УДК 519.16, 621.39

Ткаченко В.Г., Клещёв А.О.
Ткаченко В.Г., Клещев А.О.
Tkachenco V.G., Kleshchev A.O.

МЕТОД ПЕРЕБОРА ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ И ОСТОВОВ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

МЕТОД ПЕРЕБОРУ ПРОСТИХ ЦИКЛІВ ТА ОСТОВІВ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖ

METHOD FOR TELECOMMUNICATION NETWORKS' SIMPLE CYCLES AND SKELETONS ITERATION

Аннотация. Разработан метод перебора простых циклов графа и его остовов. Этот метод реализует перебор простых циклов сети путем сложения по модулю 2 комбинаций базовых циклов, которые находятся для произвольного остова. В результате получаем монотонную булеву функцию (МБФ) простых циклов в виде дизъюнктивной нормальной формы. Остовная МБФ получается как дизъюнктивное дополнение двойственной МБФ простых циклов.

Анотація. Розроблено метод перебору простих циклів графа та його остовів. Цей метод реалізує перебір простих циклів мережі шляхом додавання по модулю 2 комбінацій базових циклів, які знаходяться для довільного остова. В результаті отримуємо монотонну бульову функцію (МБФ) простих циклів у вигляді диз'юнктивної нормальної форми. Остовна МБФ отримується як диз'юнктивне доповнення дуальної МБФ простих циклів.

Summary. Developed a method for iteration of simple cycles and graph skeletons. This method implements a simple cycles iteration in network by “exclusive or” of basic combinations of cycles, for random graph skeleton. The result is monotonous Boolean function (MBF) of simple cycles as a disjunctive normal form. MBF of skeleton is obtained as the disjunction complement of simple cycles’ dual MBF.

При проектировании и эксплуатации сети возникает проблема повышения качества обслуживания. Для решения этой проблемы применяются следующие способы: оптимизация структуры сети, многомерная интеллектуальная маршрутизация пакетов, резервирование каналов. Во всех этих способах важно использовать эффективные методы анализа структуры сети.

В ряде случаев необходимо делать перебор остовов, базовых и простых циклов [1]. (Определения всех понятий из теории графов приведены в [1].) Прямой и обратный методы перебора остовов описаны в [2].

Однако эти методы не подходят для перебора базовых и простых циклов, хотя анализ простых циклов фрагментов сети важен для оптимизации сети.

Целью статьи является разработка метода нахождения простых циклов и остовов телекоммуникационной сети за время сравнимое с нахождением исключительно остовов.

Монотонная булева функция (МБФ) – это булева функция, значение которой не уменьшается при увеличении любого из её аргументов. В [3] показано, что монотонные булевы функции можно представить в виде булевых выражений, где присутствуют только операции дизъюнкции и конъюнкции, но нет операции отрицания.

Двойственная МБФ – монотонная булева функция, в которой все операции конъюнкции заменены на операции дизъюнкции, а операции дизъюнкции, на операции конъюнкции.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид конъюнкции дизъюнкций элементов.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид дизъюнкции конъюнкций элементов.

Метод основан на получении простых циклов из базовых циклов. Затем получается остовная МБФ как дизъюнктивное дополнение двойственной МБФ простых циклов.

Один из наиболее распространенных способов перевода булевой функции из КНФ формы в ДНФ состоит в раскрытии скобок. Проиллюстрируем его на примере функции

$f = (A \vee B)\,(C \vee D)$,

заданной в виде КНФ. Раскроем скобки:

$f = (A \vee B)\,(C \vee D) = AC \vee AD \vee BC \vee BD$.

В данном случае после раскрытия скобок получилась минимальная ДНФ той же функции. Но для более сложных функций в результате раскрытия будут встречаться элементы полностью входящие в другие конъюнкции, такие функции можно минимизировать.

Один из наиболее распространенных методов приведения КНФ формы к ДНФ форме состоит в раскрытии скобок и затем приведении функции к нормальной форме (минимизации).

Например, функция:

$f = (A \vee B \vee C)\,(A \vee B \vee D)$

после раскрытия скобок даёт выражение:

$f = AA \vee AB \vee AD \vee AB \vee BB \vee BD \vee AC \vee BC \vee CD,$

после приведения подобных элементов получаем:

$f = A \vee B \vee CD.$

Метод раскрытия скобок применим только в самых простых случаях, так как с ростом числа элементов в КНФ растет сложность вычислений. Для решения задачи приведения КНФ формы в ДНФ со значительным количеством элементов при помощи ЭВМ значительно проще перебрать выражения удовлетворяющие КНФ, для чего можно использовать алгоритмы перебора, предложенные в [2], или множество других алгоритмов.

Перейдем к описанию самого метода. В качестве исходных данных используется представление сети в виде связанного графа, каждая из вершин которого имеет минимум два ребра.

Этапы алгоритма:

1. Поиск произвольного остова сети.
2. Поиск базовых циклов сети.
3. Нахождение простых циклов сети.
4. Нахождение коостовов сети путем раскрытия скобок в двойственной МБФ простых циклов.
5. Нахождение остовов сети путем дизъюнктивного дополнения коостовной МБФ.

Рассмотрим этапы:

На первом этапе находим один, любой остов сети. Метод поиска остова не важен, так как не важны параметры ребер, но желательна максимальная разветвленность для простоты поиска простых циклов. К примеру, можно использовать алгоритм Дейкстры [1], считая вес каждого ребра за единицу. При этом желательно сохранить направление или путь прохождения для последующих этапов.

Для поиска базовых циклов достаточно по очереди перебирать ребра, не принадлежащие к остову, формируя базовые циклы. Найденные базовые циклы сохраняются для следующего этапа. Сохраненная информация маршрутов с предыдущего этапа сократит время определения маршрута цикла. К примеру, можно идти от вершин добавленного ребра к вершине отсчета алгоритма Дейкстры, вершина пересечения маршрутов от двух вершин нового ребра закрывает цикл.

Перебор всех комбинаций базовых циклов в виде МБФ сложением по модулю два позволяет получить все возможные простые циклы, но может сгенерировать несколько несвязных циклов представленных как один. Перебор осуществляется последовательным увеличением переменной-счетчика на 1, начиная с 1 до двоичного числа, состоящего из n единиц, где n — число ребер в сети. Возможно несколько методов фильтрации несвязанных циклов: по завершению формирования списка всех комбинаций проверить их на связность с использованием результатов работы алгоритма Дейкстры, проверить связность на основе метода представленного в статье [4], либо проверить на включения уже найденных циклов в текущий (минимизация). Представленные методы эффективны в разных условиях, их эффективность зависит от метода представления циклов и структуры сети.

Этап нахождения коостовов можно представить как преобразование КНФ в ДНФ. Однако вместо раскрытия скобок оптимальнее осуществить выборку всех подграфов с количеством ребер равным числу ребер, не вошедших в остов (числу ребер коостова), и затем проверку подграфов на принадлежность к ДНФ. Преобразование КНФ в ДНФ перебором подграфов подразумевает некоторое число условий, роль которых выполняют простые циклы в виде двойственной МБФ (составляющие КНФ), и некоторое число предполагаемых ответов в виде выборки МБФ подграфов, принадлежность которых к ДНФ мы проверяем. Т.е., чтобы узнать является ли подграф частью ДНФ, проверяем, соответствует ли ответ условию – простые циклы должны включать по одному или более ребру МБФ подграфа. При большом количестве элементов такой подход заменяет обычное раскрытие скобок и экономит ресурсы.

Полученные подграфы в составе ДНФ являются коостовами. Для получения МБФ остовов достаточно взять дизъюнктивное дополнение от ДНФ коостовов.

Разберем предложенный метод на примере сети из 5 вершин и 7 ребер (рис. 1).

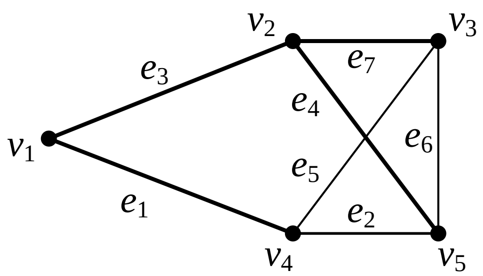

Рисунок 1 – Пример сети из 5 вершин и 7 ребер

В качестве произвольного остова выбираем подграф $e_1 \vee e_3 \vee e_4 \vee e_7$ (этот остов выделен на рис.1 жирной линией). Находим базовые циклы на его основе:

1) $e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4$;

2) $e_1 \vee e_3 \vee e_5 \vee e_7$;

3) $e_4 \vee e_6 \vee e_7$.

Простыми циклами являются все базовые, плюс комбинации полученные сложением по модулю два базовых циклов:

1) $e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4$;

2) $e_1 \vee e_3 \vee e_5 \vee e_7$;

3) $e_4 \vee e_6 \vee e_7$;

4) $(e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4) \oplus (e_1 \vee e_3 \vee e_5 \vee e_7) = e_2 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_7$;

5) $(e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4) \oplus (e_4 \vee e_6 \vee e_7) = e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_6 \vee e_7$;

6) $(e_1 \vee e_3 \vee e_5 \vee e_7) \oplus (e_4 \vee e_6 \vee e_7) = e_1 \vee e_3 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_6$;

7) $(e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4) \oplus (e_1 \vee e_3 \vee e_5 \vee e_7) \oplus (e_4 \vee e_6 \vee e_7) = e_2 \vee e_5 \vee e_6$.

Представляем все простые циклы в виде дизъюнкций, из входящих в эти циклы переменных. Обьединяя все эти дизъюнкции в КНФ, получаем двойственную МБФ простых циклов:

$$(e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4)(e_1 \vee e_3 \vee e_5 \vee e_7)(e_4 \vee e_6 \vee e_7)(e_2 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_7)(e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_6 \vee e_7)(e_1 \vee e_3 \vee e_4 \vee e_5 \vee e_6)(e_2 \vee e_5 \vee e_6).$$

МБФ простых циклов имеет следующий вид:

$$e_1e_2e_3e_4 \vee e_1e_3e_5e_7 \vee e_4e_6e_7 \vee e_2e_4e_5e_7 \vee e_1e_2e_3e_6e_7 \vee e_1e_3e_4e_5e_6 \vee e_2e_5e_6.$$

После преобразования КНФ в ДНФ раскрытием скобок в двойственной МБФ простых циклов и минимизации получаем коостовную МБФ из 24 коостовов:

$$e_1e_2e_5 \vee e_2e_3e_4 \vee e_1e_4e_5 \vee e_2e_4e_5 \vee e_3e_4e_5 \vee e_1e_2e_6 \vee e_2e_3e_6 \vee e_1e_4e_6 \vee e_3e_4e_6 \vee e_1e_5e_6 \vee e_2e_5e_6 \vee e_3e_5e_6 \vee$$
$$e_4e_5e_6 \vee e_1e_2e_7 \vee e_2e_3e_7 \vee e_2e_4e_7 \vee e_1e_5e_7 \vee e_2e_5e_7 \vee e_3e_5e_7 \vee e_4e_5e_7 \vee e_1e_6e_7 \vee e_2e_6e_7 \vee e_3e_6e_7 \vee e_4e_6e_7.$$

Получаем остовы взяв дизъюнктивное дополнение от МБФ коостовов:

$$e_3e_4e_6e_7 \vee e_1e_5e_6e_7 \vee e_2e_3e_6e_7 \vee e_1e_2e_6e_7 \vee e_3e_4e_5e_7 \vee e_3e_4e_5e_7 \vee e_1e_4e_5e_7 \vee e_2e_3e_5e_7 \vee$$
$$e_1e_2e_5e_7 \vee e_2e_3e_4e_7 \vee e_1e_3e_4e_7 \vee e_1e_2e_4e_7 \vee e_1e_2e_3e_7 \vee e_3e_4e_5e_6 \vee e_1e_4e_5e_6 \vee e_1e_3e_5e_6 \vee$$
$$e_2e_3e_4e_6 \vee e_1e_3e_4e_6 \vee e_1e_2e_4e_6 \vee e_1e_2e_3e_6 \vee e_2e_3e_4e_5 \vee e_1e_3e_4e_5 \vee e_1e_2e_4e_5 \vee e_1e_2e_3e_5.$$

В качестве замены обычного раскрытия скобок при преобразовании КНФ в ДНФ оптимальнее применять перебор подграфов из 3 ребер (в данном графе каждый коостов состоит из трех ребер). Для перебора подграфов можно использовать методы из [2]. Если в каждый из простых циклов входит хотя бы одно ребро подграфа, то такой подграф является коостовом и его элементы составляют конъюнкцию искомой ДНФ коостовов. Этот метод поиска ДНФ значительно проще раскрытия скобок, но все равно наболее ресурсоемкий из-за генерации подграфов. В качестве оптимизации возможно использовать таблицы под конкретные размеры коостовов, но без привязки к размеру графа. Так как перебор не зависит от структуры графа и её изменений в процессе работы, а только от числа ребер и размера остова, то можно существенно сократить время на выполнение. Так же не обязательно выполнять полный перебор – возможно нахождение лишь части значений, методом перебора выбирающим значения согласно весу.

В данном случае для перебора берутся сочетания по 3 из 7 – всего необходимо перебрать 35 значений. Всего в данном графе имеется 7 простых циклов. Из них один состоит из 3 ребер, 4 из 4 ребер и 2 из 5 ребер. При обычном раскрытии скобок двойственной КНФ простых циклов получаем $3\times4^4\times5^2$ = 19200 конъюнкций без учета минимизации (при обычном раскрытии скобок количество получаемых элементов равно произведению количеств элементов в каждой из скобок). Преимущества предложенного метода перебора в сравнении с классическим раскрытием скобок в данном случае очевидно, и при росте количества ребер это преимущество быстро растет.

Оценим скорость работы метода на примере сети с 20 ребрами и 10 вершинами (рис. 2).

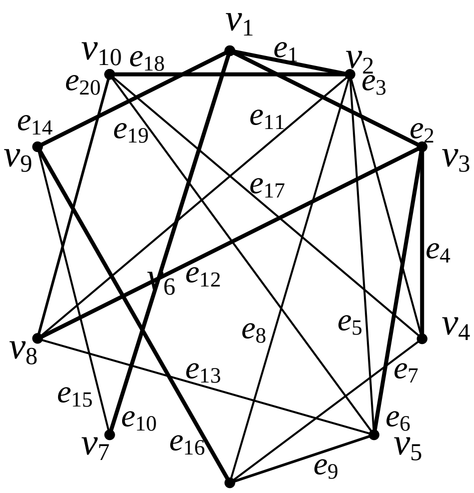

Рисунок 2 – Пример сети из 10 вершин и 20 ребер

На первом этапе в качестве остова выбираем подграф $e_1 \vee e_2 \vee e_4 \vee e_6 \vee e_{10} \vee e_{12} \vee e_{14} \vee e_{16} \vee e_{18}$ (этот остов выделен на рис. 2 жирной линией), на его основе получаем 11 базовых циклов. Этими циклами являются:

1) $e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4$;
2) $e_1 \vee e_2 \vee e_5 \vee e_6$;
3) $e_1 \vee e_8 \vee e_{14} \vee e_{16}$;
4) $e_2 \vee e_4 \vee e_7 \vee e_{14} \vee e_{16}$;
5) $e_2 \vee e_6 \vee e_9 \vee e_{14} \vee e_{16}$;
6) $e_1 \vee e_2 \vee e_{11} \vee e_{12}$;
7) $e_6 \vee e_{12} \vee e_{13}$;
8) $e_{10} \vee e_{14} \vee e_{15}$;
9) $e_1 \vee e_2 \vee e_4 \vee e_{17} \vee e_{18}$;
10) $e_1 \vee e_2 \vee e_6 \vee e_{18} \vee e_{19}$;
11) $e_1 \vee e_2 \vee e_{12} \vee e_{18} \vee e_{20}$.

Из 11 базовых циклов сложением по модулю два можно получить 2047 комбинаций, однако только 327 являются простыми циклами. Простыми циклами не являются те комбинации, из которых можно выделить подмножество ребер, являющееся циклом. К примеру базовые циклы $e_6 \vee e_{12} \vee e_{13}$ и $e_{10} \vee e_{14} \vee e_{15}$ после операции сложения по модуля два дадут несвязный подграф, который простым циклом не является. Как следствие необходима поэлементная проверка на вхождение всех ранее найденных простых циклов в текущую комбинацию.

В процессе раскрытия скобок при нахождении коостовов необходимо делать минимизацию (приведение) получаемых выражений. Для МБФ это значительно проще, чем для булевых функций произвольного вида. На примере поиска минимизированной ДНФ [5], можно сделать вывод, что программная реализация предлагаемого метода выполняется значительно быстрее, чем реализация метода [5], так как в предлагаемом методе требуется рассматривать в два раза меньше переменных. Метод [5] рассматривает отдельно переменные с отрицанием и без отрицания, то есть для 20 ребер пришлось бы рассматривать 40 переменных.

После раскрытия скобок и минимизации получаем 21077 коостовов. В сравнении с алгоритмами [2] отличия по времени выполнения не более ±0.1% в зависимости от графа, так как используется тот же принцип решения NP задачи перебором, но изменен метод определения правильных комбинаций и ведется поиск коостовов вместо остовов.

При нахождении коостовов в предложенном методе требуется перебрать сочетания ребер по 11 из 20, что составляет 167960 подграфов. Так как в данном графе 327 простых циклов, из них 9 с тремя ребрами, 21 с 4, 38 с 5, 50 с 6, 56 с 7, 63 с 8, 61 с 9 и 29 циклов с 10 ребрами, то в случае обычного раскрытия скобок потребуется обработать $3^9 \times 4^{21} \times 5^{38} \times 6^{50} \times 7^{56} \times 8^{63} \times 9^{61} \times 10^{29} \approx 6{,}83 \times 10^{273}$ элементов без учета минимизации. Данное количество операций невозможно осуществить на современных ЭВМ за разумное время, тогда как в предложенном методе все действия по нахождению простых циклов и остовов (в том числе раскрытие скобок и минимизация) для рассмотренного графа из 20 ребер осуществляются за время не более 3 секунд.

В заключение отметим следующее. Разработан новый эффективный метод перебора простых циклов и остовов телекоммуникационной сети на основе монотонных булевых функций. На базе этого метода написана программа, позволяющая быстро анализировать структуру телекоммуникационной сети или ее фрагмента. Использование данной программы возможно как при проектировании сети, так и при ее эксплуатации, например, при выходе из строя или перегрузке отдельных линий связи.

Литература

1. *Свами М.* Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
2. *Ткаченко В.Г.* Методы прямого и обратного перебора остовов графов телекоммуникационных сетей/ В.Г. Ткаченко, Д.Г. Ларин //Труды одесского политехнического университета. – 2011. – № 2 (36). – С. 210-216.
3. *Иваницкий А.М.* Графы, матроиды, монотонные булевы функции и принцип взаимосоответсвия / А.М. Иваницкий, В.Г. Ткаченко. – Одесса, 2012. – 148 с.
4. *Ткаченко В.Г.* Метод проверки связности и цикличности фрагмента сети на основе монотонных булевых функций / В.Г. Ткаченко, А.О. Клещев //Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2011. – № 2. – С. 114-121.
5. *Закревский А.Д.* Минимизация булевых функций многих переменных в классе ДНФ – итеративный метод и программная реализация / А.Д. Закревский, Н.Р. Топоров // Объединенный институт информатики НАН Беларуси, г. Минск. – 2009. – № 1 (3) . – С. 5-14.