УДК 512.942

Иваницкий А.М., Струк А.В.
Ivanitckiy A.M., Struk A.V.

МАТРИЦЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ ТОЧЕК ПРОСТРАНСТВА

MATRIXES OF DIFFERENTIAL OPERATORS OF CURVILINEAR COORDINATES OF POINTS OF SPACE

Аннотация. Дана возможность представления операций векторного анализа на языке теории матриц для криволинейной системы координат.

Summary. Vector analysis operations for curvilinear system of coordinates by means of language of matrix theory are presented.

В электродинамике широко используется векторный анализ, в котором из-за использования символов grad,div,rot ,а также векторного оператора ∇ появляется проблема некорректных записей [1].Эта проблема решается с помощью применения в векторном анализе языка теории матриц [2]. В указанной работе описан векторный анализ с использованием языка теории матриц для случая прямоугольной декартовой системы координат. Многие задачи электродинамики используют операции теории поля в криволинейных координатах [3]. Однако операции градиента, дивергенции и ротора не представлены в матричной форме для случая криволинейных координат. Поэтому целью данной работы является получение матриц дифференциальных операторов криволинейных координат точек пространства для описания всех операций векторного анализа.

1. Дифференциальные операции первого порядка

В векторном анализе введены дифференциальные операции первого порядка [1]: градиента, дивергенции и ротора. Эти операции можно записать в матричной форме [2,4]. Для этого введена матрица дифференциальных операторов:

$$\partial = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}\ , \quad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y}\ , \quad \partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{2}$$

Здесь x, y и z – координаты прямоугольной декартовой системы координат.

В случае криволинейных координат u, v и w под ∂_1, ∂_2 и ∂_3 будем понимать частные производные по этим координатам, т. е.:

$$\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial u}, \quad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial v}, \quad \partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial w}\,. \tag{3}$$

В работах по векторному анализу (см., например, [1]) для записи операций первого порядка в криволинейных координатах используются величины L_1, L_2 и L_3, называемые коэффициентами Ламе. Они представлены в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}\,; \\ L_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\,; \\ L_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Например, для сферической системы координат эти коэффициенты принимают значения [1]:

$$L_1 = 1,\ L_2 = r,\ L_3 = r\sin\theta,$$

где r – расстояние данной точки от центра; θ – угол, образованный радиус-вектором данной точки с фиксированной полярной осью, который изменяется в пределах $0 \le \theta \le \pi$.

Градиент скалярной функции U в криволинейных ортогональных координатах, с использованием коэффициентов Ламе, имеет вид [1]:

$$\mathrm{grad}U = \frac{1}{L_1}\frac{\partial U}{\partial u}\overline{u}_0 + \frac{1}{L_2}\frac{\partial U}{\partial v}\overline{v}_0 + \frac{1}{L_3}\frac{\partial U}{\partial w}\overline{w}_0, \tag{5}$$

где $\overline{u}_0$, $\overline{v}_0$ и $\overline{w}_0$ – единичные векторы касательных к координатным линиям (u), (v) и (w) соответственно.

Так как градиент является вектором, то его можно записать в матричной форме в виде матрицы-столбца [4] с использованием обозначений (3):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{L_1}\partial_1 U \\ \frac{1}{L_2}\partial_2 U \\ \frac{1}{L_3}\partial_3 U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot U. \tag{6}$$

Введем квадратную диагональную матрицу коэффициентов Ламе:

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Используя матрицу дифференциальных операторов (1) и матрицу (7), градиент скалярной функции можно записать более компактно:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{L_1}\partial_1 U \\ \frac{1}{L_2}\partial_2 U \\ \frac{1}{L_3}\partial_3 U \end{pmatrix} = L^{-1}\partial U. \tag{8}$$

Согласно работам [2,4] транспонированная матрица (1), применяемая к вектору, определяет операцию дивергенции. Однако для криволинейных координат операция дивергенции имеет более сложный вид, чем для декартовой системы координат. Это обусловлено наличием коэффициентов Ламе. Для получения операции дивергенции в матричной форме введем диагональную матрицу, состоящую из произведения коэффициентов Ламе:

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} L_2 L_3 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 L_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 L_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Эту матрицу можно представить, используя матрицу (7):

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} L_2 L_3 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 L_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 L_2 \end{pmatrix} = L_1 L_2 L_3 \begin{pmatrix} \frac{L_2 L_3}{L_1 L_2 L_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_3 L_1}{L_1 L_2 L_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_1 L_2}{L_1 L_2 L_3} \end{pmatrix} = L_1 L_2 L_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{pmatrix} = lL^{-1}, \tag{10}$$

где скалярная функция

$$l = L_1 L_2 L_3. \tag{11}$$

Дивергенция вектора $\overline{A}$ в криволинейных координатах имеет вид [1]:

$$\operatorname{div}\overline{A} = \frac{1}{L_1L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial u}L_2L_3a_1 + \frac{\partial}{\partial v}L_3L_1a_2 + \frac{\partial}{\partial w}L_1L_2a_3\right), \tag{12}$$

где a_1, a_2 и a_3 – проекции вектора $\overline{A}$ на направление векторов где $\overline{u}_0$, $\overline{v}_0$ и $\overline{w}_0$ в криволинейных координатах. Дивергенцию вектора $\overline{A}$ представим в матричной форме, используя выражения (1), (3) и (10):

$$\frac{1}{L_1L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial u}L_2L_3a_1 + \frac{\partial}{\partial v}L_3L_1a_2 + \frac{\partial}{\partial w}L_1L_2a_3\right) = \frac{1}{L_1L_2L_3}\begin{pmatrix}\partial_1 & \partial_2 & \partial_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_2L_3a_1\\ L_3L_1a_2\\ L_1L_2a_3\end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{L_1L_2L_3}\begin{pmatrix}\partial_1 & \partial_2 & \partial_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_2L_3 & 0 & 0\\ 0 & L_3L_1 & 0\\ 0 & 0 & L_1L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix} = l^{-1}\partial'\widetilde{L}A = l^{-1}\partial' l L^{-1}A, \tag{13}$$

где штрих при матрице обозначает операцию транспонирования; матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}.$$

Ротор вектора $\overline{A}$ в криволинейных координатах для правовинтовой системы записан в форме, представленной в работе [1]:

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \frac{1}{L_2L_3}\left[\frac{\partial}{\partial v}L_3a_3 - \frac{\partial}{\partial w}L_2a_2\right]u_0 + \frac{1}{L_3L_1}\left[\frac{\partial}{\partial w}L_1a_1 - \frac{\partial}{\partial u}L_3a_3\right]v_0 + \frac{1}{L_1L_2}\left[\frac{\partial}{\partial u}L_2a_2 - \frac{\partial}{\partial v}L_1a_1\right]w_0. \tag{14}$$

Поскольку ротор является вектором, то его можно представить в виде матрицы-столбца. Используя обозначения (2) запишем ротор в матричной форме:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{L_2L_3}\left(\partial_2L_3a_3 - \partial_3L_2a_2\right)\\ \frac{1}{L_3L_1}\left(\partial_3L_1a_1 - \partial_1L_3a_3\right)\\ \frac{1}{L_1L_2}\left(\partial_1L_2a_2 - \partial_2L_1a_1\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{L_2L_3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{L_3L_1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1L_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_2L_3a_3 - \partial_3L_2a\\ \partial_3L_1a_1 - \partial_1L_3a_3\\ \partial_1L_2a_2 - \partial_2L_1a_1\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Крайняя правая матрица-столбец в выражении (15) подобна матрице в работе [2], определяющей операцию ротора для декартовой системы координат. Поэтому ее можно представить в виде произведения двух матриц, как это показано в той же работе. С учетом выше сказанного перепишем правую часть выражения (15) в развернутом виде.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{L_2L_3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{L_3L_1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1L_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_2L_3a_3 - \partial_3L_2a\\ \partial_3L_1a_1 - \partial_1L_3a_3\\ \partial_1L_2a_2 - \partial_2L_1a_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{L_2L_3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{L_3L_1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1L_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\partial_3 & \partial_2\\ \partial_3 & 0 & -\partial_1\\ -\partial_2 & \partial_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1a_1\\ L_2a_2\\ L_3a_3\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{L_2L_3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{L_3L_1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1L_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\partial_3 & \partial_2\\ \partial_3 & 0 & -\partial_1\\ -\partial_2 & \partial_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1 & 0 & 0\\ 0 & L_2 & 0\\ 0 & 0 & L_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Используя матрицы (7) и (10) запишем операцию ротора в компактной форме:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{L_2L_3}\left(\partial_2 L_3 a_3 - \partial_3 L_2 a_2\right) \\ \frac{1}{L_3L_1}\left(\partial_3 L_1 a_1 - \partial_1 L_3 a_3\right) \\ \frac{1}{L_1L_2}\left(\partial_1 L_2 a_2 - \partial_2 L_1 a_1\right) \end{pmatrix} = \widetilde{L}^{-1}\partial_+ LA = l^{-1}L\partial_+ LA, \tag{17}$$

где ∂_+ – антисимметричный тензор второго ранга, полученный с помощью операции добавления плюсика к вектору, описанной в работе [2]:

$$\partial_+ = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Представим оператор ротора $\widetilde{L}^{-1}\partial_+ L$ в виде матрицы дифференциальных операторов:

$$\widetilde{L}^{-1}\partial_+ L = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_2L_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_3L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L_2L_3}\partial_3 & \frac{1}{L_2L_3}\partial_2 \\ \frac{1}{L_3L_1}\partial_3 & 0 & -\frac{1}{L_3L_1}\partial_1 \\ -\frac{1}{L_1L_2}\partial_2 & \frac{1}{L_1L_2}\partial_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L_2L_3}\partial_3 L_2 & \frac{1}{L_2L_3}\partial_2 L_3 \\ \frac{1}{L_3L_1}\partial_3 L_1 & 0 & -\frac{1}{L_3L_1}\partial_1 L_3 \\ -\frac{1}{L_1L_2}\partial_2 L_1 & \frac{1}{L_1L_2}\partial_1 L_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Для левовинтовой системы операцию ротора можно записать с использованием принципа дуальности [5], как это сделано в работе [2]. Тогда операция ротора для левовинтовой системы выглядит следующим образом:

$$l^{-1}L\partial_- LA = \widetilde{L}^{-1}\partial_- LA = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_2L_3}\left(\partial_3 L_2 a_2 - \partial_2 L_3 a_3\right) \\ \frac{1}{L_3L_1}\left(\partial_1 L_3 a_3 - \partial_3 L_1 a_1\right) \\ \frac{1}{L_1L_2}\left(\partial_2 L_1 a_1 - \partial_1 L_2 a_2\right) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где ∂_- – дуальная матрица матрице ∂_+, полученная с помощью операции добавления минусика к вектору [2]. Она имеет такой вид:

$$\partial_- = \begin{pmatrix} 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & -\partial_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Дифференциальные операции первого порядка представлены в табл.1. В первой колонке таблицы эти операции записаны в векторной форме, а во второй колонке – в матричной форме. Поэтому данная таблица удобна для перевода некоторых формул с классического языка векторного анализа на языке теории матриц. Матрицы дифференциальных операторов, записанные в табл. 1, могут действовать на любые векторы и скаляры в криволинейной системе координат.

Таблица 1 – Дифференциальные операторы первого порядка

Векторная форма	Матричная форма
grad	$L^{-1}\partial$
div	$l^{-1}\partial'\widetilde{L} = l^{-1}\partial' l L^{-1}$
rot₊	$\widetilde{L}^{-1}\partial_+ L = l^{-1}L\partial_+ L$
rot₋	$\widetilde{L}^{-1}\partial_- L = l^{-1}L\partial_- L$

2. Дифференциальные операции второго порядка

В теории поля применяются дифференциальные операции второго порядка, такие как дивергенция градиента, градиент дивергенции, дивергенция ротора, ротор градиента и ротор ротора. Вышеперечисленные операции в матричной форме для декартовой системы координат представлены в работе [2]. Запишем эти же операции в матричной форме для криволинейной системы координат. Они получаются в результате простого перемножения матриц дифференциальных операторов первого порядка, представленных в табл. 1.

Операцию дивергенции ротора для правовинтовой системы представим в следующем виде:

$$l^{-1}\partial'\widetilde{L}\left(\widetilde{L}^{-1}\partial_+ L\right) = l^{-1}\partial'\partial_+ L = 0', \qquad (22)$$

где $0'$ – транспонированная столбцевая матрица, содержащая элементы, равные нулю.

Ротор градиента можно записать следующим образом:

$$\widetilde{L}^{-1}\partial_+ L(L^{-1}\partial) = \widetilde{L}^{-1}\partial_+\partial = Ll^{-1}\partial_+\partial = 0, \qquad (23)$$

где 0 – столбцевая матрица, содержащая элементы, равные нулю.
Для левовинтовой системы эти операции выглядят аналогично.

Все дифференциальные операции второго порядка в виде дифференциальных операторов сведем в табл. 2.

Таблица 2 – Дифференциальные операторы второго порядка

Векторная форма	Матричная форма
div grad	$l^{-1}\partial'\widetilde{L}L^{-1}\partial = l^{-1}\partial' l(L^{-1})^2\partial$
grad div	$L^{-1}\partial l^{-1}\partial'\widetilde{L} = L^{-1}\partial l^{-1}\partial' l L^{-1}$
div rot₊	$l^{-1}\partial'\partial_+ L = 0'$
div rot₋	$l^{-1}\partial'\partial_- L = 0'$
rot₊grad	$\widetilde{L}^{-1}\partial_+\partial = Ll^{-1}\partial_+\partial = 0$
rot₋grad	$\widetilde{L}^{-1}\partial_-\partial = Ll^{-1}\partial_-\partial = 0$
rot₊rot₊	$\widetilde{L}^{-1}\partial_+ L\widetilde{L}^{-1}\partial_+ L = l^{-1}L\partial_+ Ll^{-1}L\partial_+ L$
rot₋ rot₊	$\widetilde{L}^{-1}\partial_- L\widetilde{L}^{-1}\partial_+ L = l^{-1}L\partial_- Ll^{-1}L\partial_+ L$
rot₊rot₋	$\widetilde{L}^{-1}\partial_+ L\widetilde{L}^{-1}\partial_- L = l^{-1}L\partial_+ Ll^{-1}L\partial_- L$
rot₋rot₋	$\widetilde{L}^{-1}\partial_- L\widetilde{L}^{-1}\partial_- L = l^{-1}L\partial_- Ll^{-1}L\partial_- L$

Операция ротор ротора используется, например, при определении структуры поля электрического излучателя (диполя Герца) [3]. Поэтому для примера представим операцию ротор ротора в матричной форме в развернутом виде для правовинтовой системы используя выражение (19):

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L_2L_3}\partial_3 L_2 & \frac{1}{L_2L_3}\partial_2 L_3 \\ \frac{1}{L_3L_1}\partial_3 L_1 & 0 & -\frac{1}{L_3L_1}\partial_1 L_3 \\ -\frac{1}{L_1L_2}\partial_2 L_1 & \frac{1}{L_1L_2}\partial_1 L_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L_2L_3}\partial_3 L_2 & \frac{1}{L_2L_3}\partial_2 L_3 \\ \frac{1}{L_3L_1}\partial_3 L_1 & 0 & -\frac{1}{L_3L_1}\partial_1 L_3 \\ -\frac{1}{L_1L_2}\partial_2 L_1 & \frac{1}{L_1L_2}\partial_1 L_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{matrix} -\frac{1}{L_2L_3}\partial_3 L_2 \, {}_2\frac{1}{L_3L_1}\partial_3 L_1 - \frac{1}{L_2L_3}\partial_2 L_3 \frac{1}{L_1L_2}\partial_2 L_1 & \frac{1}{L_2L_3}\partial_2 L_3 \frac{1}{L_1L_2}\partial_1 L_2 \\ \frac{1}{L_3L_1}\partial_1 L_3 \frac{1}{L_1L_2}\partial_2 L_1 & -\frac{1}{L_3L_1}\partial_3 L_1 \frac{1}{L_2L_3}\partial_3 L_2 - \partial_1 \frac{1}{L_3L_1} L_3 \frac{1}{L_1L_2}\partial_1 L_2 \\ \frac{1}{L_1L_2}\partial_1 L_2 \frac{1}{L_3L_1}\partial_3 L_1 & \frac{1}{L_1L_2}\partial_2 L_1 \frac{1}{L_2L_3}\partial_3 L_2 \end{matrix}\right. \vdots$$

$$\vdots \left.\begin{matrix} \frac{1}{L_2L_3}\partial_3 L_2 \, {}_2\frac{1}{L_3L_1}\partial_1 L_3 \\ \frac{1}{L_3L_1}\partial_3 L_1 \frac{1}{L_2L_3}\partial_2 L_3 \\ -\frac{1}{L_1L_2}\partial_2 L_1 \frac{1}{L_2L_3}\partial_2 L_3 - \frac{1}{L_1L_2}\partial_1 L_2 \frac{1}{L_3L_1}\partial_1 L_3 \end{matrix}\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{L_2L_3}[\partial_2 \frac{L_3}{L_1L_2}(\partial_1 L_2 a_2 - \partial_2 L_1 a_1) - \partial_3 \frac{L_2}{L_3L_1}(\partial_3 L_1 a_1 - \partial_1 L_3 a_3)] \\ \frac{1}{L_1L_3}[\partial_3 \frac{L_1}{L_2L_3}(\partial_2 L_3 a_3 - \partial_3 L_2 a_2) - \partial_1 \frac{L_3}{L_1L_2}(\partial_1 L_2 a_2 - \partial_2 L_1 a_1)] \\ \frac{1}{L_1L_2}[\partial_1 \frac{L_2}{L_3L_1}(\partial_3 L_1 a_1 - \partial_1 L_3 a_3) - \partial_2 \frac{L_1}{L_2L_3}(\partial_2 L_3 a_3 - \partial_3 L_2 a_2) \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Если проделать аналогичные действия на языке векторного анализа, то полученное выражение для операции ротор ротора полностью совпадет с выражением (24), полученным с помощью матриц дифференциальных операторов. Таким образом, представленные выражения в матричной форме для дифференциальных операций второго порядка в табл. 2 полностью соответствуют выражениям в векторной форме.

Дифференциальные операторы первого и второго порядков в матричной форме, представленные в табл.1 и 2, удобно использовать для записи уравнений классической теории электродинамики в случае применения криволинейной системы координат. Так симметричные уравнения Максвелла в векторной форме имеют вид [5]:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{rot}_{+}\,\overline{H} = \bar{j} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}; \\ &\mathrm{rot}_{-}\,\overline{E} = \bar{e} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}; \\ &\mathrm{div}\,\overline{D} = \rho; \\ &\mathrm{div}\,\overline{B} = \psi. \end{aligned}\right\}, \qquad (25)$$

где $\overline{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, А/м; $\overline{E}$ – вектор напряженности электрического поля, В/м; $\overline{D}$ – вектор электрической индукции, Кл/м^2; $\overline{B}$ – вектор магнитной индукции, Вб/м^2; $\bar{j}$ – вектор объемной плотности тока проводимости, А/м^2; $\bar{e}$ – вектор объемной плотности напряжения сопротивления, В/м^2; ρ – объемная плотность заряда, Кл/м^3; ψ – объемная плотность потока, Вб/м^3.

Эти же уравнения в матричной форме можно записать, используя дифференциальные операторы табл.1:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{L}^{-1}\partial_{+}LH = j + \partial_0 D; \\ &\tilde{L}^{-1}\partial_{-}LE = e + \partial_0 B; \\ &l^{-1}\partial'\tilde{L}D = \rho; \\ &l^{-1}\partial'\tilde{L}B = \psi. \end{aligned}\right\}, \qquad (26)$$

где H, E, D, B, j, e – матрицы-столбцы соответствующих векторов; $\partial_0 \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}$.

В заключение отметим, что найденные матрицы дифференциальных операторов криволинейных координат точек пространства всех операций векторного анализа можно широко использовать при решении задач классической электродинамики.

Литература

1. *Гольдфайн И.А.* Векторный анализ и теория поля. – М.: Наука, 1968. – 128 с.
2. *Иваницкий А.М.* Матрицы в векторном анализе // Наукові праці ОНАЗ. – 2002. – №1. – С. 19-25.
3. *Вольман В.И., Пименов Ю.В.* Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971. – 488 с.
4. *Крутков Ю.А.* Тензор функций напряжений и общее решение в статике теории упругости. – М.–Л.: Изд. АН СССР, 1949. – 200 с.
5. *Иваницкий А.М.* Принцип дуальности в электродинамике // Наукові праці ОНАЗ. – 2000. – №3. – С. 29–35.