УДК 621.391

Тихонов В.И.
Тіхонов В.І.
Tikhonov V.I.

МЕТОДИКА КАЛІБРУВАННЯ КОМПЛЕКСНОЇ ТЕНЗОРНОЇ МОДЕЛІ ЦИФРОВИХ ПОТОКІВ В ІНФОКОМУНІКАЦІЙНІЙ МЕРЕЖІ

МЕТОДИКА КАЛИБРОВКИ КОМПЛЕКСНОЙ ТЕНЗОРНОЙ МОДЕЛИ ЦИФРОВЫХ ПОТОКОВ В ИНФОКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ

THE GAUGE METHOD FOR THE COMPLEX TENSOR MODEL OF DIGITAL FLOWS IN THE INFOCOMMUNICATION NETWORK

Анотація. Запропоновано методику калібрування комплексної тензорної моделі цифрових потоків у відкритій інфокомунікаційній мережі на основі експериментальних статистичних даних. Модель призначена для аналізу інформаційних процесів у мережі доступу підприємства.

Аннотация. Предложена методика калибровки комплексной тензорной модели цифровых потоков в открытой инфокоммуникационной сети на основе экспериментальных статистических данных. Модель предназначена для анализа информационных процессов в сети доступа предприятия.

Summary. The gauge method determined for the complex tensor model of digital flows in the open infocommunication network based on the empirical statistics data. The model intends to analyze the information processes in access networks.

Актуальною задачею теорії і практики телекомунікацій є моделювання цифрових потоків, що циркулюють між клієнтами і серверами інфокомунікаційних мереж (ІКМ). Відомі моделі мереж спираються на теорію графів [1], теорію масового обслуговування [2] , фрактальний і вейвлет аналіз [3, 4], штучні нейронні мережі [5], тензорний аналіз [6], методи системного аналізу і діакоптики [7, 8], алгебраїчну топологію і теорію груп [9, 10] спектральну теорію лінійних операторів [11]. Перспективним напрямом моделювання процесів у мережах є тензорний підхід, започаткований в роботах Г.Крона для електричних схем [12] і розвинений у галузі телекомунікацій [13-19]. Тензорний підхід є подальшим розвитком векторного і матричного аналізу для опису таких багатовимірних об'єктів, як ІКМ, і дозволяє спільно досліджувати структурні та функціональні властивості об'єктів різної природи в узагальненій формі у лінійних просторах з різноманітною геометричною структурою. За певних умов, тензорний підхід уможливлює застосування апарату лінійної алгебри для опису нелінійних об'єктів у локальних околах окремих точок функціонального стану об'єкта. Стримуючим фактором застосування тензорів в моделях ІКМ є складність тензорних моделей порівняно з багатьма іншими методами дослідження мереж.

Для подолання проблеми складності тензорних моделей мереж застосовують аналіз системи по часткам за принципом діакоптики [18]. Можливий спосіб додаткового спрощення тензорної моделі мережі полягає у виборі спеціального базису для геометризації моделі, разом з калібруванням тензорної моделі (тобто визначенням параметрів моделі відповідно результатам деякого статистичного експерименту). Однак методи калібрування тензорних моделей мереж недостатньо висвітлені в літературі і потребують подальшого розвитку. Зокрема відсутні публікації щодо калібрування комплексних тензорних моделей цифрових потоків у відкритих інфокомунікаційних мережах, які описують не тільки симетричні, але також і асиметричні цифрові потоки.

Метою статті *є розробка методики калібрування комплексної тензорної моделі цифрових потоків у відкритій інфокомунікаційній мережі.*

В роботах [20, 21] показано, що симетричні й асиметричні цифрові потоки у відкритій інфокомунікаційній мережі, за певних умов, можуть бути представлені комплексною ермітовою матрицею, яку позначимо $\underline{\underline{F}} = f(n,m)$, $n,m = 1,2,...,N$ розміром $N \times N$, де N – кількість виділених елементів інформаційної взаємодії в ІКМ. В якості елементів ІКМ можуть бути обрані окремі клієнти і сервери, підмережі у складі ІКМ тощо. Умовою ермітовості матриці $\underline{\underline{F}}$ є симетрія зовнішніх цифрових потоків для кожного з N елементів ІКМ; при цьому внутрішні потоки між елементами ІКМ не обов'язково мають бути симетричними. Матриця потоків $\underline{\underline{F}}$ може бути обчислена шляхом статистичного усереднення на деякому інтервалі часу $t \pm \Delta\tau$. У загальному випадку сукупність цифрових потоків в ІКМ є комплексною матричною функцією $\underline{\underline{F}}(t,\tau)$ від незалежного аргументу t і параметра усереднення τ. Будемо вважати, що t і τ змінюються в межах деякого періоду часу T (наприклад, однієї доби). Характер функції $\underline{\underline{F}}(t,\tau)$ залежить від вибору τ. Як показали експериментальні дослідження цифрових потоків у маршрутизаторі ядра в мережі вищого навчального закладу, при збільшенні τ функція $\underline{\underline{F}}(t,\tau)$ стає більш гладкою відносно аргументу t; при певному виборі τ (приблизно в межах від 1 хв. до 1 год.) функція $\underline{\underline{F}}(t,\tau)$ у першому наближенні описує коливання цифрових потоків ІКМ у часі і при цьому є достатньо гладкою по кожному з елементів $f(n,m)$ матриці $\underline{\underline{F}}$. Далі позначку параметра τ у запису функції $\underline{\underline{F}}(t,\tau)$ будемо опускати і записувати її як функцію $\underline{\underline{F}}(t)$ одного аргументу t. Значення функції $\underline{\underline{F}}(t)$ на інтервалі часу $t \in [0,T]$ штучно доповнимо зліва і справа до періодичної функції, тобто вважатимемо функцію $\underline{\underline{F}}(t)$ періодичною з періодом T.

Обчислення цифрових потоків на реальній мережі доступу підприємства показали, що комплексна матриця потоків $\underline{\underline{F}}$ не завжди є ермітовою, а у разі ермітової матриці, $\underline{\underline{F}}$ не завжди є позитивно обумовленою (тобто у спектрі матриці $\underline{\underline{F}}$ можуть бути нульові та від'ємні власні числа). З урахуванням цього, приймемо наступні спрощуючі припущення:

а) математичне очікування матриці потоків $\underline{\underline{F}}$ у кожній точці $t \in [0,T]$ є ермітовою матрицею (позначимо її $\underline{\underline{\Phi}}$); якщо ця умова не виконується, то замість комплексних діагональних елементів матриці $\underline{\underline{\Phi}}$ будемо розглядати тільки дійсні модулі цих елементів (які відповідають симетричним складовим зовнішніх потоків ІКМ). Нескладно бачити, що комплексна матриця з дійсними елементами головної діагоналі і комплексно спряженими недіагональними елементами є ермітовою матрицею [22];

б) у спектрі матриці $\underline{\underline{\Phi}}$ не має нульових (або близьких до нуля) власних чисел. Якщо ця умова не виконується, то така ситуація розцінюється як наслідок невдалої декомпозиції мережі на складові елементи, що призвела до надлишковості вибраної розмірності простору, в якому визначається відповідний метричний тензор. У цій ситуації треба переглянути спосіб декомпозиції мережі, що моделюється.

Відомо, що довільна позитивно обумовлена дійсна симетрична матриця розміром $N \times N$ відповідає вимогам метричного тензора Рімана, тобто має геометричну інтерпретацію у вигляді дійсного локально евклідового простору, структура якого описується метричним тензором Рімана R_{nm} другого рангу [22]. Два нижніх індекси n і m у позначці тензора R_{nm} (згідно з нотацією А.Ейнштейна) визначають двічі коваріантний тип тензора, тобто тип (2,0). Якщо тензор R_{nm} є періодичною функцією часу $R_{nm}(t)$ з періодом T, то $R_{nm}(t)$ описує дійсний Рімановий простір на точках замкнутого кола, утвореного циклічною зміною часу t. Довільна позитивно обумовлена комплексна ермітова матриця розміром $N \times N$ є двічі коваріантним метричним тензором C_{nm}, який описує деякий комплексний локально евклідовий простір.

Матриця $\underline{\underline{\Phi}}$ (при виконанні зазначених вище припущень) має невизначені за знаком ненульові власні числа. Отже, функція $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ у кожній точці t формально має інтерпретацію метричного тензора, який описує деякий абстрактний лінійний (не обов'язково локально евклідовий) простір. В окремих випадках цей простір збігається з евклідовим. Для спрощення запису далі за текстом замість двох нижніх індексів метричного тензора будемо використовувати подвійне підкреслення, наприклад, замість $\Phi_{nm}(t)$ писати $\underline{\underline{\Phi}}(t)$.

Сформулюємо основні принципи калібрування тензорної моделі потоків. Припустимо, що на діючій мережі доступу підприємства було проведено серію статистичних спостережень цифрових потоків у маршрутизаторі ядра мережі протягом довгострокового періоду (наприклад, протягом п'яти добових циклів у робочі дні в межах одного тижня). В результаті експерименту отримано сімейство добових реалізацій $\{\underline{\underline{F}}_j(t_k)\}$ функції $\underline{\underline{F}}(t)$ у дискретних точках $t_k \in [0,T]$, де $j = 1,2,3,4,5$ позначає робочі дні тижня. Далі, обчислимо усереднені по множині реалізацій $\{\underline{\underline{F}}_j(t_k)\}$ значення функції $\underline{\underline{F}}(t_k)$ у дискретних точках t_k; у першому наближенні приймемо ці усереднені значення функції $\underline{\underline{F}}(t_k)$ в якості математичного очікування $\underline{\underline{\Phi}}(t_k)$.

Припустимо, що поточний трафік у маршрутизаторі ядра мережі віддзеркалюється й обробляється, в результаті чого отримується функція $\underline{\underline{F}}(t)$. Функцію $\underline{\underline{\Phi}}(t_k)$ призначимо в якості еталона для порівняння з функцією $\underline{\underline{F}}(t)$. А саме, для кожної матриці $\underline{\underline{F}}$, що описує функцію $\underline{\underline{F}}(t)$ в момент часу t, будемо шукати новий геометричний базис, що залежить від $\underline{\underline{\Phi}}(t_k)$ у момент часу t_k, найближчий до t. При цьому забажаємо, щоб у разі збігу еталонної і поточної матриць, відображення матриці $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(t)$ для точки t у новому базисі мало вигляд одиничної діагональної матриці. Як відомо, одинична діагональна матриця I описує деякий ортонормований локально евклідовий простір (дійсний чи комплексний) з метричним тензором типу (1,1) [21].

Розглянемо детальніше спосіб перетворення координат для комплексного метричного тензора потоків $\underline{\underline{F}}(t)$. Як відомо, довільний метричний тензор (наприклад, тензор $\underline{\underline{\Phi}}$ в момент часу t_k), з геометричної точки зору представляє деяку лінійну систему векторів (позначимо її $\Phi = \{\vec{\phi}_n\}$). А саме, $\underline{\underline{\Phi}}$ є матрицею скалярних добутків векторів $\vec{\phi}_n$ одне на одне: $\underline{\underline{\Phi}} = \left[(\vec{\phi}_n, \vec{\phi}_m)\right]$. За визначенням, скалярний добуток двох векторів у комплексному евклідовому N – вимірному просторі має властивості [22]: $(\vec{\phi}_n, \vec{\phi}_m)$ – невід'ємне дійсне число; $(\vec{\phi}_n, \vec{\phi}_m) = (\vec{\phi}_m, \vec{\phi}_n)^*$, де символом «*» позначено операцію комплексного спряження.

Нехай $E = \{\vec{e}_k\}$ – ортонормована система базисних векторів комплексного евклідового простору, метричний тензор якого (позначимо його $\underline{\underline{E}}$) є дійсною одиничною діагональною матрицею: $\underline{\underline{E}} = \left[(\vec{e}_n, \vec{e}_m)\right] = I$. Визначимо систему векторів Φ через матрицю скалярних добутків векторів $\vec{\phi}_n$ з векторами $\vec{e}_m$ (позначимо цю матрицю $\underline{\Phi}_E$):

$$\underline{\Phi}_E = \left[(\vec{\phi}_n, \vec{e}_m)\right]. \tag{1}$$

Матрицю $\underline{\Phi}_E$ назвемо коваріантним по Φ і коваріантним по E тензором другого рангу, або змішаним метричним тензором двох лінійних систем: Φ і E. Кожна n строчка матриці $\underline{\Phi}_E$ є сукупністю скалярних добутків вектора $\vec{\phi}_n$ на кожен із векторів $\vec{e}_m$. Комплексно спряжену матрицю $\underline{\Phi}_E^*$ позначимо як $\underline{\Phi}^E := \underline{\Phi}_E^*$ і назвемо її коваріантним по Φ і контраваріантним по E тензорним оператором другого рангу типу (1,1). Як відомо, тензорний оператор другого рангу має тип (1,1), тобто повинен бути один раз коваріантним і один раз контраваріантним тензором [22].

Позначимо символом «$\cdot$» операцію множення, яка поширюється на дійсні та комплексні скаляри, вектори і матриці за відомим правилом: вектор-строчка зліва від знаку «$\cdot$» скалярне множиться на вектор-стовпець справа від знаку «$\cdot$»; у разі, якщо розмірності векторів, що скалярно множаться, не збігаються, то відсутні елементи вважаються такими, що мають нульові значення. Визначимо метричний тензор $\underline{\underline{\Phi}}$ системи Φ через операцію «$\cdot$»:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\Phi}_E \cdot \underline{\Phi}^E .$$

Метричний тензор $\underline{\underline{\Phi}}$ є інваріантом лінійної системи Φ, і цей інваріант не залежить від того, в якому вихідному лінійному базисі записані проекції векторів $\vec{\phi}_n$. Довжина довільного вектора $\vec{\phi}_n$ може бути також виражено через його проекції в базисі E і метричний тензор $\underline{\underline{E}} = I$. Позначимо коваріантні проекції вектора $\vec{\phi}_n$ в базисі E як ϕ_E, а контраваріантні – як ϕ^E. Врахуємо, що $I^{-1} \equiv I$. Таким чином, тензор $\underline{\underline{E}}$ типу (2,0) збігається з тензором $\overline{\overline{E}}$ типу (0,2), тобто $\underline{\underline{E}} = \overline{\overline{E}} = I$. Запишемо формулу обчислення квадрата довжини вектора $\vec{\phi}_n$ як квадратичної форми з матрицями перетворення $\underline{\underline{E}} = I$ і $\overline{\overline{E}} = I$:

$$\left|\vec{\phi}_n\right|^2 = \phi_E \cdot \phi^E = (\phi^E)^* \cdot \phi_E^* = \phi_E \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \phi_E^* = (\phi^E)^* \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \phi^E . \quad (2)$$

Аналогічно формулі (2) запишемо формулу обчислення метричного тензора лінійної системи Φ через тензорні форми $\underline{\Phi}^E$ і $\underline{\Phi}_E$:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\Phi}_E \cdot \underline{\Phi}^E = (\underline{\Phi}^E)^* \cdot (\underline{\Phi}_E)^* = \underline{\Phi}_E \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \underline{\Phi}_E^* = (\underline{\Phi}^E)^* \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\Phi}^E . \quad (3)$$

Діагональні елементи матриці $\underline{\underline{\Phi}}$ є квадратами довжини відповідних векторів $\vec{\phi}_n$ у формулі (2). Згідно зі сформульованими вище припущеннями, $\underline{\underline{\Phi}}$ є ермітовою матрицею з ненульовими дійсними власними числами λ_n, що невизначені, зі знаком: $\left|\lambda_n\right| > 0$.

Власні вектори z_n матриці $\underline{\underline{\Phi}}$ є комплексними взаємно незалежними векторами, що утворюють ортонормований базис $Z = \{z_n\}$. Базис Z має вигляд унітарної матриці, яка має властивості:

$$\begin{cases} Z^{-1} = Z^*, \\ Z \cdot Z^* = Z^* \cdot Z = I . \end{cases} \quad (4)$$

Позначимо символом Λ дійсну діагональну матрицю, що утворена власними числами λ_n матриці $\underline{\underline{\Phi}}$. Представимо матрицю $\underline{\underline{\Phi}}$ розкладенням по Z і Λ:

$$\underline{\underline{\Phi}} = Z^* \cdot \Lambda \cdot Z . \quad (5)$$

Перетворимо (5) у вигляді:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\Phi} \cdot \underline{\Phi}^*; \\ \underline{\Phi} = Z^* \cdot \Lambda^{0.5}, \quad \underline{\Phi}^* = \Lambda^{0.5} \cdot Z \quad . \end{cases} \quad (6)$$

Зворотна матриця $\overline{\overline{\Phi}} = \underline{\underline{\Phi}}^{-1}$ очевидно існує і дорівнює

$$\overline{\overline{\Phi}} = Z^* \cdot \Lambda^{-1} \cdot Z . \quad (7)$$

При цьому має місце співвідношення:

$$\overline{\overline{\Phi}} = (\underline{\Phi}_E \cdot \underline{\Phi}^E)^{-1} = (\underline{\Phi}^E)^{-1} \cdot (\underline{\Phi}_E)^{-1} . \quad (8)$$

Матрицю $\overline{\Phi}_E := (\underline{\Phi}^E)^{-1}$ у (8) назвемо контраваріантним по Φ і коваріантним по E тензорним оператором другого рангу типу (1,1), а матрицю $\overline{\Phi}^E :=$ – контраваріантним по Φ і по E тензором другого рангу типу (0,2).

Тепер розглянемо функцію $\underline{\underline{F}}(t)$ як матрицю $\underline{\underline{F}}$, що визначена в деякій точці $t \in [0, T]$. Відносно функції $\underline{\underline{F}}(t)$ нами не накладено умови ермітовості, а також відсутності нульових власних чисел. Згідно з припущеннями, $\underline{\underline{F}}$ має комплексно спряжені недіагональні елементи (що розташовані симетрично відносно головної діагоналі матриці $\underline{\underline{F}}$). Перетворимо матрицю $\underline{\underline{F}}$ в ермітову матрицю $\underline{\underline{F}}$, тобто запишемо на діагоналі матриці $\underline{\underline{F}}$ дійсні модулі відповідних комплексних діагональних елементів. Таке перетворення, звісно, вносить додаткову похибку в модель потоків. Але в рамках даної моделі цією похибкою ми знехтуємо.

За аналогією з розглянутою вище матрицею $\underline{\underline{\Phi}}$, представимо $\underline{\underline{F}}$ як матрицю скалярних добутків $\underline{\underline{F}} = \left[(f_n, f_m)\right]$ деякої системи векторів $F = \{f_n\}$. Нехай $\Upsilon = \{\gamma_n\}$ – діагональна матриця дійсних власних чисел γ_n матриці $\underline{\underline{F}}$; $\Psi = \{\psi_n\}$ – комплексна матриця власних векторів для матриці $\underline{\underline{F}}$. На відміну від $\underline{\underline{\Phi}}$, матриця $\underline{\underline{F}}$ може мати нулі у своєму спектрі.

Представимо матрицю $\underline{\underline{F}}$ згідно з (6):

$$\begin{cases} \underline{\underline{F}} = \underline{F} \cdot \underline{F}^*, \\ \underline{F} = \Psi^* \cdot \Upsilon^{0.5}, \quad \underline{F}^* = \Upsilon^{0.5} \cdot \Psi . \end{cases} \tag{9}$$

Побудуємо комплексний тензорний оператор другого рангу як відношення між лінійними системами F і Φ, кожна з яких визначена матрицями коваріантних проекцій $\underline{F}_E$ і $\underline{\Phi}_E$ в базисі E:

$$\begin{cases} \underline{F}^{\Phi} := \underline{F}_E \cdot \overline{\Phi}^E = \Psi^* \cdot (\Upsilon^{0.5} \cdot \Lambda^{-0.5}) \cdot Z = \Psi^* \cdot \Gamma \cdot Z , \\ \Gamma = \Upsilon^{0.5} \cdot \Lambda^{-0.5} . \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, що у разі збігу матриць $\underline{\underline{F}}$ і $\underline{\underline{\Phi}}$ має місце $\underline{F}^{\Phi} = I$. В рамках похибки обчислення математичного очікування для функції $\underline{\underline{F}}(t)$ математичне очікування $\underline{\underline{F}}(t)$ збігається з еталонними значеннями функції $\underline{\underline{\Phi}}(t_k)$ у дискретних точках t_k. Таким чином, математичне очікування оператора $\underline{F}^{\Phi}$ приблизно дорівнюватиме одиничній діагональній матриці I. Комплексний тензорний оператор $\underline{F}^{\Phi}$ назвемо каліброваним за математичним очікуванням тензором цифрових потоків у відкритій інфокомунікаційній мережі.

Наостанок відзначимо наступне. В роботі сформульовано принципи і методику калібрування тензорної моделі симетричних та асиметричних цифрових потоків у відкритій інфокомунікаційній мережі шляхом відображення тензора потоків у спеціальний базис, що обирається за результатами експериментальних спостережень за потоками мережі.

Для запропонованої методики розроблено алгоритм її реалізації. Калібрування тензорної моделі дозволяє спростити математичну форму тензорної моделі потоків у разі, якщо виконуються припущення відносно симетричного характеру зовнішніх потоків, а також припущення про періодичний характер функції потоків при обраному інтервалі локального усереднення функції потоків. Крім того, методика калібрування дозволяє оцінити якість попереднього етапу побудови моделі – декомпозиції складної мережі на окремі взаємодіючі сегменти шляхом аналізу спектра власних чисел для матриці математичного очікування потоків в окремих точках часу на інтервалі спостереження.

Напрямом подальших досліджень є аналіз ефективності запропонованої методики калібровки тензорної моделі потоків для мережі доступу підприємства, а також застосування цієї моделі для короткочасного і середньострокового прогнозування цифрових потоків мережі.

Література

1. *Свами М.* Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
2. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями / Клейнрок Л. – М.: Мир, 1979. – 600 с.
3. Фрактальный анализ и процессы в компьютерных сетях: учебн. пособ. / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, О.Г. Иванова и др. – [2-е изд., стереотип]. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 108 с. – ISBN 978-5-8265-0628-8.
4. A Practical Guide to Wavelet Analysis. – Режим доступа: http://paos.colorado. edu/research/wavelets/.
5. *David Kriesel.* A Brief Introduction to Neural Networks / David Kriesel. – 2005. − 225 c. – Режим доступа: http://www.dkriesel.com/en/science/neural_networks.
6. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ / Рашевский П.К. – М.: Наука, 1967. − 664 с.
7. *Месарович М.* Общая теория систем: математические основы / М. Месарович, Я. Такахара; Пер. с англ. Э. Л. Наппельбаума; под ред. В. С. Емельянова. – М.: Мир, 1978.

8. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям (диакоптика) / Крон Г. – М.: Наука, 1972. − 544 с.
9. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология / Спеньер Э. – М.: Мир, 1971. − 693 с.
10. *Golubitsky, M.* Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism / M. Golubitsky, I. Stewart // Bulletin of the American mathematical society. – 2006. – Vol. 43. – № 3. – P. 305–364.
11. Spectral theory of linear operators: Encyclopedia of Mathematics / Hazewinkel, Michiel, ed. – Springer, 2001. – ISBN 978-1556080104.
12. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей / Крон Г.; пер. с англ.; под ред. Л.Т.Кузина, П.Г.Кузнецова. – М.: Сов.радио, 1978. – 720 с.
13. *Петров А.Е.* Тензорный метод Крона, LT метод Бартини-Кузнецова и двойственные сети / А.Е.Петров // Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление». – 2010. – Том 6. – № 4 (9), ст. 2. – С. 13-32.
14. *Пасечников И.И.* Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей / Пасечников И.И. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 216 с.
15. *Лемешко О.В.* Теоретичні основи управління мережними ресурсами з використанням тензорних математичних моделей телекомунікаційних систем: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. докт. техн.наук : спец. 05.12.02 «Телекомунікаційні системи та мережі» / О.В. Лемешко. – Харків, 2005. – 37 с.
16. *Кутергин В.А.* Тензорный метод построения моделей пространства инфокоммуникационных сетей / В.А. Кутергин, А.С. Шадрин // Электронный журнал "Вычислительные сети. Теория и практика". – 2009. – № 2 (15):4.3. – Режим доступа: http://network-journal.mpei.ac.ru/cgi-bin/main.pl?l=ru&n=15&pa=4&ar=3.
17. *Пономарев Д.Ю.* Тензорная методология в телекоммуникациях / Д.Ю.Пономарев // Системы управления и информационные технологии. – 2006. – 1.1(23). – С. 161-165.
18. *Євсеєва О.Ю.* Теоретичні основи забезпечення якості обслуговування при управлінні трафіком з використанням діакоптичних і тензорних моделей телекомунікаційних систем: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. докт. техн. наук : спец. 05.12.02 «Телекомунікаційні системи та мережі» / О.Ю. Євсеєва. – Харків, 2010. – 35 с.
19. *Стрелковська І.Ю.* Теорія та методи сплайн-апроксимації в телекомунікаціях: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. докт. техн. наук : спец. 05.12.02 «Телекомунікаційні системи та мережі» / І.Ю. Стрелковська. – Одеса, 2010. – 38 с.
20. *Тихонов В.И.* Построение тензорной модели асимметричных цифровых потоков в комплексном пространстве / В.И.Тихонов // Проблемы телекоммуникаций. – 2011. – № 2 (4). – С. 42 – 53. – Режим доступа к журн.: http://pt.journal.kh.ua/2011/2/1/112_tikhonov_tensor.pdf.
21. Computation Technique for IP-Traffic Tensor Modeling: матеріали X Міжнародної конф. TCSET'2012 «Сучасні проблеми радіоелектроніки, телекомунікацій та комп'ютерної інженерії» / Нац. ун-т «Львівська політехника», (Львів−Славське, 21–24 лютого 2012 р.). – Львів: Нац. ун-т «Львівська політехника», 2012. – С.237.
22. *Korn G.A.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review / G.A. Korn, T.M. Korn. . – Dover Publicatio, 2000. – 1152 p.