7/12. – 594 p.
5. *Курош А.*Г. Курс общей алгебры / Курош А.Г. – М.: Наука, 1975. – 432 с.
6. *Комеч А.И.* Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Дифференциальные уравнения в частных производных. Т. 31 / Комеч А.И. – М.: Наука, 1988. – С. 127 – 281.
7. *Иваницкий А.М.* Диагонализация «симметричной» системы дифференциальных уравнений Максвелла / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2007. – № 1. – С. 15 – 24.
8. *Dmitrieva I.* Industrial problems of technical electrodynamics and analysis of the inverse matrix operator existence for the "symmetrical" differential Maxwell system / I. Dmitrieva // Proc of the International Scientific Conf. ENEC 2011 (Econophysics, Complexity, etc.), Hyperion University, Bucharest. – Bucharest: Victor Publishing House, 2012. – Vol. 4. – P. 9 – 18.
9. *Иваницкий А.М.* Основы теории многомерных аналоговых и дискретных цепей / Иваницкий А.М. – Одесса: ОНАС, 2003. – 38 с.
10. *Иваницкий А.М.* Зависимость третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух уравнений при произвольном возбуждении электромагнитного поля / А.М. Иваницкий // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – № 2. – С. 3 – 7.
11. *Бакалов В.П.* Теория электрических цепей / Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И. – М.: Радио и связь, 1998. – 444 с.
12. *Dmitrieva I.* Specific boundary problems as an analytic investigation of signal transmissions / I. Dmitrieva // Proc. of the 14th International Scientific Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET 12), Kharkov, August 28 – 30, 2012. IEEE: ISBN 978 – 1 – 4673 – 4480 – 7/12 (print). – DOI: 10.1109/MMET.2012.6331179. – P. 146 – 149.
13. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А.Н., Фомин С.В. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
14. *Tranter C.*J. Integral Transforms in Mathematical Physics / Tranter C.J. – London: Mathuen and Co. Ltd., New York: John Wiley and Sons, Inc., 1951. – 119 p.
15. *Von Kamke E.* Differentialgleichungen. Losungsmethoden und Losungen. – Leipzig: Verbesserte Auflage, 1959. – 451 p.