УДК 621.371:621.372

Дмитриева И.Ю.
Дмитрієва І.Ю.
Dmitrieva I.Yu.

КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА В СМЫСЛЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОБОБЩЕННОМУ ВОЛНОВОМУ УРАВНЕНИЮ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

КРИТЕРІЙ РОЗВ′ЯЗАНОСТІ СИМЕТРИЧНОЇ СИСТЕМИ МАКСВЕЛЛА У СЕНСІ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ УЗАГАЛЬНЕНОМУ ХВИЛЬОВОМУ РІВНЯННЮ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО СЕРЕДОВИЩА

SOLVABILITY CRITERION OF THE SYMMETRICAL MAXWELL SYSTEM IN THE MEANING OF THE EQUIVALENCE TO THE GENERAL WAVE EQUATION IN THE CASE OF AN INHOMOGENEOUS MEDIUM

Аннотация. Получен критерий разрешимости симметричной системы дифференциальных уравнений Максвелла при постоянном возбуждении электромагнитного поля в случае произвольных неоднородных изотропных линейных сред. Доказательство основано на исследовании ядер дифференциальных операторов, построенных при полной диагонализации исходной системы. Последний момент означает ее сведение к единому обобщенному волновому скалярному дифференциальному уравнению в частных производных, которое решается в явном виде.

Разрешимость вышеупомянутой системы понимается в эквивалентности данному скалярному уравнению, содержащему все искомые компоненты вектор-функций электромагнитного поля.

Полученный результат позволяет корректно формулировать и эффективно исследовать соответствующие краевые задачи классической/технической теории электромагнитного поля на уровне вышеупомянутого обобщенного волнового скалярного уравнения, избегая рассматривать матричную постановку вопроса, что сопряжено с определенными необозримыми трудностями, как вычислительного характера, так и получения аналитического решения в явном виде.

Анотація. Одержано критерій розв'язаності симетричної системи диференціальних рівнянь Максвелла при постійному збудженні електромагнітного поля у випадку довільних неоднорідних ізотропних лінійних середовищ. Доведення базується на дослідженні ядер диференціальних операторів, побудованих при повній діагоналізації вихідної системи. Останній момент означає її зведення до єдиного узагальненого хвильового скалярного диференціального рівняння у частинних похідних, що розв'язане у явному вигляді.

Розв'язання вищезгаданої системи розуміється в еквівалентності даному скалярному рівнянню, що містить усі шукані компоненти вектор-функцій електромагнітного поля.

Одержаний результат дозволяє коректно формулювати та ефективно досліджувати відповідні крайові задачі класичної/технічної теорії електромагнітного поля на рівні вищезгаданого узагальненого хвильового скалярного рівняння, минаючи розглядання матричної постановки питання, що пов'язане з певними неоглядними труднощами, як обчислювального характеру, так і отримання аналітичного розв'язку у явному вигляді.

Summary. The solvability criterion is got for the symmetrical differential Maxwell equations' system in the case of the electromagnetic field constant excitation. The media are arbitrary inhomogeneous isotropic and linear. The proof bases on the investigation of the differential operator kernels that are constructed diagonalizing the original system. The last moment means its reduction to the unified general wave scalar PDE whose solution is done explicitly.

The aforesaid system solvability means its equivalence to the given scalar equation that contains all unknown components of the electromagnetic vector field functions.

The obtained result permits formulating correctly and investigating effectively the relevant boundary problems in the classical/technical electromagnetic field theory remaining at the level of the aforesaid general wave scalar equation. In this case, the matrix problem statement is avoided. Otherwise, the vast difficulties, either of the calculating character, or of the getting an explicit analytic solution appear.

Исследуется симметричная система дифференциальных уравнений Максвелла для произвольных линейных изотропных *неоднородных* сред при воздействии сторонних источников напряжений электромагнитного поля. В дальнейшем будем подразумевать под данной операцией «постоянное возбуждение электромагнитного поля».

Изучаемая система является математической моделью актуальных инженерных задач современной технической электродинамики [1], связанных с теорией многомерных аналоговых цепей и распространением сигналов в различных средах [2, 3]. Аналитическое изучение таких вопросов остается максимально востребованным и в настоящее время при интенсивном развитии вычислительной техники, поскольку ни одна, даже самая мощная компьютерная программа, не заменит явное математическое решение той или иной прикладной задачи.

Действительно, проблема конструктивного решения конечной системы дифференциальных уравнений в частных производных вне класса обобщенных функций [4, 5], в том числе и для инженерных задач современной электродинамики, остается открытой [1, 6], как и раньше [4].

В связи с вышесказанным можно утверждать, что исследование в явном виде также и системы дифференциальных уравнений Максвелла для различных сред не перестает быть актуальным, а напротив, приобретает новые черты и направления изучения как теоретического, так и прикладного характера [6].

Возвращаясь к задаче настоящей работы, необходимо отметить, что впервые вышеупомянутая система данной общей структуры рассматривалась в [7] для линейного *однородного* изотропного случая. Полученные результаты [7, 8] касались методов диагонализации этой системы, т.е. сведения ее к эквивалентной совокупности скалярных уравнений, каждое из которых зависело ровно от одной неизвестной компоненты вектор-функций электромагнитного поля. Данное объединение представлялось в виде единого обобщенного волнового уравнения в частных производных четвертого порядка, решенного явно [9].

Следует подчеркнуть, что все исследования, как по диагонализации первоначальной системы, так и по эффективному решению обобщенного единого волнового скалярного уравнения проводились безотносительно конкретных краевых условий и независимо от операторной структуры матрицы исходной задачи. Обязательными требованиями, предъявляемыми к матричным элементам, являлись их попарная коммутативность и обратимость. Предложенные методы являлись новыми на идейном уровне, базируясь при этом на хорошо известных фундаментальных результатах общей алгебры, классического действительного анализа и теории дифференциальных уравнений.

Однако для корректной постановки и решения в явном виде краевых задач, аналитически описывающих конкретный инженерный либо физический процесс, необходимо определить условия разрешимости изначальной максвелловской системы в смысле эквивалентности единому волновому скалярному уравнению. При этом обязательным требованием является оперирование только классическими, не обобщенными, функциями [4, 5]. Такой результат означал бы не только научную и прикладную полноту исследования, но и несомненное непосредственное упрощение конструктивного изучения инженерного либо физического явления. Действительно, в этом случае требуемая краевая задача ставится не для всей исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных, а только для одного, – единого волнового, что несоизмеримо проще и очевиднее. Кроме того, предлагаемые здесь функциональные классы позволяют сделать рассматриваемые методы более доступными для восприятия прикладниками, оставаясь при этом в рамках строгости классических фундаментальных положений.

Вышеупомянутые условия разрешимости, сформулированные в виде критерия, представлены и доказаны в [10, 11] для произвольной возбужденной однородной изотропной линейной среды.

Тем не менее, для *неоднородных* сред аналогичный вопрос пока вообще не поднимался, хотя решение симметричной дифференциальной системы Максвелла для такого случая уже формально получено [12].

Поэтому ***цель настоящей работы*** состоит в получении критерия разрешимости симметричной дифференциальной системы Максвелла в смысле эквивалентности обобщенному скалярному волновому уравнению при наличии свойств постоянного возбуждения, линейности, изотропии и, главное, – *неоднородности* произвольной среды. При этом обязательным требованием является оперирование только классическими [4, 5], не обобщенными функциями.

1. План исследования. Пусть задана симметричная система дифференциальных уравнений Максвелла для произвольной *неоднородной* изотропной линейной возбужденной среды:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{H} = (\sigma \pm \lambda\varepsilon_a)\vec{E} + \varepsilon_a \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\,CT}, \\ -\operatorname{rot}\vec{E} = (r \pm \lambda\mu_a)\vec{H} + \mu_a \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{e}^{\,CT}. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$, $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ – искомые вектор-функции со скалярными компонентами $E_k = E_k(x, y, z, t)$, $H_k = H_k(x, y, z, t)$ ($k = \overline{1, 3}$) обозначают напряженности электрического и магнитного полей соответственно; $\sigma = \sigma(x, y, z), \mu_a = \mu_a(x, y, z), \varepsilon_a = \varepsilon_a(x, y, z)$ – удельная проводимость, абсолютная магнитная и диэлектрическая проницаемости неоднородной среды. Очевидно, что в отличие от общепринятого случая, когда $\sigma, \mu_a, \varepsilon_a = \mathrm{const} > 0$ [7], в данной формулировке рассматриваются соответствующие функции, зависящие от пространственных координат (x, y, z) и характеризующие *неоднородность* изучаемых сред. Функциональный класс $\sigma, \mu_a, \varepsilon_a$ фиксируется конкретной постановкой исходной инженерно-прикладной задачи. Далее, $\lambda = \mathbf{const} > 0$, – параметр воздействующего на среду сигнала. При этом, как и ранее в статьях [7, 8], предшествующее λ чередование знака означает реакцию среды на данный сигнал. Именно, «плюс» означает поглощение, «минус» – отторжение. Кроме того, для сохранения единообразия формы при обобщении условий [7, 8] на *неоднородный* случай, теоретическая постоянная $r > 0$ также присутствует в (1) для сохранения симметричности правых частей уравнений и вводится для упрощения математических вычислений по диагонализации системы при переходе к единому скалярному волновому уравнению. В окончательном результате при необходимости r может полагаться равным нулю.

Наконец, $\vec{j}^{\,CT} = \vec{j}^{\,CT}(x, y, z, t)$, $\vec{e}^{\,CT} = \vec{e}^{\,CT}(x, y, z, t)$ – заданные вектор-функции со скалярными компонентами $j_k^{CT} = j_k^{CT}(x, y, z, t)$, $e_k^{CT} = e_k^{CT}(x, y, z, t)$ ($i = \overline{1, 3}$), характеризующие сторонние токи и напряжения [7].

Все скалярные элементы, в том числе и координатные компоненты, принадлежащие $\vec{E}, \vec{H}, \vec{j}^{\,CT}, \vec{e}^{\,CT}$, являются четырежды непрерывно дифференцируемыми функциями на одном и том же подмножестве пространства (x, y, z) либо (x, y, z, t) соответственно, что объясняется дифференциальной структурой (1). Действительно, предваряя дальнейшие результаты, следует отметить, что единое обобщенное скалярное уравнение имеет четвертый порядок [12]. Этот факт обосновывает работу именно с вышеуказанным функциональным классом. В свою очередь, порядок уравнения также объясним, поскольку, выигрывая при переходе от матричной формулировки к скалярной постановке, как правило, теряем в порядке уравнения, который повышается.

Итак, ставится вопрос о получении критерия разрешимости системы (1) в смысле эквивалентности единому обобщенному скалярному волновому уравнению для произвольной возбужденной *неоднородной* линейной изотропной среды. При этом решение подразумевается аналитическим явным и рассматривается только на уровне классических, не обобщенных функций [4, 5].

Доказательство критерия проводится в два этапа. Этап 1) представляет диагонализацию системы (1) и сводит ее к единому обобщенному волновому скалярному уравнению, зависящему от неизвестных компонент E_k, H_k $(k = \overline{1,3})$. Предложенный здесь метод состоит в построении двух обратных дифференциальных матричных операторов, – векторного и скалярного, что является определяющим моментом для формулировки требуемого критерия. Данная процедура фактически осуществлена в [12] и в настоящей статье может использоваться априори.

Этап 2) состоит в изучении операторных ядер из 1) и обобщении результатов по условиям разрешимости для *однородных* сред [10, 11]. Оба этапа, в свою очередь, также обеспечивают формулировку искомого критерия разрешимости, но на более детальном уровне.

Соответствующая теорема доказывается конструктивно, т.е. условия обратимости примененных матричных операторов выписаны явно, а необходимость и достаточность легко проверяются непосредственно. Действительно, проведенная полная диагонализация системы (1) с помощью построения обратных матричных операторов обеспечивает необходимость. Последовательное же применение уже не обратных, а исходных, скалярного и векторного, операторов из [8, 10] к обобщенному волновому уравнению, гарантирует достаточность. Последнее преобразование приводит данное единое скалярное уравнение к первоначальной системе (1).

Этот завершающий шаг исследования и означает достижение цели настоящей статьи.

2. Условия существования обратных матричных операторов. Обращаясь к вышеупомянутому этапу 1), на основании [10, 12], можно записать результат диагонализации системы (1) с помощью построения обратных матричных операторов, исследуя одновременно их ядра.

Действительно, диагонализация (1) на блочном уровне реализуется посредством применения оператора

$$M^{-1} = (\det M)^{-1}\begin{bmatrix} -D & -A \\ A & -C \end{bmatrix}, \tag{2}$$

обратного по отношению к

$$M = \begin{bmatrix} -C & A \\ -A & -D \end{bmatrix}. \tag{3}$$

В (2), (3) введены следующие обозначения:

$$C = \sigma + \varepsilon_a \partial_0^*;\ D = r + \mu_a \partial_0^*;\ \partial_0^* = \partial_0 \pm \lambda;\ \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t};\ A = \mathrm{rot}; \tag{4}$$

$$\det M = A^2 + CD = \mathrm{rot}^2 + \tilde{\partial}_0^2 = \mathrm{grad\ div} - \Delta + \tilde{\partial}_0^2, - \tag{5}$$

определитель матрицы M , а операторы $\Delta, \tilde{\partial}_0^2$ в правой части (5) выглядят так

$$\Delta = \sum_{\kappa=1}^{3} \partial_\kappa^2;\ \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}; \tag{6}$$

$$\tilde{\partial}_0^2 = CD = (\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*)(r + \mu_a \partial_0^*) = \mu_a \varepsilon_a (\partial_0^*)^2 + (\sigma\mu_a + r\varepsilon_a)\partial_0^* + r\sigma. \tag{7}$$

Записывая (1) в эквивалентной форме

$$M\vec{F} = \vec{f}, \tag{8}$$

где

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{bmatrix},\quad \vec{f} = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{bmatrix};\ \vec{F}_1 = \vec{E};\quad \vec{F}_2 = \vec{H};\quad \vec{f}_1 = \vec{j}^{\,CT};\quad \vec{f}_2 = \vec{e}^{\,CT}, \tag{9}$$

после применения (2) к (8), приходим к искомой диагонализации (1) на блочном уровне:

$$(A^2 + CD)\vec{F} = \begin{bmatrix} -D\vec{f}_1 - A\vec{f}_2 \\ A\vec{f}_1 - C\vec{f}_2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Определим теперь условие обратимости оператора (3), т.е. существование обратного к нему оператора (2), что означает исследование ядра (3) [13]. Именно, пустота этого ядра –

$$\mathrm{Ker}\, M = \varnothing \tag{11}$$

гарантирует существование обратного оператора (2).

Условие (11) подразумевает поиск всех вектор-функций $\vec{F}$, для которых

$$M\vec{F} \neq 0\,. \tag{12}$$

Тогда при выполнении условий $(11) \equiv (12)$ обратный матричный оператор (2) существует [13] и обеспечивает разрешимость системы (1) в терминах диагонализации на блочном уровне.

Очевидно, что в данной постановке задачи намного проще решить вопрос выявления того множества вектор-функций $\vec{F}$, для которых справедливо требование, противоположное по отношению к условиям $(11) \equiv (12)$ –

$$M\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, M \neq \varnothing\,. \tag{13}$$

Тогда исключение элементов, удовлетворяющих (13), из всего множества искомых вектор-функций $\vec{F}$, приводит к требуемым условиям существования обратного относительно (3) оператора (2), а заодно приводит к искомым условиям разрешимости системы (1).

Для реализации (13) векторное уравнение $M\vec{F} = 0$, являющееся однородным по отношению к (8)…(10), следует переписать покоординатно в виде системы уравнений

$$\begin{cases} A_{23}F_{i1} - B_{12}F_{i2} - B_{13}F_{i3} = 0 \\ -B_{12}F_{i1} + A_{13}F_{i2} - B_{23}F_{i3} = 0 \quad (i = 1,2). \\ -B_{13}F_{i1} - B_{23}F_{i2} + A_{12}F_{i3} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

В (14):

$$F_{ik} = F_{ik}(x,y,z,t),\ \vec{F}_i = \begin{bmatrix} F_{i1} \\ F_{i2} \\ F_{i3} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2), \tag{15}$$

а матричные элементы выглядят так

$$B_{jk} = \partial_j \partial_k \quad (j \neq k;\ j,k = \overline{1,3}); \quad A_{jk} = \Delta - \partial_l^2 - \widetilde{\partial}_0^2 \quad (l \neq j,k;\ j \neq k;\ k,l = \overline{1,3}). \tag{16}$$

Фактически, (14)…(16) означает покоординатную запись равенства $\det M = 0$.

Все решения системы (14), являющиеся скалярными компонентами $F_{ik}\,(i = 1,2;\ j = \overline{1,3})$ неизвестных вектор-функций электромагнитного поля, образуют множество искомых элементов, удовлетворяющих условию (13), и для которых оператор (3) необратим. Необратимость (3) означает выполнение условий (13) и неразрешимость исходной системы (1) даже на первоначальном уровне поблочной диагонализации.

Таким образом, завершающий этап исследований по определению условий разрешимости симметричной дифференциальной системы Максвелла для произвольной *неоднородной* изотропной линейной возбужденной среды сводится к решению системы (14)…(16).

В свою очередь, из теории систем линейных однородных уравнений известно, что система n уравнений с n неизвестными обладает ненулевыми решениями тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю [14]. Определитель операторного однородного линейного аналога – системы (14) [8, 14] имеет вид

$$-\widetilde{\partial}_0^2 (\Delta - \widetilde{\partial}_0^2)^2 . \tag{17}$$

Равенство (17) нулю, очевидно, эквивалентно объединению двух равенств

$$\left[\begin{aligned} \widetilde{\partial}_0^2 &= 0, \\ \widetilde{\partial}_0^2 - \Delta &= 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Реализация же условий (11)≡(12), отвечающих как за обратимость оператора (3), так и за разрешимость системы (1) на уровне блочной диагонализации, возможна в том и только том случае, когда оба равенства (18) не выполняются, т.е. определитель (17) должен быть не равен нулю. Тогда система (14) имеет одно, нулевое решение [14]. В свою очередь, по определению ядра оператора [13] нулевой элемент во множестве ядерных представителей исключается.

Таким образом, если определитель (17) отличен от нуля, т.е. ядро оператора (3) пусто, то выполняются искомые условия (11)≡(12). Эти условия обеспечивают, в том числе, и заключительный покоординатный этап диагонализации системы (1), осуществляемый посредством построения соответствующего обратного матричного оператора [8].

В заключение данного пункта необходимо отметить, что выше проведенные рассуждения по обратимости матричных операторов, вплоть до текстуальных логических переходов, повторяют результаты работы [10], т.е. на текущем шаге исследований доказательство искомого критерия инвариантно относительно характеристик исследуемой среды.

3. Анализ невыполнения условий (18) и формулировка критерия. Анализ невыполнения условий (18), очевидно, эквивалентен следующей системе

$$\begin{cases} \widetilde{\partial}_0^2 \neq 0, \\ \widetilde{\partial}_0^2 - \Delta \neq 0, \end{cases} \tag{19}$$

где первое неравенство – частный случай второго при $\Delta = 0$. Поэтому достаточно исследовать лишь последнее из двух условий (19), включающее в себя первое автоматически.

Поскольку проще изучить

$$\widetilde{\partial}_0^2 - \Delta = 0 , \tag{20}$$

а затем перейти к отрицанию полученного результата, рассмотрим именно (20), левую часть которого можно трактовать как операторный квадратный трехчлен относительно ∂_0^*. Действительно, согласно (7) равенство (20) запишется так:

$$\mu_a \varepsilon_a (\partial_0^*)^2 + (\sigma\mu_a + r\varepsilon_a)\partial_0^* + (r\sigma - \Delta) = 0. \tag{21}$$

Подразумевая воздействие левой операторной части (21) на соответствующие функции, можно исследовать (21) как операторный аналог обычного квадратного уравнения. Тогда дискриминант (21) имеет следующий вид

$$D = (\sigma\mu_a - r\varepsilon_a)^2 + 4\mu_a\varepsilon_a\Delta, \tag{22}$$

и его знак произволен не только за счет присутствия оператора Лапласа, но и в силу неоднородности изучаемой среды, где характеристики электромагнитного поля не постоянные, а функции, зависящие от пространственных координат (x, y, z).

Если принимать естественное необходимое условие оставаться в действительном пространстве (x, y, z, t), что абсолютно оправдано в силу рассматриваемых реальных инженерно-физических процессов, то при $D < 0$ левая часть (21) отлична от нуля и, значит, требование (19) выполнено. Принимая во внимание (22), последний результат запишется в таком виде

$$D < 0 \Leftrightarrow \Delta < -\left(\frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} - r\sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\right)\right)^2. \tag{23}$$

Нетрудно заметить, что (23) относится только ко второму неравенству из (19), так как при $\Delta = 0$ первое требование в (19) никогда не выполняется. Дискриминант уравнения

$$\tilde{\partial}_0^2 = 0 \tag{24}$$

как частный случай (22) задается выражением $(\sigma\mu_a - r\varepsilon_a)^2 \geq 0$ при $\Delta = 0$.

Далее, если $D \geq 0$ для (21), то на основании формул (22), (23) получаем следующую систему двух условий, отражающую отсутствие корней в уравнении (21):

$$\begin{cases} \Delta \geq -\left(\dfrac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}} - r\sqrt{\dfrac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\right)\right)^2, \\ \partial_0^* \neq -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_a} + \dfrac{r}{\mu_a} \mp \sqrt{D}\right). \end{cases} \tag{25}$$

Очевидно, что объединение (25) и (23) обеспечивает справедливость искомой системы (19).

Наконец, собирая воедино все вышеприведенные результаты данного пункта 2 и рассуждения предыдущего пункта 1, можно утверждать, что доказана следующая теорема. **Критерий разрешимости системы (1):** *симметричная дифференциальная система уравнений Максвелла (1) для произвольной возбужденной* ***неоднородной*** *изотропной линейной среды разрешима на уровне эквивалентности единому обобщенному скалярному волновому уравнению тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

$$\left[\begin{matrix}(23)\\(25)\end{matrix}\right] = \left[\begin{array}{l} \Delta < -\left(\dfrac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}} - r\sqrt{\dfrac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\right)\right)^2 \\ \begin{cases} \Delta \geq -\left(\dfrac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}} - r\sqrt{\dfrac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\right)\right)^2 \\ \partial_0 \neq \begin{bmatrix} -\lambda \\ +\lambda \end{bmatrix} - \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_a} + \dfrac{r}{\mu_a}\right) \mp \sqrt{\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_a} - \dfrac{r}{\mu_a}\right)^2 + \dfrac{4\Delta}{\mu_a\varepsilon_a}}\right) \end{cases} \end{array}\right. \tag{26}$$

При этом указанное понятие разрешимости предлагается называть «полной диагонализацией» рассматриваемой системы, а все исследование проводить для классических, не обобщенных функций. Наконец, полученное единое волновое скалярное уравнение решается в явном *виде [12], что и обеспечивает окончательный этап конструктивного решения поставленной исходной задачи.*

В заключение несложно заметить, что во втором условии объединения (26) при равенстве $\Delta = 0$ приходим к первому из искомых требований в (19) как частному случаю второго. При этом для невыполнения равенства (24), для которого всегда $(\sigma\mu_a - r\varepsilon_a)^2 \geq 0$, имеем $\partial_0 \neq \begin{bmatrix} -\lambda - \dfrac{r}{\mu_a} \\ +\lambda - \dfrac{\sigma}{\varepsilon_a} \end{bmatrix}$.

Кроме того, при сравнении настоящих полученных результатов для *неоднородной* среды с аналогичными выводами для однородной среды из [10, 11], можно сделать заключение об инвариантности доказанного критерия относительно основных характеристик электромагнитного поля $\sigma, \mu_a, \varepsilon_a$.

Итак, искомый критерий полностью доказан, и цель данной работы достигнута.

Литература

1. *Пименов Ю.*В. Техническая электродинамика / Ю.В. Пименов, В.И. Вольман, А.Д. Муравцов. – М.: Радио и связь, 2002. – 536 с.
2. *Иваницкий А.М.* Основы теории многомерных аналоговых и дискретных цепей / А.М. Иваницкий – Одесса: ОНАС, 2003. – 38 с.
3. *Иваницкий А.М.* Зависимость третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух уравнений при произвольном возбуждении электромагнитного поля / А.М. Иваницкий // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – № 2. – С. 3 – 7.
4. *Максвелл Дж.К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Дж.К. Максвелл – М.: Госуд. изд. технико-теоретич. литер.,1954. – 687 с.
5. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский – М.: Наука, 1977. – 736 с.
6. Proc of the International Scientific Conference on the Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET10) – Kiev: KPI, September 2010. – IEEE, 2010. – Print ISBN: 978 – 1 – 4244 – 8859 – 9. – 404 p.
7. *Иваницкий А.М.* Диагонализация «симметричной» системы дифференциальных уравнений Максвелла / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2007. – № 1. – С. 15 – 24.
8. *Дмитриева И.*Ю. Построение обратного матричного оператора для симметричной системы дифференциальных уравнений Максвелла / И.Ю. Дмитриева // Праці Одес. політехн. ун-ту. – 2011. – Вип. 1(35). – С. 180 – 184.
9. *Дмитриева И.*Ю. Решение обобщенного волнового уравнения / И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2009. – № 2. – С. 68 – 72.
10. *Дмитриева И.*Ю. Условия разрешимости симметричной дифференциальной системы Максвелла для изотропной возбужденной среды / И.Ю. Дмитриева // Праці Одес. політехн. ун-ту. – 2011. – Вип. 2(36). – С. 248 – 253.
11. *Dmitrieva I.* Industrial problems of technical electrodynamics and analysis of the inverse matrix operator existence for the “symmetrical” differential Maxwell system / I. Dmitrieva // Proc of the International Conf. ENEC 2011 (Econophysics, Complexity, etc.), Hyperion University, Bucharest. – Bucharest: Victor Publishing House, 2012. – Vol. 4. – P. 9 – 18.
12. *Дмитриева И.*Ю. Решение системы дифференциальных уравнений Максвелла для неоднородной возбужденной среды / И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2011. – № 2. – С. 91 – 97.
13. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
14. *Курош А.*Г. Курс общей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1975. – 432 с.