

**ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧНОЇ ФОРМУЛИ РОЗРАХУНКУ ШВИДКОСТІ
ПЕРЕДАВАННЯ ІНФОРМАЦІЇ НА НЕСУЧИХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧІ
ОРТОГОНАЛЬНИМИ ГАРМОНІЧНИМИ СИГНАЛАМИ**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧНОЙ ФОРМУЛЫ РАСЧЕТА СКОРОСТИ ПЕРЕДАЧИ
ИНФОРМАЦИИ НА НЕСУЩИХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ
ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ СИГНАЛАМИ**

**DEFINITION OF THE EXACT FORMULA OF CALCULATION OF DATA
TRANSMISSION RATE ON CARRIERS OF TRANSMISSION SYSTEMS BY
ORTHOGONAL HARMONIC SIGNALS**

Анотація. Виведено точну формулу розрахунку швидкості передавання інформації на несучих систем передачі ортогональними гармонічними сигналами. Здійснено порівняння цієї формули з існуючими приблизними формулами й оцінено похибки у розрахунках за приблизними формулами. Обґрунтовано доцільність застосування точної формули.

Аннотация. Выведена точная формула расчета скорости передачи информации на несущих систем передачи ортогональными гармоническими сигналами. Осуществлено сравнение этой формулы с существующими приближенными формулами и дана оценка погрешности расчетов по приближенным формулам. Обоснована целесообразность применения точной формулы.

Summary. The exact formula of calculation of data transmission rate on carriers of transmission systems by orthogonal harmonic signals is deduced. The comparison of this formula with existing approximate formulas is carried out and the error of calculations by the approximate formulas is estimated. The reasonability of exact formula application is grounded.

Стрімке розповсюдження сучасних послуг широкосмугового доступу (ШД) до ресурсів інфокомунікаційних мереж стимулює розроблення ефективних телекомунікаційних технологій, що здатні забезпечити надання цих послуг з високою якістю. Вирішення цієї проблеми ускладнюється тим, що для забезпечення ШД на даний час широко використовуються радіолінії або абонентські лінії на базі кабелів з мідними жилами, які мають нестабільні частотні та часові характеристики, швидкість зміни яких не дозволяє ефективно їх відслідковувати за допомогою традиційних коректорів частотних характеристик. Характерною особливістю таких середовищ розповсюдження є наявність потужних зосереджених за спектром та імпульсних завад, перехідних завад від сусідніх станцій та систем передачі. Дослідження різних телекомунікаційних технологій передачі показали, а практика підтвердила, що сучасним телекомунікаційним потребам найкращим чином відповідають системи передачі, що використовують множину ортогональних гармонічних сигналів-переносників (ОГС), одночасно і незалежно модульованих інформаційними сигналами, що передаються. За кордоном цей спосіб передавання називають різними термінами: DMT (Discrete Multi Tone – дискретна багатотонава модуляція), OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing – мультиплексування з ортогональним частотним розділенням сигналів) або COFDM (Coding Orthogonal Frequency Division Multiplexing – мультиплексування з ортогональним частотним розділенням сигналів і кодуванням).

Протягом останніх двох десятиліть було розроблено декілька телекомунікаційних технологій, що використовують множину ОГС. До таких технологій, наприклад, належать технології радіодоступу Wi-Fi і WiMAX (стандарти IEEE 802.11, IEEE 802.16 відповідно), а також технології ADSL і VDSL доступу по абонентських двопроводових лініях (Рекомендації ITU G.992 і G.993 ITU-T відповідно).

Значне поширення систем передачі ортогональними гармонічними сигналами (СП ОГС) на мережах зв'язку пов'язано з тим, що ці системи забезпечують високу ефективність передавання інформації по каналах зв'язку з ненормованими і нестабільними в часі частотними характеристиками, з адитивними та мультиплікативними завадами.

У зв'язку з вищесказаним, актуальним є проведення досліджень, які дозволять збільшити ефективність застосування СП ОГС на мережах зв'язку. Одним із напрямів досліджень є оптимізація

розподілу біт передаваної інформації по множині сигналів-переносників (несучих частотах) СП ОГС [1, 2]. У сучасних СП ОГС на різних несучих інформація передається з різною швидкістю, а розподіл бітів передаваної інформації по несучих відбувається згідно з результатами розрахунків, які здійснюються в обладнанні СП ОГС, виходячи з вимірних цим обладнанням рівнів завад та загасання сигналу на частоті кожної несучої. Розрахунки розподілу бітів по несучих здійснюються за допомогою співвідношення, яке зв'язує максимальну кількість біт інформації, що можливо передавати протягом послідовки на певній несучій частоті, зі співвідношенням сигнал/завада на частоті цієї несучої і ймовірністю помилки. Однак проблема полягає в тому, що це співвідношення неоднакове в різних джерелах [1, 3, 4]. Похибки у цьому співвідношенні можуть призвести до неточних розрахунків обладнанням СП ОГС розподілу бітів передаваної інформації по несучих, що, у свою чергу, призведе до зменшення ефективності використання каналу зв'язку цими системами. З іншого боку, неточність цього співвідношення вносить додаткову похибку в результати розрахунків досяжних СП ОГС швидкості та дальності передавання інформації, які використовуються при моделюванні мереж доступу, що застосовують даний метод передавання [3]. Очевидно, необхідним є аналіз та порівняння цих співвідношень. Якщо буде визначено, що всі ці співвідношення є неточними, то необхідно знайти точне співвідношення. Таким чином, **метою даної статті** є визначення точного співвідношення, яке зв'язує максимальну кількість біт інформації, що можливо передавати протягом послідовки на певній несучій частоті, зі співвідношенням сигнал/завада на частоті цієї несучої і ймовірністю помилки.

Виведемо це співвідношення.

Як відомо [3], ймовірність помилки p на виході i -го каналу приймача СП ОГС визначається співвідношенням:

$$p = K \frac{2(M(i)-1)}{M(i) \log_2 M(i)} Q(h), \quad (1)$$

де K – коефіцієнт розмноження помилок; $M(i)$ – число рівнів сигналу по кожній з двох взаємно ортогональних осей в графічному поданні КАМ-сигналу; $M(i) = 2^{b(i)/2}$, $b(i)$ – максимальна кількість біт, що можливо передавати протягом послідовки на i -й несучій ($i = 1, 2, \dots, n$, n – загальна кількість несучих); Q – функція визначається як:

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy;$$

h – відношення "напіввідстані" $a(i)$ між сусідніми сигнальними точками до середньоквадратичного відхилення гаусівського шуму потужністю $N(i)$:

$$h = \frac{a(i)}{\sqrt{N(i)}}. \quad (2)$$

Відомо [3], що середній квадрат амплітуди серед сигналів сузір'я КАМ дорівнює $2/3(M^2(i)-1)a^2$. Середнє за часом значення квадрату сигналу дорівнює середній потужності сигналу. Оскільки в СП ОГС використовуються гармонічні сигнали, то середня потужність сигналів сузір'я дорівнює середньому квадрату амплітуди цих сигналів, поділеному на 2:

$$P_c(i) = \frac{2(M^2(i)-1)}{3 \cdot 2} a^2(i) = \frac{M^2(i)-1}{3} a^2(i).$$

Тоді, враховуючи (2), відношення сигнал/завада дорівнює:

$$SNR(i) = \frac{P_c(i)}{N(i)} = \frac{(M^2(i)-1)a^2(i)}{3N(i)} = \frac{(M^2(i)-1)N(i)h^2}{3N(i)} = \frac{(M^2(i)-1)h^2}{3}.$$

Звідси, виразивши h із формули (1), отримуємо:

$$SNR(i) = \frac{(2^{b(i)} - 1) \cdot \left[Q^{-1} \left(\frac{p \cdot 2^{b(i)/2} \cdot b(i)/2}{K \cdot 2 \cdot (2^{b(i)/2} - 1)} \right) \right]^2}{3}, \quad (3)$$

де $Q^{-1}(x)$ – функція, зворотна $Q(x)$.

Очевидно, що з (3) неможливо отримати аналітичний вираз для розрахунку $b(i)$, тому що в цьому виразі $b(i)$ стоїть у чотирьох місцях. Тому на практиці користуються приблизними формулами розрахунку $b(i)$, про які і зазначалося у вступній частині даної статті.

Оскільки $b(i)$ можуть набувати тільки позитивних цілих значень (наприклад, у СП ADSL2, ADSL2+, VDSL і VDSL2, – від 0 до 15 біт з кроком 1 біт [4]), то для розрахунку $b(i)$ можливо записати точну формулу, попередньо визначивши за формулою (3) припустимі відношення сигнал/завада $SNR_{b \text{ прип}}$, необхідні для підтримки сигнальних сузір'їв для кількості бітів b :

$$b(i) = b, \quad SNR_{b+1 \text{ прип}} > SNR(i) \geq SNR_{b \text{ прип}}, \quad (4)$$

де $SNR(i)$ – реальне (вимірне чи розраховане) відношення сигнал/завада.

Таким чином, $b(i)$ визначається шляхом порівняння $SNR(i)$ з $SNR_{b \text{ прип}}$.

Наприклад, для СП ADSL2, ADSL2+, VDSL та VDSL2 (враховуючи, що для цих СП $p = 10^{-7}$ та $K = 2,75$, оскільки застосовується тривідвідний скремблер), точна формула набуває вигляду:

$$b(i) = \begin{cases} 15, & SNR(i) \geq 2,886 \cdot 10^5 \\ 14, & 2,886 \cdot 10^5 > SNR(i) \geq 1,45 \cdot 10^5 \\ 13, & 1,45 \cdot 10^5 > SNR(i) \geq 7,287 \cdot 10^4 \\ 12, & 7,287 \cdot 10^4 > SNR(i) \geq 3,663 \cdot 10^4 \\ 11, & 3,663 \cdot 10^4 > SNR(i) \geq 1,842 \cdot 10^4 \\ 10, & 1,842 \cdot 10^4 > SNR(i) \geq 9,26 \cdot 10^3 \\ 9, & 9,26 \cdot 10^3 > SNR(i) \geq 4,656 \cdot 10^3 \\ 8, & 4,656 \cdot 10^3 > SNR(i) \geq 2,37 \cdot 10^3 \\ 7, & 2,37 \cdot 10^3 > SNR(i) \geq 1,174 \cdot 10^3 \\ 6, & 1,174 \cdot 10^3 > SNR(i) \geq 586,9 \\ 5, & 586,9 > SNR(i) \geq 291,2 \\ 4, & 291,2 > SNR(i) \geq 142,2 \\ 3, & 142,2 > SNR(i) \geq 66,97 \\ 2, & 66,97 > SNR(i) \geq 28,99 \\ 1, & 28,99 > SNR(i) \geq 9,766 \\ 0, & 9,766 > SNR(i) \end{cases}$$

З метою спрощення розрахунку $b(i)$ при моделюванні мереж доступу на базі СП ОГС, а також для зменшення обчислювальної складності алгоритму розрахунку $b(i)$ у приймачі СП ОГС можливо використовувати вище згадувані приблизні формули.

Покажемо, яким чином виводиться приблизна формула. У формулі (1) або (3) визначимо:

$$\beta(i) = \frac{2(M(i)-1)}{M(i) \log_2 M(i)} = \frac{2(2^{b(i)/2} - 1)}{2^{b(i)/2} b(i) / 2} = \frac{4(1 - 2^{-b(i)/2})}{b(i)}. \quad (5)$$

$\beta(i)$ є функцією від $b(i)$, але для отримання приблизної формули $\beta(i)$ приймають рівною певній константі β , від вибору якої залежить остаточний вигляд кінцевої формули. Після введення β формула (3) набуває наступного вигляду:

$$SNR(i) = \frac{(2^{b(i)} - 1) \cdot [Q^{-1}(\frac{p}{K \cdot \beta})]^2}{3}. \quad (6)$$

Оскільки p , K та β – константи, то вводиться коефіцієнт:

$$\gamma = \frac{[Q^{-1}(p / K \cdot \beta)]^2}{3}, \quad (7)$$

і формула (6) набуває вигляду:

$$SNR(i) = (2^{b(i)} - 1) \gamma. \quad (8)$$

На відміну від (3), у (8) $b(i)$ стоїть тільки в одному місці, тому з (8) можна виразити $b(i)$ через $SNR(i)$ і γ . З урахуванням того, що кількість бітів може бути тільки цілим числом, формула розрахунку $b(i)$ набуває кінцевого вигляду:

$$b(i) = \text{floor} \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{SNR(i)}{\gamma} \right) \right\}, \quad (9)$$

де $\text{floor} \{x\}$ - операція відкидання дробової частини числа x .

Як зазначалося вище, у різних джерелах надаються різні формули розрахунку $b(i)$, і відрізняються вони саме значенням коефіцієнта γ . Так, у [1] пропонується використовувати $\gamma = 9$; у [3] пропонується розраховувати середньоарифметичне значення β (серед усіх $\beta(i)$ для $b(i) = 1, 2, \dots, 15$) та відповідний цьому значенню коефіцієнт $\gamma = 9,287$, а в Рекомендації МСЕ [4] наведено значення параметра $snrgap = 9,75$ дБ, з якого перерахунком можна отримати $\gamma = 9,664$, що відповідає використанню сигнального сузір'я КАМ-4 за ймовірності помилки $p = 10^{-7}$ (це можна перевірити за допомогою формул (5) і (7)).

На рис. 1 надано результати розрахунку похибок відношення сигнал/завада ΔSNR , %, та захищеності ΔA_3 , дБ, які розраховувалися за формулами:

$$\Delta SNR = \frac{(SNR_{ex} - SNR_{ap})}{SNR_{ex}} \cdot 100 \%, \quad (10)$$

$$\Delta A_3 = 10 \lg \left(\frac{SNR_{ex}}{SNR_{ap}} \right), \quad (11)$$

де SNR_{ex} – відношення сигнал/завада, розраховане за точною формулою (3);

SNR_{ap} – відношення сигнал/завада, розраховане за приблизною формулою (8).

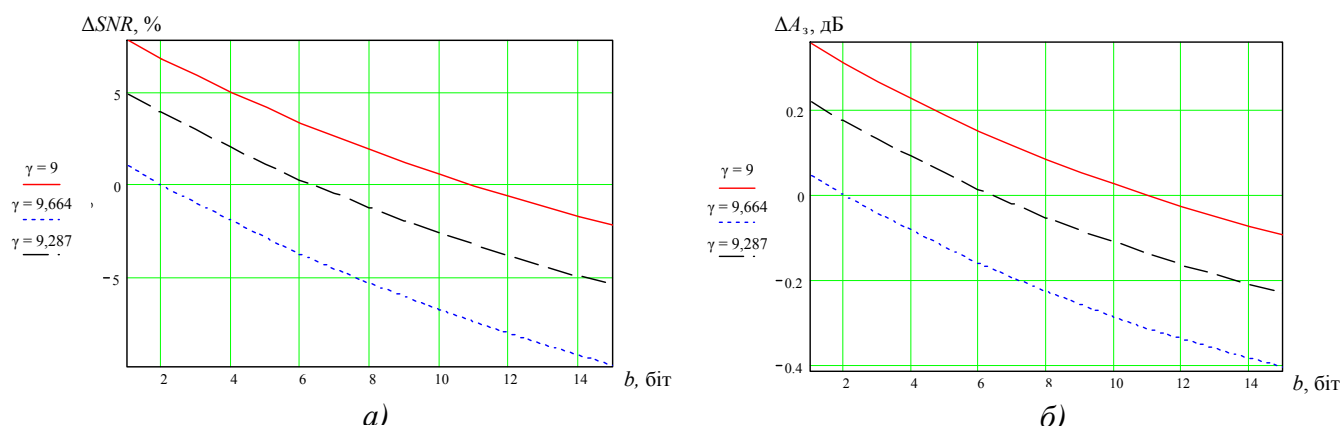


Рисунок 1 – Похибки розрахунку мінімально припустимих відношення сигнал/завада (а) та захищеності (б) для різних кількостей передаваних упродовж послілки біт

Як бачимо з рис. 1, при $\gamma = 9$ збіг з точною формулою спостерігається для $b = 11$, при $\gamma = 9,287$ – для $b \approx 6$, а при $\gamma = 9,664$ – для $b = 2$. При цьому, згідно з (10, 11), від'ємне значення ΔSNR та ΔA_3 говорить про додатковий запас захищеності відносно точної формули, а додатне значення вказує на зменшення захищеності.

З'ясуємо, для яких значень γ середньоарифметична (серед усіх значень ΔSNR , відповідних $b = 1, 2, \dots, 15$) похибка $\Delta SNR_{sr\ arifm}$, %, буде мінімальною. Для цього розрахуємо залежність $\Delta SNR_{sr\ arifm}$ від γ . Розрахунки проведемо для значень γ , що відповідають кількості передаваних протягом тактового інтервалу біт $b = 1, 2, \dots, 15$ (відповідність між γ і b описується формулами (5) і (7) – за певного значення b за допомогою (5) визначається значення β , яке підставляється в (7)). Результати розрахунків подано у табл. 1, а графіки залежності $\Delta SNR_{sr\ arifm}$ від b і γ – на рис. 2. З табл. 1 і рис. 2 видно, що мінімальне значення $\Delta SNR_{sr\ arifm}$ досягає мінімуму при $b = 8$, при цьому $\gamma = 9,175$. Таким чином, можна запропонувати ще одну приблизну формулу (9) розрахунку $b(i)$, в якій $\gamma = 9,175$.

Отже, маємо чотири формули приблизного розрахунку $b(i)$, при цьому вони мають збіг з точною формулою лише для одного певного значення b . При використанні приблизних формул зі значеннями γ , що відповідають значенням b , меншим за оптимальне, розподіли бітів по несучих розраховуються в приймачі СП ОГС, виходячи із занижених значень припустимих відношень

сигнал/завада, це призводить до перевищення необхідної ймовірності помилки, що є неприпустимим. Використання в приймачі СП ОГС формул, що відповідають значенням b , більшим за оптимальне, призводить до виникнення додаткового запасу по відношенню сигнал/завада, а значить, до втрат у досяжній швидкості передавання інформації. У граничному випадку втрата швидкості ΔR може складати $f_T \times N_{\text{нес}}$, де f_T – частота інформаційних кадрів, а $N_{\text{нес}}$ – кількість несучих. Так, для ADSL2+ ΔR може досягати 2 Мбіт/с.

Таблиця 1 – Залежність середньоарифметичної похибки відношення сигнал/завада $\Delta SNR_{sr\ arifm}$ та захищеності $\Delta A_{3\ sr\ arifm}$ від коефіцієнта γ

b , біт	β	γ	$\Delta SNR_{sr\ arifm}$, %	$\Delta A_{3\ sr\ arifm}$, дБ
1	1,172	9,766	6,057	0,253
2	1	9,664	5,086	0,214
3	0,862	9,568	4,307	0,182
4	0,75	9,478	3,704	0,157
5	0,659	9,394	3,258	0,139
6	0,583	9,316	2,953	0,127
7	0,521	9,243	2,774	0,12
8	0,469	9,175	2,704	0,118
9	0,425	9,111	2,731	0,12
10	0,388	9,052	2,844	0,126
11	0,356	8,997	3,030	0,135
12	0,328	8,945	3,281	0,146
13	0,304	8,896	3,589	0,161
14	0,283	8,851	3,947	0,177
15	0,265	8,808	4,348	0,195

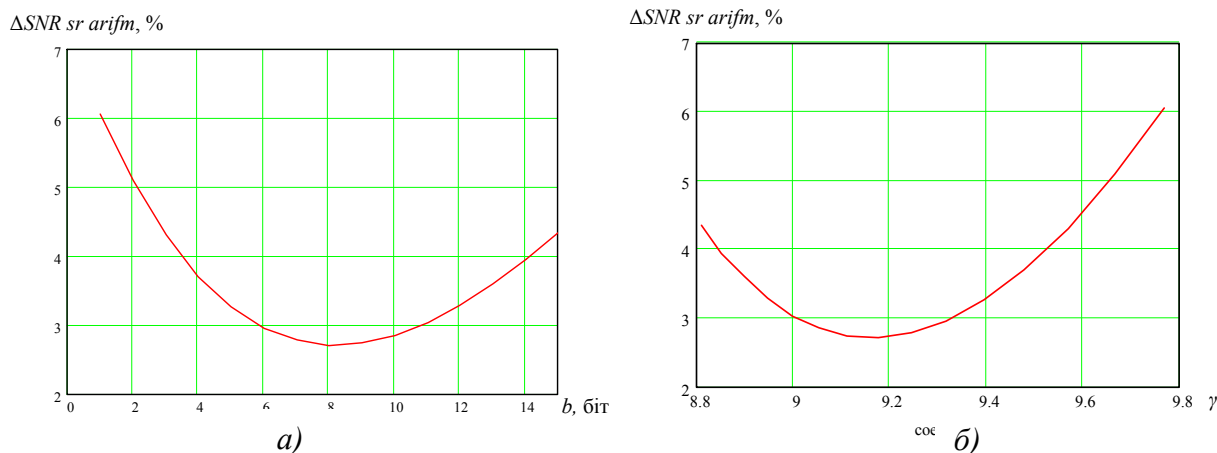


Рисунок 2 – Залежність середньоарифметичної похибки відношення сигнал/завада від числа біт b (а) та коефіцієнта γ (б)

Визначимо похибку розрахунку швидкості передавання за точною та приблизними формулами для СП ADSL2+. Швидкість передавання розраховується за формулою [5]:

$$R = 4000 \cdot \sum_{i=6}^{511} b(i),$$

де 4000 Гц – частота інформаційних кадрів у СП ADSL2+, а похибка розрахунку швидкості передавання ΔR , %, - за формулою, аналогічною (10).

Як приклад на рис. 3 наведено результати визначення похибки розрахунку швидкості передавання за точною та приблизними формулами для СП ADSL2+ при роботі по кабелю ТПП-0,5. Як видно з рис. 3, ΔR знаходиться у межах $\pm 2\%$. Такі межі похибки ΔR мають місце і для інших типів кабелю. При цьому різниця між розрахованими точним та приблизним значенням швидкості передавання не перевищує 150 кбіт/с.

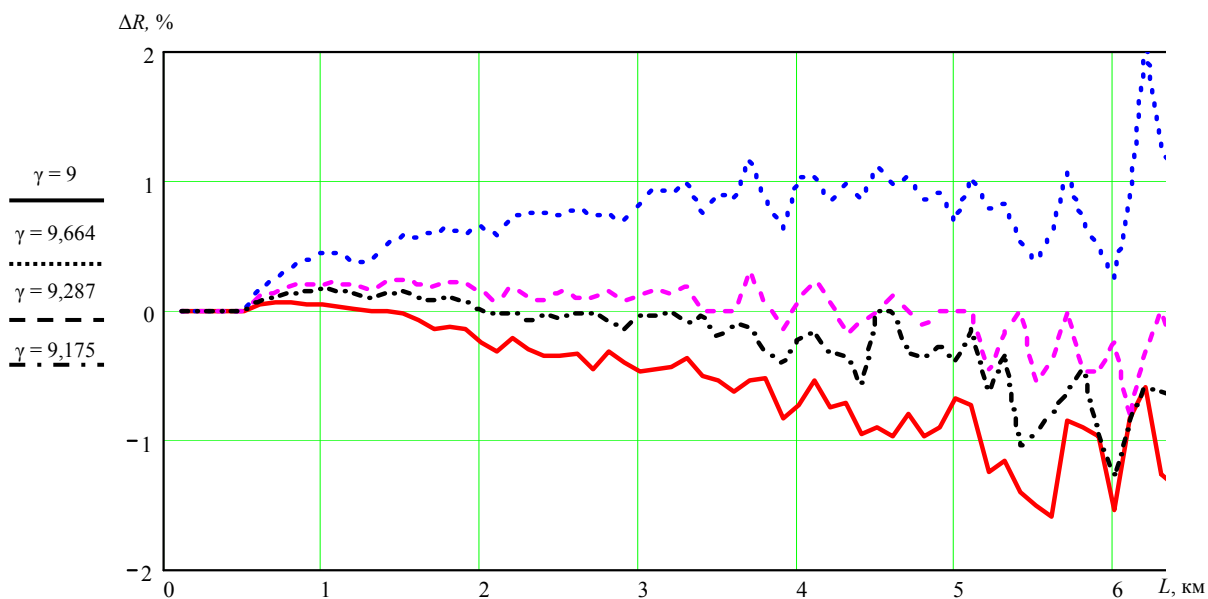


Рисунок 3 – Залежність ΔR для СП ADSL2+ від довжини абонентської лінії та коефіцієнта γ (ТПП-0,5, СГП завод мінус 120 дБм/Гц)

На завершення підсумуємо, що у даній статті виведене точне співвідношення, яке зв'язує максимальну кількість біт інформації, що можливо передавати протягом послідовної на певній несучій частоті, зі співвідношенням сигнал/завада на частоті цієї несучої і ймовірністю помилки. При порівнянні виведеного співвідношення з існуючими приблизними співвідношеннями з'ясовано, що використання приблизних формул призводить до похибки у розрахунку досяжної швидкості передавання у середньому до 2%. Проте можливі ситуації, коли ця похибка досягає десятків відсотків. Так, для системи передачі ADSL2+ максимальна різниця між швидкостями, розрахованими за точною та приблизною формулами, складає 2 Мбіт/с. Використання неточних формул при розрахунку у приймачі СП ОГС розподілу бітів передаваної інформації по несучих може призвести до суттєвого зменшення ефективності використання каналу зв'язку цими системами або до порушення вимог щодо ймовірності помилок. Таким чином, доцільно використовувати запропоновану авторами точну формулу.

Література

1. Bingham John A.C. ADSL, VDSL and Multicarrier Modulation / John A.C. Bingham // John Wiley & Sons Inc. - 2000. - P. 289.
2. Fazel K. Multi-carrier and spread spectrum systems. From OFDM and MC-CDMA to LTE and WiMAX / K. Fazel, S. Kaiser // John Wiley & Sons Ltd. – 2008. – P. 360.
3. Балашов В.А. Системы передачи ортогональными гармоническими сигналами / Балашов В.А., Воробийченко П.П., Ляховецкий Л.М. – М.: Эко-трендз, 2012. – 228 с.
4. Рекомендація ITU-T MCE-T G.992.3 Asymmetric digital subscriber line transceivers 2 (ADSL2) (Прийомопередавачі асиметричної цифрової абонентської лінії 2 (ADSL2)).
5. Балашов В.А. Развитие технологий ADSL для построения цифровых абонентских линий / В.А. Балашов, В.П. Ефремов, Л.М. Ляховецкий // Зв'язок. – 2005. – № 7. – С. 7 – 13.