

**ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ПЕРЕДАЧИ  
ИНФОРМАЦИИ ПО КАНАЛАМ С ФМ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ  
НАЧАЛЬНОЙ ФАЗЫ И ЧАСТОТЫ НЕСУЩЕЙ**

**ДИСКРЕТНІ МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ МЕТОДІВ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ  
ПО КАНАЛАХ З ФМ ТА НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ  
ПОЧАТКОВОЇ ФАЗИ І ЧАСТОТИ НЕСУЧОЇ**

**DISCRETE MODELS OF DIFFERENTIAL METHODS OF AN INFORMATION TRANSMITTING  
BY CHANNELS WITH PM AND UNCERTAINTY OF  
AN INITIAL PHASE AND FREQUENCY CARRIER**

**Аннотация.** Рассмотрены дифференциальные методы передачи цифровой информации по каналам с фазовой модуляцией и неопределенностью начальной фазы и частоты несущей сигнала. Выполнен синтез дифференциальных методов на базе разработанных моделей каналов с неопределенностью.

**Анотація.** Розглянуті диференціальні методи передачі цифрової інформації по каналах з фазовою модуляцією і невизначеністю початкової фази і частоти несучої сигналу. Виконано синтез диференціальних методів на базі розроблених моделей каналів з невизначеністю.

**Summary.** In paper the differential transmission methods of the digital information by channels with phase modulation and uncertainty of an initial phase and frequency carrier are considered. Synthesis of differential methods on the basis of the developed models of channels with uncertainty is fulfilled.

В системах цифровой радиосвязи широко применяются сигналы с фазовой модуляцией (ФМ). Когерентный прием сигналов ФМ сопровождается явлением *неопределенностью фазы* опорного колебания, восстанавливаемого в когерентном демодуляторе. Для передачи информации по каналу с неопределенностью Н.Т.Петровичем предложен метод *относительной фазовой модуляции* (ОФМ) [1,2]. Метод состоял в совместном использовании процессов фазовой модуляции гармонического переносчика и *относительного кодирования* (ОК) информационных символов. Позже идея относительного кодирования была широко использована Ю.Б.Окуневым для разработки теоретических основ *фазоразностной модуляции* (ФРМ) [3]. Идеи ФРМ использованы при разработке дифференциальных методов передачи сигналов в системах многоантенной радиосвязи (*ММО*) [4]. Более того, в обзорной статье [5] отмечалась необходимость детального изучения возможностей применения дифференциальных методов в системах *ММО*. Как показывает анализ, концепции относительного кодирования и фазоразностной модуляции были разработаны в [1,2] на основе эвристических соображений. В тоже время, в учебном пособии [6] показано, что имеется возможность корректно решать задачи устранения неопределенности методами дискретной математики. **Цель данной статьи** состоит в систематизированном изложении синтеза методов передачи дискретной информации по каналам с ФМ, неопределенностью начальной фазы и частоты несущего колебания. Первоначально выясняются причины появления неопределенности начальной фазы и частоты несущего колебания и формируются их математические модели. Затем, на основе использования многочленных представлений решаются задачи метода *синтеза дифференциальных* передачи информации по каналам с неопределенностью фазы и частоты.

**1. Модель дискретного канала с неопределенностью фазы несущей.** При восстановлении известными методами (Пистолькорса, Сифорова) в демодуляторе опорного колебания для когерентного приема ФМ сигналов восстановленная несущая приобретает дополнительный фазовый

сдвиг, кратный  $\Delta\varphi_i = f \times \frac{(2\pi)}{M}$  ( $M$  – число позиций фазы ФМ сигнала). Если ансамбль передаваемых

ФМ- $M$  сигналов содержит набор  $\{s_0(t), s_1(t), s_1(t), s_{M-1}(t)\}$ , то вследствие *ошибок неопределенности* при восстановлении фазы несущей к номеру решения на выходе демодулятора  $S_{i+j}$  добавляется произвольное число  $f \in \{0, 1 \dots M\}$ , что соответствует *ошибке восстановления фазы*

несущей  $\Delta\varphi_i = f \times \frac{(2\pi)}{M}$ . В пособии [6, разд. 2.1.7] отмечается, что имеет место *изоморфизм* набора элементов кольца целых чисел и углов поворота вектора сигналов ФМ-М. Изоморфизм кольца целых чисел порядка  $M$  и углов поворота вектора сигналов ФМ-М позволяет описать *алгебраическую модель канала с неопределенностью* (рис. 1).

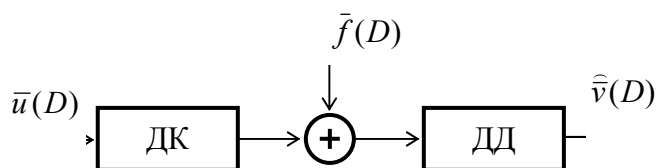


Рисунок 1 – Дискретная модель канала с неопределенностью

На рис. 1 использованы следующие обозначения:

$\bar{u}(D)$  – последовательность передаваемых символов;

$\hat{v}(D)$  – последовательность принятых символов;

$\tilde{f}(D)$  – последовательность символов неопределенности;

$\oplus$  – сумматор по модулю  $M$ ;

ДК – дифференциальный кодер;

ДД – дифференциальный декодер;

$D$  – оператор задержки.

Все символы этих последовательностей выбираются из кольца целых чисел порядка  $M$ . Неопределенность фазы моделируется следующим образом. В канале к последовательности передаваемых символов  $\bar{u}(D)$  добавляется последовательность символов неопределенности (1)

$$\tilde{f}(D): \bar{v}(D) = \bar{u}(D) \oplus \tilde{f}(D), \quad (1)$$

где  $D$  – оператор задержки,

и помеха неопределенности определяется по формуле (2)

$$\tilde{f}(D) = fD^0 + fD + fD^2 + \dots; \quad (2)$$

где  $f$  – символ неопределенности, определяющий фазовый сдвиг несущей по формуле (3)

$$\Delta\varphi_i = f \times \frac{(2\pi)}{M}. \quad (3)$$

Помеху в выражении (2) можно представить так:

$$\tilde{f}(D) = \frac{f}{(1-D)}. \quad (4)$$

Справедливость этого выражения нетрудно проверить путем непосредственного деления и сопоставления результата деления с (2).

**2. Дифференциальное кодирование.** Таким образом, как видно из предыдущего раздела, помеха в канале с неопределенностью состоит в регулярном добавлении к фазе принимаемого сигнала постоянного фазового сдвига  $\Delta\varphi_i = f \times \frac{(2\pi)}{M}$ , величина которого в модели определяется символом неопределенности  $f$ . Включение на приемной стороне *дифференциального декодера* (ДД) с передаточной функцией

$$K_{\text{ДД}} = (1-D) \quad (5)$$

позволяет “подавить” помеху неопределенности, поскольку на выходе ДД получаем

$$\bar{v} = (D) = \bar{u}(D)(1-D) + fD^0. \quad (6)$$

Т. е., в соответствии с выражением (6), принятая последовательность содержит *только первый символ помехи неопределенности*  $fD^0$ . Из выражения (6) следует, что для восстановления из принятой

последовательности  $\bar{v}(D)$  переданной последовательности  $\bar{u}(D)$  на передающей стороне необходимо включить дифференциальный кодер (ДК) с передаточной функцией, обратной (5):

$$K_{\text{дк}}(D) = \frac{1}{(1-D)}. \quad (7)$$

Тогда последовательность на выходе ДД будет

$$\bar{v}(D) = [\bar{u}(D)K_{\text{дк}}(D) + \bar{f}(D)]K_{\text{дд}}(D) = \bar{u}(D) + fD^0, \quad (8)$$

поскольку  $K_{\text{дк}}(D) \times K_{\text{дд}}(D) = 1$ . Раскрываем структуры ДК и ДД из рис. 1 в соответствии с выражениями (5) и (7). Соответственно, получаем итоговую дискретную модель метода передачи, представленную на рис. 2. Операции сложения и вычитания производятся по правилам, принятым в кольце классов вычетов целых чисел порядка  $M$ .

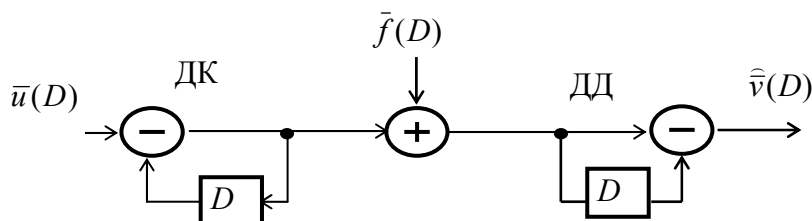


Рисунок 2 – Дифференциальный кодер (ДК) и дифференциальный декодер (ДД) в канале с неопределенностью  $\bar{f}(D)$ ;  $D$  – элемент задержки

Поскольку при  $M = 2$  результаты сложения и вычитания по модулю 2 совпадают, в двоичных каналах роль дифференциального кодера на передающем конце играет двоичный *относительный кодер*, тогда на приемном конце следует разместить двоичный *относительный декодер*. Представленная модель соответствует идеологии относительного кодирования (относительной фазовой модуляции), предложенной Н.Т. Петровичем. К этому следует добавить, что структура дифференциального декодера из рис. 2 с передаточной функцией (5) может быть также получена с использованием математического аппарата вычисления конечных разностей [9]. Данной ситуации соответствует случай вычисления конечной разности первого порядка. Следуя терминологии, предложенной в монографии Ю.Окунева [3], описанный метод следует именовать как фазоразностная модуляция первого порядка (ФРМ-1), поскольку на передаче информация закладывается в первую разность фаз передаваемого сигнала.

**3. Модель канала с неопределенностью частоты.** Можно указать следующие причины появления с неопределенностью частоты при когерентном приеме ФМ- $M$  сигнала:

1. Расхождение частоты несущей принимаемого сигнала  $\omega_c$  и частоты восстановленной несущей  $\omega_0$  вследствие начального расхождения частот перед входом в связь и нестабильностей несущих частот сигнала и восстановленной несущей в процессе работы.

2. Влияние эффекта Доплера на частоту принимаемого сигнала, обусловленное относительным движением передатчика и приемника сигнала (в системах мобильной связи). В каждом из этих случаев будем полагать, что расхождение частот сигнала  $\omega_c$  и частоты опорной несущей  $\omega_0$  равно  $\Delta\omega = (\omega_c - \omega_0)$ . Доплеровский сдвиг частоты при относительном движении передатчика и приемника сигнала со скоростью  $v$  составляет [8]

$$\Delta\omega_{\text{д}} = (+, -)\omega_c \frac{v}{c}, \quad (9)$$

где знак выбирается в зависимости от направления перемещения («+» – передатчик и приемник сближаются; «-» – передатчик и приемник удаляются);  $c$  – скорость распространения радиосигнала в свободном пространстве. Наличие расхождения частот  $\Delta\omega$  приводит к дополнительной неопределенности фазы принимаемого сигнала, которая со временем линейно нарастает:

$$\Delta\varphi(t) = \Delta\omega t. \quad (10)$$

Этот дополнительный фазовый сдвиг накладывается на закон изменения фазы принимаемого сигнала и затрудняет его демодуляцию. Допплеровский сдвиг оказывает влияние в системах мобильной связи при работе на очень высоких частотах. К примеру, при скорости  $v = 100$  км/час ( $27,8$  м/с),

$c = 300000$  м/с множитель  $\frac{v}{c}$  в выражении (9) составляет  $92 \times 10^{-6}$ , т.е. при частоте сигнала 1 МГц

доплеровский сдвиг частоты составит 92 Гц, а при частоте 1 ГГц возрастет до величины 9200 Гц. Такое расхождение частот необходимо соразмерять со скоростью модуляции. При

дискретной ФМ-М скорость модуляции  $v = \frac{\log_2 M}{T}$  (бит/с), где  $T$  – длительность сигнала. При

расхождении частот  $\Delta\omega$  в соответствии с (10) набег фазы сигнала на интервале  $T$  составит  $\Delta\phi = \Delta\omega T$ . Эта величина при соответствующих значениях параметров может превышать

минимальный пространственный угол между сигналами  $\Delta\phi_t = f \times \frac{(2\pi)}{M}$ . В общем случае, при

больших значениях  $\Delta\phi = \Delta\omega T$  расхождение фаз со временем нарастает линейно и может быть представлено дискретной моделью как

$$\Delta\phi(D) = \Delta\phi(1D^1 + 2D^2 + 3D^3 + 4D^4 + \dots + kD^k + \dots) = \Delta\phi K(D), \quad (11)$$

где дискретная функция  $K(D) = \sum_{k=1}^{\infty} kD^k$  отображает линейное нарастание фазы. С учетом этого модель канала из рис. 2 может быть дополнена следующим образом (рис. 3).

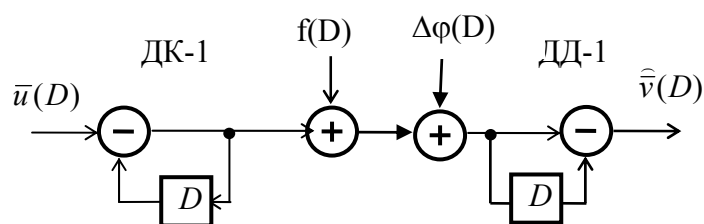


Рисунок 3 – Модель канала с неопределенностью частоты и начальной фазы

Заслуживает внимания анализ прохождения помехи неопределенности  $\Delta\phi(D) = \Delta\phi K(D)$  через дифференциальный декодер с передаточной функцией  $K_{\text{дд}} = (1 - D)$ . Положим  $u(D) = 0$  и  $f(D) = 0$ . В этом случае на входе дифференциального декодера ДД-1 действует только помеха неопределенности частоты и результат будет таким

$$v(D) = \Delta\omega(D)(1 - D) = \frac{\Delta\phi}{(1 - D)}. \quad (12)$$

**4. Дифференциальное кодирование второго порядка.** Из формулы (12) следует, что к каждому символу на выходе ДД-1 добавляется символ неопределенности  $\Delta\phi$ , влияние которого можно нейтрализовать дополнительным дифференциальным кодированием. Подобное дифференциальное кодирование (ДК второго порядка) вводится так, как это было введено выше. На рис. 4 показана структура канала с двумя видами неопределенности и внешним дифференциальным кодированием (второго порядка).

Полагая нулевыми все виды помех  $f(D) = 0$ , и  $\Delta\phi(D) = 0$  можно определить прохождение информационной последовательности по цепочке дифференциальных кодеров (ДК-2, ДК-1) и декодеров (ДД-1, ДД-2):  $v(D) = u(D)$ . В тоже время, в такой структуре *все виды неопределенности подавляются*. Недостатком является появление символов неопределенности в самом начале процесса дифференциального декодирования. Полагая  $u(D) = 0$ , определим результат прохождения последовательностей неопределенности через цепочку (ДД-1, ДД-2):  $[f(D) + \Delta\phi(D)](1 - D)^2 = (fD^0 + \Delta\phi D^0)(1 - D) = [fD^0 + \Delta\phi D^0 - fD - \Delta\phi D]$ . Иными словами, на начальном участке процесса

дифференциального декодирования будут проявляться символы неопределенности, которые подавляются в последующем.

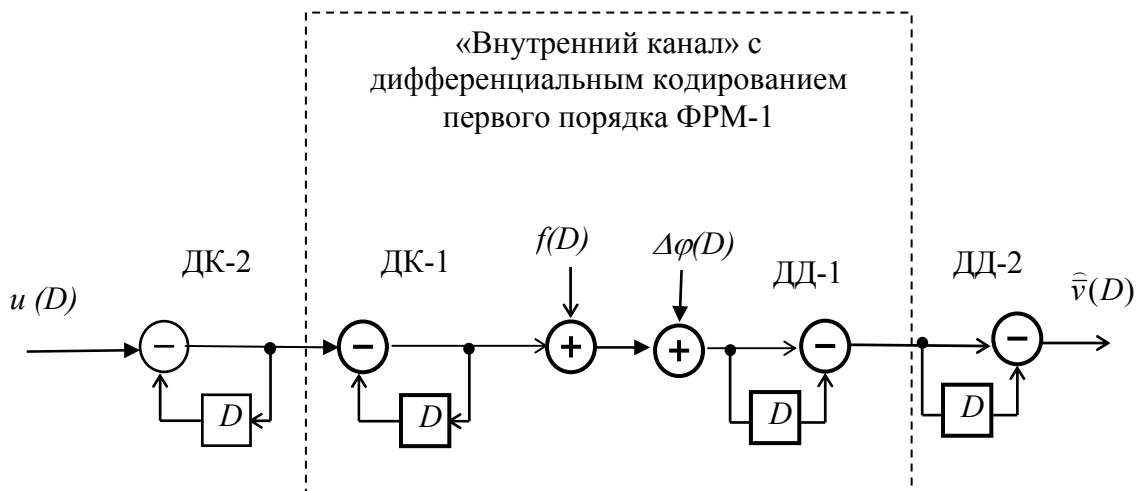


Рисунок 4 – Модель канала с неопределенностью частоты и начальной фазы, внутренним дифференциальным кодированием (первого порядка) и внешним дифференциальным кодированием (второго порядка)

В работе рассмотрены дискретные модели каналов передачи цифровой информации с фазовой модуляцией и неопределенностью начальной фазы и частоты несущего колебания. Использование в моделях многочленных представлений процессов действия помех, неопределенности на фазу и частоту сигнала позволило простым и наглядным способом сформулировать алгоритмы и структуры методов фазоразностной модуляции первого и второго порядков, устойчивых к действию помех неопределенности фазы и частоты (соответственно).

### Литература

1. А. с. 105692 приоритет от 22.02.1954. Способ проводной и радиосвязи фазоманипулированными колебаниями / Н.Т. Петрович. Минист. электростан. и электропромыш. СССР № К867/20462/45447. Класс 21а, 17, 21,а<sup>4</sup>.
2. Петрович Н.Т. Новые способы осуществления фазовой телеграфии / Петрович Н.Т. // Радиотехника. – 1957. – № 10. – С. 7-9.
3. Окунев Ю.Б. Теория фазоразностной модуляции / Окунев Ю.Б. – М.: Связь, 1979.
4. Gesbert D. From Theory to Practice: An Overview of MIMO Space-Time Coded Wireless Systems / Gesbert D. // IEEE Journal on Selected Areas in Communications 2003. – Vol.SAC-21, – №.3, April, – P. 281-302.
5. Банкет В.Л. Методы пространственно-временного кодирования для систем радиосвязи / Банкет В.Л., Незгазинская Н.В., Токарь М.В. // Цифрові технології, – 2009. – № 6. – С. 5.
6. Банкет В.Л. Дискретная математика в задачах теории цифровой связи: учебн. пособ. / Банкет В.Л. – Одесса: ОНАС, 2008. – 118 с.
7. Банкет В.Л. Системы восстановления несущей при когерентном приеме дискретных сигналов / В.Л. Банкет, А.М. Мельник // Зарубежная радиоэлектроника. – 1983. – № 12. – С. 28-49.
8. Скляр Б. Цифровая связь. Теретические основы и практическое применение / Скляр Б. – [2-е, изд, испр.] ; пер. с англ. – М: Изд. дом «Вильямс», 2003. – 1004 с.
9. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей / Гельфонд А.О. – М.: Гостехиздат, 1952. – 156 с.