УДК 681.5.037:521.391

Дмитришин Д.В.
Dmitrishin D.V.

МЕТОД РОБАСТНОГО АНАЛИЗА СИСТЕМ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

THE METHOD OF ROBUST ANALYSIS OF THE SYSTEMS WITH PARAMETRICAL UNCERTAIN DELAYS

Аннотация. Изучается задача робастной устойчивости систем с запаздываниями, зависящими от неопределенных параметров. Приводится алгоритм построения множеств, целиком расположенных в области устойчивости пространства параметров. Получены необходимые и достаточные условия робастной устойчивости систем, в которых запаздывания линейно зависят от одного неопределенного параметра. Рассмотрен пример.

Summary. The problem of robust stability of systems with time-delays dependent on uncertain parameters is studied. The algorithm of construction of the sets entirely located in the field of stability of space of parameters is resulted. Necessary and sufficient conditions of robust stability of systems in which delays linearly depend on one uncertain parameter are received. The example is considered.

Многочисленные задачи механики, автоматического управления, телекоммуникаций, экологии, экономики сводятся к анализу проблемы устойчивости системы с запаздываниями [1]. На практике в параметрах системы обычно имеется некоторая неопределенность, что приводит к неточности в описании системы и возможному нарушению устойчивости, поэтому анализу подлежит не одна конкретная система, а целое семейство систем [2]. В линейном случае это означает, что необходимо проверять робастную устойчивость семейства параметрических квазиполиномов.

При различных предположениях о неопределенности рассматриваемая задача исследовалась во многих работах [3], где отмечалось, что наибольшие проблемы возникают в случаях, когда неопределенность содержится в самих запаздываниях. Частные случаи систем с одним или двумя неопределенными параметрами запаздывания изучались в [4, 5].

Целью настоящей статьи является создание метода исследования задач устойчивости систем с запаздывающими и не полностью идентифицированными звеньями, зависящими от произвольного числа неопределенных параметров.

Пусть непрерывная запаздывающая система представлена характеристическим квазиполиномом

$$f(\lambda)=p_0(\lambda)+\sum_{j=1}^{m}p_j(\lambda)e^{-\lambda\tau_j}\ , \tag{1}$$

где $p_0(\lambda),\dots,p_m(\lambda)$ – известные полиномы с вещественными коэффициентами, причем степень полинома $p_0(\lambda)$ больше степени каждого полинома $p_1(\lambda),\dots,p_m(\lambda)$; $\tau_1,\dots,\tau_m$ – запаздывания.

Необходимым и достаточным условием устойчивости квазиполинома (1) является отрицательность вещественных частей его нулей [6].

В случае зависимости запаздываний от неизвестных параметров, вместо квазиполинома (1) следует рассматривать семейство квазиполиномов

$$\left\{p_0(\lambda)+\sum_{j=1}^{m}p_j(\lambda)e^{-\lambda\tau_i(\sigma_1,\dots,\sigma_k)}\middle|(\sigma_1,\dots,\sigma_k)\in S\right\}, \tag{2}$$

где S – замкнутое, ограниченное, односвязное множество, содержащее нуль; $\tau_j=\tau_j(\sigma_1,\dots,\sigma_k),\ j=\overline{1,m}$ – непрерывные отображения, неотрицательные на S, причем $\tau_j(\sigma_1,\dots,\sigma_k)=0\Leftrightarrow(\sigma_1,\dots,\sigma_k)=(0,\dots,0),\ j=\overline{1,m}$. Далее следует требовать отрицательности вещественных частей нулей каждого квазиполинома семейства. В этом случае области S принадлежит область устойчивости в пространстве параметров $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$.

Эта область может оказаться очень сложной структуры: невыпукла, несвязна и т.д. Поэтому задача робастной устойчивости семейства (2) заключается в нахождении достаточных условий, при которых множество S целиком располагается в области устойчивости.

Для решения поставленной задачи следует рассмотреть вспомогательные функции

$$g(\omega,\theta_1,...,\theta_m)=\mathrm{Re}\{p_0(i\omega)+\sum_{j=1}^{m}p_j(i\omega)e^{-i\theta_j}\},$$

$$h(\omega,\theta_1,...,\theta_m)=\mathrm{Im}\{p_0(i\omega)+\sum_{j=1}^{m}p_j(i\omega)e^{-i\theta_j}\}.$$

Так как функции g и h зависят от ω полиноминально, то составляя результат этих функций, переменную ω возможно исключить:

$$\Phi(\theta_1,...,\theta_m)=\mathrm{Res}\{g(\omega,\theta_1,...,\theta_m),h(\omega,\theta_1,...,\theta_m)\}.$$

При $\theta_j=0, j=\overline{1,m}$ $\Phi(\theta_1,...,\theta_m)$ является обобщенным определителем Гурвица устойчивого полинома $p_0(\lambda)+...+p_m(\lambda)$, поэтому $\Phi(0,\ldots 0)>0$. Если функция $\Phi(\theta_1,...,\theta_m)$ в параллелепипеде $\{(\theta_1,...,\theta_m)\in[0,2\pi]\times...[0,2\pi]\}$ не меняет знак, то квазиполином (1) устойчив при любых значениях запаздываний $\tau_1,...,\tau_m$, поэтому далее будет считаться, что функция $\Phi(\theta_1,...,\theta_m)$ меняет знак в рассматриваемом параллелепипеде.

В этом случае существует решение задачи на условный экстремум: найти

$$\min\|(\theta_1,...,\theta_m)\| \tag{3}$$

при условиях

$$\Phi(\theta_1,...,\theta_m)=0;\ \theta_j\in[0,2\pi],\ j=\overline{1,m}, \tag{4}$$

где норма $\|(\theta_1,...,\theta_m)\|$ определяется одним из возможных способов, например,

$$\|(\theta_1,...,\theta_m)\|=\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_j^p\theta_j^p\right)^{1/p}$$

или в пределе при $p\to\infty$

$$\|(\theta_1,...,\theta_m)\|=\max_{j\in\{1,...,m\}}\{\mu_j\theta_j\},$$

где $\mu_j>0;\ j=\overline{1,m};\ p\geq 1$.

Теорема 1. Пусть M – решение экстремальной задачи (3), (4); ω^* – максимальный положительный корень уравнения $|p_0(i\omega)|=\sum_{j=1}^{m}|p_j(i\omega)|$.

Множество

$$\left\{(\sigma_1,...,\sigma_k)\Big|\ \|\tau_1(\sigma_1,...,\sigma_k),...,\tau_m(\sigma_1,...,\sigma_k)\|<\frac{M}{\omega^*}\right\} \tag{5}$$

целиком расположено в области устойчивости пространства параметров $\sigma_1,...,\sigma_k$.

Доказательство. Нули квазиполинома запаздывающего типа непрерывно зависят от параметров $\sigma_1,...,\sigma_k$, так как они непрерывно зависят от параметров $\tau_1,...,\tau_m$ [6] и функции $\tau_j(\sigma_1,...,\sigma_k),\ j=\overline{1,m}$, непрерывны по предположению.

Пусть при некоторых значениях $\tilde\sigma_1,...,\tilde\sigma_k$ квазиполином семейства (2) неустойчив, но $\|(\tau_1(\tilde\sigma_1,...,\tilde\sigma_k),...,\tau_m(\tilde\sigma_1,...,\tilde\sigma_k)\|<\dfrac{M}{\omega^*}$. Тогда найдутся такие значения $(\sigma_1^0,...,\sigma_k^0)$ из множества (5), что квазиполином семейства (2) будет иметь чисто мнимые нули, т.е. при некотором $\omega^0\leq\omega^*$

$$p(i\omega^0)+\sum_{j=m}^{m}p_i(i\omega^0)e^{-i\omega^0\tau_j(\sigma_1^0,...,\sigma_k^0)}=0,$$

и, следовательно,

$$\Phi(\theta_1^0,...,\theta_m^0)=0\ \text{при}\ \theta_j^0=\omega^0\tau_j(\sigma_1^0,...,\sigma_k^0),\ j=\overline{1,m}.$$

По определению числа M

$$\|(\theta_1^0,...,\theta_m^0)\|\geq M,$$

откуда

$$\|(\tau_1(\sigma_1^0,...,\sigma_k^0),...,\tau_m(\sigma_1^0,...,\sigma_k^0)\| \geq \frac{M}{\omega^0} \geq \frac{M}{\omega^*}.$$

Последнее неравенство противоречит принадлежности точки $(\sigma_1^0,...,\sigma_k^0)$ множеству (5).

Замечание. Величины M и ω^*, определяющие множество (5), не зависят от вида функций $\tau_j(\sigma_1,...,\sigma_k),\ j=\overline{1,m}$, а зависят лишь от коэффициентов полиномов $p_0(\lambda),...,p_m(\lambda)$ и вида нормы (3).

В общем случае включение множества S в множество (5) является достаточным условием робастной устойчивости семейства квазиполиномов (2). Однако в ряде частных постановок задачи оказывается возможным построить целиком область устойчивости. К такой постановке относится, например, случай линейной зависимости запаздываний от одного неопределенного параметра, т.е.

$$\tau_j(\sigma)=\alpha_j\sigma, \quad j=\overline{1,m},$$

где $\alpha_1,...,\alpha_m$ – данные положительные числа. В этом случае в уравнение $\Phi(\theta_1,...,\theta_m)=0$, в котором $\theta_j=\omega\alpha_j\sigma;\ j=\overline{1,m}$, входит только одна неизвестная величина $\chi=\omega\sigma$, и можно найти все его положительные решения: $\chi_1,\chi_2,...$. Каждому такому корню χ_k отвечает множество Ω_k решений уравнения

$$p_0(i\omega)+\sum_{j=m}^{m}p_j(i\omega)e^{-i\alpha_j\chi_k}=0.$$

Множество Ω_k – конечное (может оказаться пустым). Пусть $\omega_k=\max\Omega_k$, $k=1, 2, \dots$. Тогда для устойчивости квазиполиномов семейства

$$\left\{p_0(\lambda)+\sum_{j=1}^{m}p_j(\lambda)e^{-\lambda\tau_j(\sigma)}\,\middle|\,\tau_j(\sigma)=\alpha_j\sigma,\ j=\overline{1,m}\right\}$$

достаточно потребовать выполнения неравенств

$$\omega_k\tau_j(\sigma)<\alpha_j\chi_k,\ j=\overline{1,m};\ k=1,2,...,$$

откуда

$$\sigma<\frac{\chi_k}{\omega_k},\ k=1,2,... \ .$$

Теорема 2. Для того, чтобы семейство квазиполиномов (6) было робастно устойчиво необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma\in[0,\sigma^*),$$

где

$$\sigma^*=\min_k\left\{\frac{\chi_k}{\omega_k}\right\}. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Если $\sigma=\sigma^*$, то квазиполином семейства (6) при $\tau_j=\alpha_j\sigma^*$ имеет чисто мнимый нуль $i\omega_{k_0}$, который определяется из соотношения

$$\min_k\left\{\frac{\chi_k}{\omega_k}\right\}=\frac{\chi_{k_0}}{\omega_{k_0}}.$$

Достаточность следует из построения числа σ^*.

Алгоритм определения величины σ^* конструктивен, так как минимум в формуле (7) можно искать лишь на конечном множестве. Действительно, $\sigma<\dfrac{\chi_1}{\omega_1}$, следовательно, не надо рассматривать те корни $\tilde{\chi}$ уравнения

$$\Phi(\alpha_1\chi,...,\alpha_m\chi)=0, \tag{8}$$

для которых справедливо неравенство $\dfrac{\tilde{\chi}}{\tilde{\omega}} \geq \dfrac{\chi}{\omega^*} \geq \dfrac{\chi_1}{\omega_1}$ или $\tilde{\chi} \geq \dfrac{\omega^*}{\omega_1}\chi_1$. Кроме того, если числа $\alpha_1,...,\alpha_m$ – рационально зависимы, то левая часть уравнения (8) – периодическая функция. Если ее период меньше величины $\dfrac{\omega^*}{\omega_1}\chi_1$, то уравнение (8) достаточно рассматривать лишь на отрезке длины периода, содержащим нуль. В частности, при $\alpha_j = j$ этим отрезком является [0, 2π].

Следует отметить, что факт рациональной зависимости величин $\alpha_1,...,\alpha_m$ в семействе (8) считался принципиальным в решении задачи робастной устойчивости. Однако с этим можно согласиться лишь в связи с возможностью сведения задачи к алгебраической. Действительно, если, например, $\alpha_j = j$, то после замены переменной $u = \mathrm{ctg}\dfrac{\chi}{2}$, т.е.

$$\cos j\chi = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{u+i}{u-i}\right)^j\right\} = \frac{\mathrm{Re}\{(u+i)^{2j}\}}{(u^2+1)^j},$$

$$\sin j\chi = \mathrm{Im}\left\{\left(\frac{u+i}{u-i}\right)^j\right\} = \frac{\mathrm{Im}\{(u+i)^{2j}\}}{(u^2+1)^j}$$

уравнение (8) сводится к алгебраическому (левая часть полином относительно *u*), а

$$\sigma^* = \min_{k\in\{1,...,N\}}\left\{\frac{2\mathrm{arcctg}u_k}{\omega_k}\right\},$$

где $u_1,u_2,...,u_k$ – вещественные нули упомянутого полинома, по которым ищется минимум. Но в конечном решении задачи этот факт имеет значение лишь отчасти.

Другой способ сведения задачи робастной устойчивости семейства (8) к алгебраической в случае рациональной зависимости величин $\alpha_1,...,\alpha_m$ предложен в [4].

Пример. Пусть неопределенная система задана семейством характеристических квазиполиномов

$$\{\lambda^3 + 1 + \lambda^2(e^{-\lambda\tau_1} + e^{-\lambda\tau_2}) + \lambda e^{-\lambda\tau_3} \mid \tau_1 = \sigma, \tau_2 = 2\sigma, \tau_3 = 3\sigma, \sigma \in [0,\sigma^*)\}.$$

В этом случае функции $g(\omega,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$, $h(\omega,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$, $\Phi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ имеют вид

$$g(\omega,\theta_1,\theta_2,\theta_3) = -\omega^2(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \omega\sin\theta_3 + 1,$$

$$h(\omega,\theta_1,\theta_2,\theta_3) = -\omega^3 + \omega^2(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) + \omega\cos\theta_3,$$

$$\Phi(\theta_1,\theta_2,\theta_3) =$$

$$= -\begin{vmatrix} -(\cos\theta_1+\cos\theta_2) & \sin\theta_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\cos\theta_1+\cos\theta_2) & \sin\theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\cos\theta_1+\cos\theta_2) & \sin\theta_3 & 1 \\ 0 & -1 & (\sin\theta_1+\sin\theta_2) & \cos\theta_3 & 0 \\ -1 & (\sin\theta_1+\sin\theta_2) & \cos\theta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Уравнение $\Phi(\chi,2\chi,3\chi) = 0$ после подстановки $u = \mathrm{ctg}\dfrac{\chi}{2}$ перейдет в следующее

$$u^{18} - 83u^{16} + 1192u^{14} - 4776u^{12} + 9794u^{10} - 10678u^8 +$$

$$+ 5632u^6 - 592u^4 + 21u^2 + 1 = 0.$$

Его вещественные корни:

$$u_1 \approx -8{,}1242;\ u_2 \approx -3{,}4806;\ u_3 \approx 3{,}4806;\ u_4 \approx 8{,}1242,$$

следовательно,

$$\chi_1 = 2\,\mathrm{arcctg}\,u_1 \approx 6{,}0382\text{, аналогично, } \chi_2 \approx 5{,}7236,\ \chi_3 \approx 0{,}5595,\ \chi_4 \approx 0{,}2449.$$

Тогда множества Ω_k равны:

$$\Omega_1 = \{0{,}5757\},\ \Omega_2 = \varnothing,\ \Omega_3 = \{1{,}3508\},\ \Omega_4 = \varnothing.$$

Критическая величина σ^* определяется условием

$$\sigma^* = \min\left\{\frac{\chi_1}{\omega_1};\frac{\chi_2}{\omega_2}\right\} = \min\{10{,}4883;0{,}4142\} = 0{,}4142\,.$$

Таким образом, в настоящей статье приведен и обоснован метод решения задачи робастной устойчивости систем с параметрически неопределенными запаздываниями. Этот метод универсален в том смысле, что не требует принципиальных ограничений на число неопределенных параметров. Хотя он дает, вообще говоря, лишь достаточные условия устойчивости, для случая линейной зависимости запаздывания от одного неизвестного параметра эти условия становятся и необходимыми. Последний случай, особенно актуальный при изучении замкнутых систем управления с запаздывающей обратной связью, изучался ранее только для рационально-зависимых запаздываний [4]. В приведенном алгоритме это ограничение становится несущественным.

Литература

1. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных систем (обзор) // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. – М.: ВИНИТИ, 1991. – Т. 32. – С. 3-31.
3. *Жабко А.П., Харитонов В.Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления. – С.Пб.: Изд. С.ПбГУ, 1993. – 320 с.
4. *Харитонов В.Л.* Об определении максимально допустимого запаздывания в задачах стабилизации // Дифференциальные уравнения. – 1982. – С. 723-724.
5. *Усов А*.В., *Дубров А.Н., Дмитришин Д.В.* Моделирование систем с распределенными параметрами. – Одесса: Астропринт, 2002. – 664 с.
6. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.