УДК 621.371:537.813

Кравчик Ю.С.
Kravchyk Y.S.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАД ЧИСЛАМИ М

INTEGRATION AND INTEGRATED TRANSFORMATIONS ABOVE NUMBERS OF M

Аннотация. Представлено интегрирование над числами М и аналог преобразования Фурье.
Summary. Integration above numbers of M and analogue of transformation Fourier is submitted.

В настоящее время актуальна проблема получения аналитических решений системы уравнений Максвелла. Такие решения необходимы для расчета и анализа электромагнитных резонаторов, направляющих систем и пространственных полей в радиотехнике и телекоммуникации.

Для получения решений системы уравнений Максвелла наибольшее распространение получили символический метод [1] и его обобщения – обобщенный символический метод [2] и многомерный символический метод [3], а также теория дифференциальных уравнений [4]. Их использование ограничено определенным классом функций, в котором находится решение, либо математическими трудностями, связанными с необходимостью разделения переменных. Во многих практически важных случаях такие методы не дают аналитического решения. Теория функций комплексной переменной [5] адекватно описывает плоские стационарные электрические и магнитные поля. Возможность использования одного из вариантов расширения комплексных чисел – чисел М в электродинамике Максвелла показана в [6]. В [6] описаны числа М, их арифметика – сложение, вычитание, умножение и деление, а также дифференцирование функций над числами М. Однако не была рассмотрена обратная операция – интегрирование. Поэтому целью данной работы является показать возможность введения интегрирования для функций над числами М. В дальнейшем будут использованы обозначения и понятия, введенные в [6].

1. Интегрирование

Интегрирование для функций над числами М по некоторой кривой γ определим следующим образом.

Определим кривую на листе малой переменной следующим образом. Пусть на отрезке действительной оси $\delta \le r \le \chi$ задана функция $\lambda = \lambda(r)$, принимающая значения на листе малой переменной $\lambda = i \cdot x(r) + j \cdot y(r) + k \cdot z(r) + I \cdot t(r)$. Здесь $x(r)$, $y(r)$, $z(r)$ и $t(r)$ – действительные непрерывные дифференцируемые функции. Аналогично определим кривую как однопараметрическую функцию со значениями на листе большой переменной $\Lambda = Ii \cdot X(r) + Ij \cdot Y(r) + Ik \cdot Z(r) + T(r)$.

Введем интегрирование над листом малой переменной λ функции F аналогично введению интегрирования в теории функций комплексного переменного (см., например, [4]). Разобьем кривую γ на частичные дуги γ_n конечным числом n точками λ_n, взятыми в порядке следования по кривой γ. Обозначим через l_n длину дуги [1], оканчивающейся точкой λ_n, и пусть $l = max\ l_n$ – максимальная длина элементарной дуги из разбиения. Тогда определим интеграл от функции $F(\lambda)$ по кривой γ как следующий предел при стремлении максимальной длины элементарной дуги l к нулю:

$$\int_\gamma F(\lambda)d\lambda = \lim_{l\to 0}\sum_n F(\lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1}), \tag{1}$$

где γ – контур интегрирования и $\lambda \in \gamma$. Функция $F(\lambda)$, в соответствии с [6], представляется в виде суммы действительных и мнимых составляющих. Соответственно, λ принадлежит листу малых переменных и представляется в виде суммы мнимых составляющих: $\lambda = I{\cdot}t + i{\cdot}x + j{\cdot}y + k{\cdot}z$. Тогда

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = I\cdot(t_n - t_{n-1}) + i(x_n - x_{n-1}) + j(y_n - y_{n-1}) + k(z_n - z_{n-1}) \tag{2}$$

при $l \to 0$ соответствующие разности перейдут в действительные дифференциалы. Окончательно получаем:

$$\int_\gamma F(\lambda)d\lambda = \int_\gamma (\alpha + i\cdot C_X + j\cdot C_Y + k\cdot C_Z + I\cdot\beta + Ii\cdot G_X + Ij\cdot G_Y + Ik\cdot G_Z)\times \\ \times(I\cdot\partial t + i\cdot\partial x + j\cdot\partial y + k\cdot\partial z). \tag{3}$$

Раскрывая скобки и выполняя умножение в соответствии с табл. 1 умножения [6] получим представление интеграла (1) в виде суммы интегралов от действительных переменных:

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(\lambda)d\lambda &= \int_\gamma -C_X\partial x - C_Y\partial y - C_Z\partial z - \beta\partial t + i\cdot\int_\gamma \alpha\partial x + C_Y\partial z - C_Z\partial y - G_X\partial t +\\ &+ j\cdot\int_\gamma \alpha\partial y - C_X\partial z + C_Z\partial x - G_Y\partial t + k\cdot\int_\gamma \alpha\partial z + C_X\partial y - C_Y\partial x - G_Z\partial t +\\ &+ I\cdot\int_\gamma \alpha\partial t - G_X\partial x - G_Y\partial y - G_Z\partial z + Ii\cdot\int_\gamma C_X\partial t + \beta\partial x + G_Y\partial z - G_Z\partial y +\\ &+ Ij\cdot\int_\gamma C_Y\partial t + \beta\partial y - G_X\partial z + G_Z\partial x + Ik\cdot\int_\gamma C_Z\partial t + \beta\partial z + G_X\partial y - G_Y\partial x.\end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно, интегрирование над числами М по кривой γ сводится, как и в комплексном случае, к сумме действительных интегралов.

Аналогично представим интеграл над листом большой переменной *Λ* по кривой *Г*:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F(\Lambda)d\Lambda &= \int_\Gamma (\alpha + i\cdot C_X + j\cdot C_Y + k\cdot C_Z + Ii\cdot G_X + Ij\cdot G_Y + Ik\cdot G_Z)\times\\ &\times(\partial T + Ii\cdot\partial X + Ij\cdot\partial Y + Ik\cdot\partial Z).\end{aligned} \tag{5}$$

Раскрывая скобки и выполняя умножение в соответствии с табл. 1 умножения чисел М [6], интеграл (5) сведем к сумме действительных интегралов:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F(\Lambda)d\Lambda &= \int_\Gamma \alpha\partial T + G_X\partial X + G_Y\partial Y + G_Z\partial Z + i\cdot\int_\Gamma C_X\partial T - \beta\partial X - G_Y\partial Z + G_Z\partial Y +\\ &+ j\cdot\int_\gamma C_Y\partial T - G_Z\partial X - \beta\partial Y + G_X\partial Z + k\cdot\int_\Gamma C_Z\partial T - \beta\partial Z - G_X\partial Y + G_Y\partial X +\\ &+ I\cdot\int_\Gamma \beta\partial T - C_X\partial X - C_Y\partial Y - C_Z\partial Z + Ii\cdot\int_\Gamma G_X\partial T + \alpha\partial X + C_Y\partial Z - C_Z\partial Y +\\ &+ Ij\cdot\int_\Gamma G_Y\partial T + \alpha\partial Y - C_X\partial Z - C_Z\partial X + Ik\cdot\int_\Gamma G_Z\partial T + \alpha\partial Z + C_X\partial Y - C_Y\partial X.\end{aligned} \tag{6}$$

Основные свойства интегралов (3) и (5) следующие:

1. Линейность:

$$\int_\gamma (F_1 m_1 + F_2 m_2)d\lambda = m_1\int_\gamma F_1 d\lambda + m_2\int_\gamma F_2 d\lambda, \tag{7}$$

где m_1, m_2 – числа с листа малой переменной, $m_1, m_2 \subseteq \lambda$.

2. $$\int_\gamma F d\lambda = -\int_{-\gamma} F d\lambda. \tag{8}$$

3. $$\int_{\gamma_1} F d\lambda + \int_{\gamma_2} F d\lambda = \int_{\gamma_1+\gamma_2} F d\lambda. \tag{9}$$

Свойства 1-3 вытекают из свойств сумм действительных интегралов (4) и (6) и устанавливаются непосредственной проверкой.

Аналогичным путем введем *m*-кратные интегралы (см., например, [7]). Определим *m*-кратный интеграл на *m* листах малых переменных λ^m как предел следующей суммы:

$$\begin{aligned}&\iiint_{\gamma^1\gamma^2\gamma^3}\ldots\int_{\gamma^m} F(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,\ldots,\lambda^m)d\lambda^1 d\lambda^2 d\lambda^3 d\ldots\lambda^m = \int_{\gamma^{[m]}} F(\lambda^{[m]})d\lambda^{[m]} =\\ &= \lim_{\substack{l^1\to 0\\ l^2\to 0\\ l^3\to 0\\ \ldots\ldots\\ l^m\to 0}} \sum_{n^1,n^2,n^3\ldots n^m} F(\lambda^{[m]})(\lambda^1_{n_1} - \lambda^1_{n_1+1})(\lambda^2_{n_2} - \lambda^2_{n_2+1})(\lambda^3_{n_3} - \lambda^3_{n_{3+1}})\ldots(\lambda^m_{n_m} - \lambda^m_{n_m+1}),\end{aligned} \tag{10}$$

где l^k – максимальная длинна элементарной дуги *k*-й переменной при разбиении на отрезки точками n_k. $F(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3, \ldots,\lambda^m)$ – функция *m* переменных; $\gamma^{[m]}$ – *m*-кривых на *m* листах малой переменной, заданных как параметрические функции от действительных параметров r^n со значением на *n*-м листе переменной λ^n. Подставляя в (10) составляющие функции *F* и дифференциалов

$$d\lambda^k = i\cdot\partial x^k(r) + j\cdot\partial y^k(r) + k\cdot\partial z^k(r) + I\cdot\partial t^k(r) \qquad (11)$$

в виде действительных и мнимых составляющих, с учетом таблицы умножения чисел М, этот интеграл сводим к вычислению действительных интегралов. Их свойства будут соответствовать свойствам (7)-(9) и свойствам действительных m-мерных интегралов.

Аналогично определим кратный интеграл на листах большой переменной $\Lambda^{[m]}$. Для выражения (10) примем следующую сокращенную запись кратного интеграла на листе большой переменной:

$$\int\limits_{\Gamma^{[m]}} F(\Lambda^{[m]})d\Lambda^1 d\Lambda^2 d\Lambda^3 ... d\Lambda^m = \int\limits_{\Gamma^{[m]}} F(\Lambda^{[m]})d\Lambda^{[m]}. \qquad (12)$$

Здесь: $\Gamma^{[m]}$ – m листов большой переменной Λ^n.

Введенные операции интегрирования будут использованы при разложениях в ряды и интегральных преобразованиях.

2. Ортогональные ряды и преобразование Фурье

В качестве примера использования интегрирования рассмотрим определение коэффициентов разложения периодических функций над числами М в ряд. Так же рассмотрим аналог преобразования Фурье для непериодических функций над числами М.

Предварительно переопределим функцию $F(\lambda)$ с листа малой переменной λ на 4 листах малой переменной $\lambda = \lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4$ при следующих условиях:

$$F(\lambda) = F(\lambda^{[4]}) = F(\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4), \qquad (13)$$

$$\lambda^1 = i\cdot x,\ \lambda^2 = j\cdot y,\ \lambda^3 = k\cdot z,\ \lambda^4 = I\cdot t. \qquad (14)$$

Пусть имеется система функций $\{F_{n^{[4]}}\}$, $n^{[4]}$ = (n_x, n_y ,n_z, n_t), где n_ν(ν = x, y, z, t) – действительные функции. Ортогональность функций ряда определим следующим образом.

F_n и F_m ортогональны при $n \neq m$, если существует некоторая 4-область $\gamma^{[4]}$ на листах малой переменной, что выполняется равенство

$$F_n \cdot F_m = \int\limits_{\gamma^{[4]}} F_n(\lambda^{[4]})\cdot F_m(-\lambda^{[4]})d\lambda^{[4]} = 0. \qquad (15)$$

Примером ортогонального ряда является ряд из показательных функций над листом малой переменной. Для листа малой переменной показательная функция имеет вид [6]:

$$F_\omega(\lambda) = \exp(i\cdot\omega_X x + j\cdot\omega_Y y + k\cdot\omega_Z z + I\cdot\omega_T t), \qquad (16)$$

где функция F_ω 4-периодична [8] с периодами 2π по каждой независимой переменной $x, y, z,$ и t.

Действительно, для функции $F_\omega(\lambda)$ следующие преобразования применимы:

$$F_{\omega 1}(\lambda)\cdot F_{\omega 2}(\lambda) =$$

$$= \int\limits_{\gamma^{[4]}} \exp(i\cdot\omega_{X1}x + j\cdot\omega_{Y1}y + k\cdot\omega_{Z1}z + I\cdot\omega_{T1}t)\cdot\exp(-i\cdot\omega_{X2}x - j\cdot\omega_{Y2}y - k\cdot\omega_{Z2}z - I\cdot\omega_{T2}t)\times$$

$$\times d\lambda^{[4]} = \int\limits_{\gamma^{[4]}} \exp(i\cdot(\omega_{X1}-\omega_{X2})x + j\cdot(\omega_{Y1}-\omega_{Y2})y + k\cdot(\omega_{Z1}-\omega_{Z2})z + I\cdot(\omega_{T1}-\omega_{T2})t)d\lambda^{[4]} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ при } \omega_{X1}\neq\omega_{X2}, \omega_{Y1}\neq\omega_{Y2}, \omega_{Z1}\neq\omega_{Z2}, \omega_{T1}\neq\omega_{T2}, \\ i\cdot j\cdot k\cdot I\cdot(2\pi)^4 = \\ = -I\cdot(2\pi)^4 \text{ при } \omega_{X1}=\omega_{X2}=\omega_{Y1}=\omega_{Y2}=\omega_{Z1}=\omega_{Z2}=\omega_{T1}=\omega_{T2}=0, \end{cases} \qquad (17)$$

при выборе $\gamma^{[4]}$, равном участку 4-периодичности. При этом показательная подынтегральная функция представляется в виде произведения показательных функций от независимых переменных. Тогда интегрировать можно по каждой переменной независимо от других при учете только порядка интегрирования. Например, для переменной $I\cdot t$ на интервале от 0 до $I\cdot 2\pi$ имеем:

$$\int\limits_0^{I\cdot 2\pi} \exp(I\cdot(\omega_{T1}-\omega_{T2})t)d(I\cdot t) = \begin{cases} 0, \omega_{T1}\neq\omega_{T2}, \\ I\cdot 2\pi, \omega_{T1}=\omega_{T2}. \end{cases} \qquad (18)$$

Рассмотрим следующую задачу о возможности разложения функции $F(\lambda^{[4]})$ в ряд из показательных функций над листом малой переменной:

$$F(\lambda^{[4]}) = \sum_{\omega} A_{\omega} \exp(i \cdot \omega_X x + j \cdot \omega_Y y + k \cdot \omega_Z z + I \cdot \omega_T t), \tag{19}$$

где в (19) суммирование производится по всевозможным сочетаниям $\omega(\omega_X, \omega_Y, \omega_Z, \omega_t)$, определяющим экспоненциальные решения системы уравнений Максвелла для прямоугольного резонатора и являющиеся суммой электрических и магнитных функций [6].

Для определения соответствующих коэффициентов A_{ω} умножим уравнение (19) на соответствующие ортогональные функции справа и проинтегрируем на соответствующих интервалах. Тогда с учетом свойства ортогональности (17) ряда (19) получаем:

$$\frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\gamma^{[4]}} F \exp(-i \cdot \omega_X x - j \cdot \omega_Y y - k \cdot \omega_Z z - I \cdot \omega_T t) d\lambda^{[4]} = A_{\omega}, \tag{20}$$

для ряда над листами малой переменной. Теперь определенное таким образом значение для коэффициента A_{ω} подставим в ряд (19):

$$F(\lambda^{[4]}) = \sum_{\omega} \left(\frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\gamma^{[4]}} F \exp(-i \cdot \omega_x x - j \cdot \omega_y y - k \cdot \omega_z z - I \cdot \omega_t t) d\lambda^{[4]}\right) \times \\ \times \exp(i \cdot \omega_x x + j \cdot \omega_y y + k \cdot \omega_z z + I \cdot \omega_t t) \tag{21}$$

На основе выражения (21) может быть определен аналог прямого и обратного преобразования Фурье по следующим выражениям:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\gamma^{[4]}} F(\lambda^{[4]}) \exp(-i \cdot \omega_x x - j \cdot \omega_y y - k \cdot \omega_z z - I \cdot \omega_t t) d\lambda^{[4]}, \tag{22}$$

$$F(\lambda) = \sum_{\omega} \Psi(\omega) \exp(i \cdot \omega_x x + j \cdot \omega_y y + k \cdot \omega \cdot_z z + I \cdot \omega_t t). \tag{23}$$

В (23) $\omega = \omega(\omega_X, \omega_Y, \omega_Z, \omega_t)$.

Для получения интегрального обратного преобразования Фурье проведем преобразования, аналогичные описанным в [9]. Для этого перепишем уравнение (22) для периодов l произвольной длинны:

$$l_x l_y l_z l_t \Psi(k) = \frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{l^{[4]}} F(\lambda^{[4]}) \exp(-i \cdot \frac{2\pi k_x}{l_x} - j \cdot \frac{2\pi k_y}{l_y} - k \cdot \frac{2\pi k_z}{l_z} - I \cdot \frac{2\pi k_t}{l_t}) d\lambda^{[4]}. \tag{24}$$

Тогда ряд (23) перепишется в виде:

$$F(\lambda) = \sum_{k} l_x l_y l_z l_t \Psi(k) \exp(i \cdot 2\pi\nu_x x + j \cdot 2\pi\nu_y y + k \cdot 2\pi\nu_z z + I \cdot 2\pi\nu_t t) \Delta\nu^{[4]}, \tag{25}$$

где $\nu = \frac{k}{l}$, $\Delta\nu = \frac{k+1}{l} - \frac{k}{l} = \frac{1}{l}$. От суммы (25) при $l \to \infty$ получим интеграл:

$$F(\lambda) \sim \int_{\nu^{[4]}} \Psi(\nu) \exp(i \cdot 2\pi\nu_x x + j \cdot 2\pi\nu_y y + k \cdot 2\pi\nu_z z + I \cdot 2\pi\nu_t t) d\nu^{[4]}. \tag{26}$$

В (24) и в (25) экспоненты разлагаются на множители по каждой переменной и преобразования можно проводить независимо от других переменных, составляющих λ.

Рассмотрим Фурье – образ частной производной на листе малой переменной (22):

$$F'_X \sim \frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\gamma^{[4[}} F'_X(\lambda^{[4]}) \exp(-i \cdot \omega_X x - j \cdot \omega_Y y - k \cdot \omega_Z z - I \cdot \omega_T t) dx d\lambda^{[3]} \tag{27}$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$F'_X \sim \frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\gamma^{[3]}} F(\lambda^{[4]}) \exp(-i \cdot \omega_x x - j \cdot \omega_y y - k \cdot \omega_z z - I \cdot \omega_t t) d\lambda^{[3]} \Big|_{x(r=\delta^1)}^{x(r=\chi^1)} - \\ - \frac{Ii \cdot \omega_X}{(2\pi)^4} \Psi(\omega). \tag{28}$$

В (28) первый член разности есть разность значений левого выражения на границах области γ по x и выражает граничные условия для частной производной в самом общем виде.

Свойство (28) дает возможность использования аналога преобразования Фурье для получения решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим другое представление ряда (19), которое можно использовать для более общего класса функций. В (19) члены ряда определяются действительными коэффициентами $\omega = \omega(\omega_X, \omega_Y, \omega_Z, \omega_t)$ при независимых переменных с листов малой переменной λ[4]. Рассмотрим следующий ряд:

$$F = \sum_u A_u \exp(u\lambda) = \\ = \sum_u A_u \exp((i \cdot u_x + j \cdot u_y + k \cdot u_z + I \cdot u_t)(i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z + I \cdot t)), \quad (29)$$

где u – множитель с листа малой переменной. Физический смысл членов ряда (29) можно определить, если раскрыть скобки показателя экспоненты. Тогда:

$$F = \sum_u A_u \exp(u\lambda) = \sum_u A_u A^1 A^2 A^3, \quad (30)$$

где:

$$A^1 = \exp(-u_x x - u_y y - u_z z - u_t t), \quad (31)$$

$$A^2 = \exp(i \cdot (u_y z - u_z y) + j \cdot (u_z x - u_x z) + k \cdot (u_x y - u_y x), \quad (32)$$

$$A^3 = \exp(Ii \cdot (u_x t + u_t x) + Ij \cdot (u_y t + u_t y) + Ik \cdot (u_z t + u_t z). \quad (33)$$

Смысл множителя A^1 – экспоненциальное изменение в пространстве и времени; A^2- соответствует решению для прямоугольного резонатора [6] без временной зависимости с осями периодичности, развернутыми относительно осей x, y и z соответственно; A^3 соответствует показательной функции на листе большой переменной, бегущей по пространственным осям. Множители (31) и (32) соответствуют экспофункциональным полям, введенным в [10].

Функция (29) является дифференцируемой. Действительно, для дифференцируемой функции $F(\lambda)$, являющейся решением системы уравнений Максвелла, справедлива система уравнений

$$\frac{dF(\lambda)}{d\bar{\lambda}} = 0 \quad (34)$$

или

$$\frac{dF}{d(-i \cdot x - j \cdot y - k \cdot z + I \cdot t)} = \frac{d(\exp(u\lambda))}{d(-i \cdot x - j \cdot y - k \cdot z + I \cdot t)} = u\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}\exp\lambda = u \cdot 0 \quad (35)$$

в силу дифференцируемости показательной функции.

Изучение общего решения системы уравнений Максвелла благодаря ее линейности, можно заменить изучением свойств экспоненциальных членов рядов (19) или (30), что упрощает задачу.

В заключение отметим, что интегрирование функций над числами М может быть использовано при получении и изучении решений системы уравнений Максвелла в рамках предложенного формализма.

Литература

1. *Никольский Н.Н.* Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1978. – 543 с.
2. *Иваницкий А.М.* Обобщенный символический метод анализа электрических цепей. Учебное пособие. – Одесса: УГАС, 1994. – 27 с.
3. *Иваницкий А.М.* Комплексный анализ многомерных цепей: – Одесса: ОЭИС. – 1993 – 15 с. – Рус. - Деп. В ЦНТИ “Информсвязь” 06.04.93, №1961 – св.
4. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 488 с.
5. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. – 504 с.
6. *Кравчик Ю.С.* Обобщение комплексных чисел и их применение в электродинамике // Праці УНДІРТ. – 2003. - №4(36).
7. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
8. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 318 с.
9. *Ефимов А.В.* Математический анализ. Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1980. – 279 с.
10. *Иваницкий А.М.* Экспофункциональные поля // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2001. - №1. – С. 18-21.