

**СИНТЕЗ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ КАНАЛОВ ПЕРЕДАЧИ,
 УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ КРИТЕРИЮ НАЙКВИСТА**

**СИНТЕЗ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ КАНАЛІВ ПЕРЕДАЧІ,
 ЯКІ ЗАДОВОЛНЯЮТЬ КРИТЕРІЮ НАЙКВИСТА**

**THE SYNTHESIS OF TRANSMISSION CHANNELS TRANSFER
 FUNCTIONS THET SATISFY THE NYQUIST CRITERION**

Аннотация. В статье предлагается общий подход к синтезу передаточных функций (ПФ) каналов передачи, удовлетворяющих критерию Найквиста. Решается задача синтеза ПФ, преобразование Фурье которой, максимально сконцентрировано во временной области. Сравниваются известные ПФ каналов передачи по критерию концентрированности энергии импульсной реакции в конечном интервале времени.

Анотація. У статті пропонується загальний підхід до синтезу передатних функцій (ПФ) каналів передачі, що задовольняють критерию Найквіста. Розв'язується задача синтезу ПФ, перетворення Фур'є, які максимально сконцентровано у часовій області. Порівнюються відомі передатні функції каналів передачі за критерієм сконцентрованості енергії імпульсної реакції в кінцевому інтервалі часу.

Summary. The general approach for the synthesis of transmission functions (TF) of transmission channels is offered in the article, satisfying the Nyquist criterion. The task of Fourier transformation TF synthesis is solved, maximally concentrated in a time domain. The known transmission functions of transmission channels depending on energy concentration of pulse reaction are compared in a finite time domain.

Проблема. Развитие инфокоммуникаций на современном этапе определяет экономический прогресс стран. Это обстоятельство вызывает повышенное внимание к развитию теории телекоммуникаций. В частности, сохраняется интерес к синтезу частотных и временных характеристик, удовлетворяющих критерию Найквиста.

Передаточные функции (ПФ) каналов передачи современных цифровых систем связи оптимизируются по разным критериям, из которых общим для всех является критерий отсеченности импульсной реакции (ИР) сквозного канала передачи (критерий Найквиста) [1]. Широкое распространение получила, например, ПФ вида «приподнятый косинус» [2]. Однако в настоящее время отсутствует общий подход к синтезу ПФ, отвечающих критерию Найквиста и обладающих минимальной эффективной длительностью преобразования Фурье. *Целью статьи является формулирование такого подхода.*

Условие последовательной передачи сигналов по полосоограниченному каналу передачи без межсимвольных помех известно как критерий Найквиста. В частотной области оно формулируется в виде соотношения [1]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q\left(\omega - n\left(\frac{2\pi}{T}\right)\right) = T, \quad |\omega| < \frac{\omega_k}{2}, \quad T = \frac{\pi}{\omega_0}, \quad (1)$$

где T – тактовый интервал времени передачи сигналов; $Q(\omega)$ – комплексная передаточная функция канала передачи (рис. 1); n – порядковый номер $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; ω_k – верхняя частота полосы пропускания канала передачи; ω_0 – частота Найквиста.

Канал передачи сигналов электросвязи в общем виде можно представить в виде каскадно включенных 4-х полюсников:

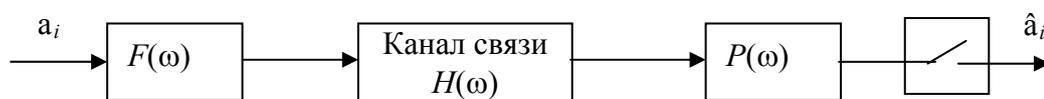


Рисунок 1 – Обобщенная модель канала передачи

На рис. 1 такі обозначення: a_i – отсчеты входного сигнала; \hat{a}_i – отсчеты принятого сигнала; $i = 0, 1, 2, \dots$; $F(\omega)$ – комплексная передаточная функция (ПФ) цепей передатчика, формирующих спектр линейного сигнала; $P(\omega)$ – комплексная ПФ цепей приемника определяющих частотную характеристику приемника вплоть до решающего устройства (РУ).
 $H(\omega)$ – комплексная ПФ канала связи.

Сквозная ПФ канала передачи:

$$Q(\omega) = F(\omega)H(\omega)P(\omega), \quad -\omega_k/2 \leq \omega < \omega_k/2 \quad (2)$$

нормируется в полосе пропускания канала передачи, который в общем виде задается в симметричных пределах: $-\omega_k/2 \leq \omega < \omega_k/2$, где $\omega_k/2$ – верхняя частота полосы пропускания канала передачи.

Критерий Найквиста (1) в графической интерпретации представлен на рис. 2, где приведены функция $Q(\omega)$ и ее сдвиги по частоте на $n\omega_0$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$; $\omega_0 = 2\pi/T$; ω_0 – частота Найквиста.

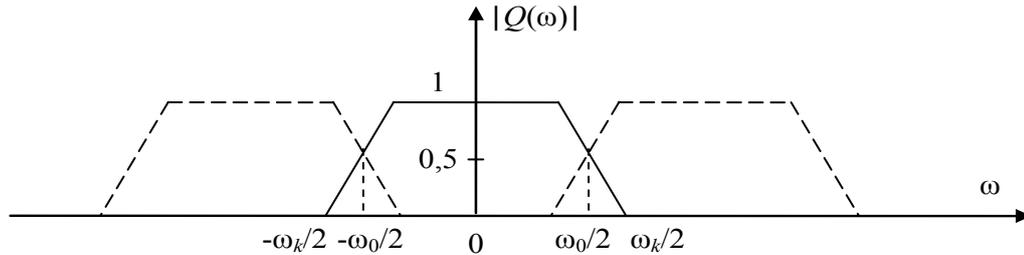


Рисунок 2 – Графическое представление критерия Найквиста

Во временной области критерий Найквиста формулируется как требование отчетности импульсной реакции (ИР) канала передачи [3]:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad -\infty \leq t < \infty,$$

$$g(kT) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Известно, что свойством отсчетности обладают ИР каналов передачи, ПФ которых имеют кососимметричные относительно частот $\omega_0 = 2\pi/T$ скаты [1].

Наибольшее распространение в СП получили ПФ с косинус-квадратичными скатами [2, 3] – ПФ вида «приподнятый косинус». Однако отсутствует строгое обоснование этого факта в отечественной научной литературе.

Очевидно, что существует множество ПФ $Q(\omega)$, обладающих одинаковыми дискретными ИР $g(kT)$. Возникают следующие вопросы: во-первых, как синтезировать ПФ, удовлетворяющие критерию (1) (найквистовые ПФ), и, во-вторых, какие из множества найквистовых функций $Q(\omega)$ при прочих равных условиях обеспечивают максимальную концентрацию энергии ИР канала передачи в конечном интервале.

Ответ на первый вопрос дает приведенный ниже метод синтеза найквистовых ПФ. Введем параметр α следующим образом:

$$\alpha = \frac{\omega_k - \omega_0}{\omega_0}, \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (4)$$

Параметр α называется коэффициентом ската [3] спектра и обозначает крайние значения соотношения ω_k и ω_0 при которых может существовать отсчетная ИР. В [4] коэффициент α называют коэффициентом сглаживания (role off factor).

Значение $\Delta\omega = \omega_k - \omega_0$, $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$ характеризует величину расширения полосы частот канала передачи, по сравнению с минимальной найквистовой полосой.

Метод синтеза найквистовых ПФ заключается в следующем. Желаемая ПФ $Q_{ж}(\omega)$ представляется в виде свертки преобразования Фурье двух прямоугольных функций $P(\omega)$ – в полосе частот $-\omega_0/2 \leq \omega < \omega_0/2$ и $\Psi(\omega)$ – симметричной относительно нуля вещественной функции заданной в диапазоне: $-\Delta\omega/2 \leq \omega < \Delta\omega/2$

$$Q_{ж}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(v) \Psi(\omega - v) dv. \quad (5)$$

Соответственно результирующая ИР на основании теоремы о свертке [1] будет равна произведению преобразований Фурье, соответствующих ПФ:

$$g_{ж}(t) = p(t)\varphi(t), \quad (6)$$

где $p(t)$, $\varphi(t)$ – обратное преобразование Фурье, соответственно функций частоты $P(\omega)$ и $\Psi(\omega)$.

Легко убедиться, что выбор в качестве $\Psi(\omega)$, $-\omega_0/2 \leq \omega < \omega_0/2$, например, прямоугольной ПФ обеспечивает весь спектр допустимых линейных срезов фронтов $Q_{ж}(\omega)$.

Перейдем к решению второй задачи – синтеза $Q_{ж}(\omega)$, обеспечивающей максимальную концентрацию энергии ИР канала передачи в конечном интервале времени. В соответствии с предложенным методом синтеза $Q_{ж}(\omega)$ форма ИР $g_{ж}(t)$ определяется функцией $\varphi(t)$.

Известно [1], что функция частоты, обладающая минимальной эффективной длительностью преобразования Фурье, описывается формулой (рис. 3):

$$\Psi(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\Delta f}} \sin \pi f \frac{1}{\Delta f}, \quad 0 \leq f < \Delta f. \quad (7)$$

Свертка импульса (7) с импульсом:

$$P(\omega) = \begin{cases} 1, & -\frac{\omega_0}{2} \leq \omega < \frac{\omega_0}{2} \\ 0, & \text{при всех иных значениях } \omega \end{cases} \quad (8)$$

порождает частотный импульс длительностью $\omega_0 + \Delta\omega$ со скатами, определяемыми функциями

– для заднего ската импульса:

$$\int_0^f \Psi(\omega) df = 2\sqrt{\frac{\Delta f}{\pi^2}} \sin^2 \frac{\pi f}{2\Delta f}, \quad (9)$$

– для переднего ската импульса:

$$2\sqrt{\frac{\Delta f}{\pi^2}} \cos^2 \frac{\pi f}{2\Delta f}, \quad 0 \leq f < \Delta f. \quad (10)$$

С учетом (8), (9) передаточная функция $Q(\omega)$ (5) может быть описана выражением:

$$Q(f) = \begin{cases} 1, & \text{при } |f| \leq (1-\alpha) \frac{f_0}{2}, \\ \cos^2 \left[\frac{\pi|f|}{2\alpha f_0} - \frac{\pi(2-\alpha)}{4\alpha} \right], & \frac{1-\alpha}{2} f_0 \leq |f| < \frac{1+\alpha}{2} f_0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (11)$$

Формула (11) описывает хорошо известную ПФ типа «приподнятый косинус». Таким образом, показано, что ПФ канала передачи типа «приподнятый косинус» оптимальна с точки зрения критерия минимальной эффективной длительности ИР канала.

Соответствующая ПФ (11), импульсная реакция канала $g_{ж}(t)$ определяется выражением (6). В качестве функции $p(t)$ необходимо считать:

$$p(t) = \frac{\sin \pi f_0 t}{\pi f_0 t}, \quad (12)$$

а в качестве $\varphi(t)$ преобразование Фурье от $\Psi(\omega)$ (7), используя табличные значения неопределенных интегралов, получим:

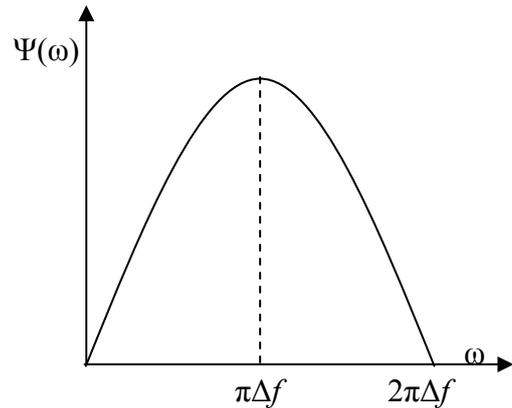


Рисунок 3 – Частотный импульс с минимальной эффективной длительностью преобразования Фурье

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Delta\omega} \frac{2}{\Delta f} \sin \frac{\pi f}{\Delta f} e^{i\omega t} d\omega = \frac{2}{\pi} \sqrt{2\alpha f_0} \frac{1}{1 - (2\alpha f_0 t)^2} \cos \frac{2\pi\alpha f_0}{2} t. \quad (13)$$

Таким образом, ИР канала с ПФ (11) будет определяться формулой:

$$g_{ж}(t) = \frac{\sin \pi f_0 t}{\pi f_0 t} \frac{1}{1 - (2\alpha f_0 t)^2} \cos \alpha \pi f_0 t. \quad (14)$$

На рис. 6 приведены графики ПФ $Q(f)$ при различных значениях $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,0625$; $\alpha_3 = 0,125$; $\alpha_4 = 0,25$; $\alpha_5 = 0,5$; $\alpha_6 = 1$, а на рис. 7 приведены соответствующие ИР.

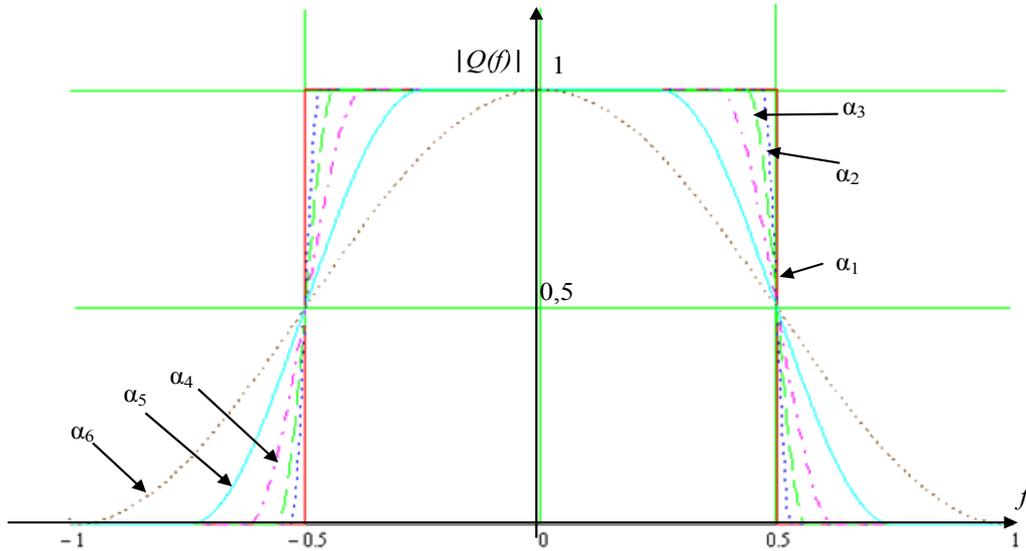


Рисунок 6 – Косинусквадратичные ПФ для различных значений α

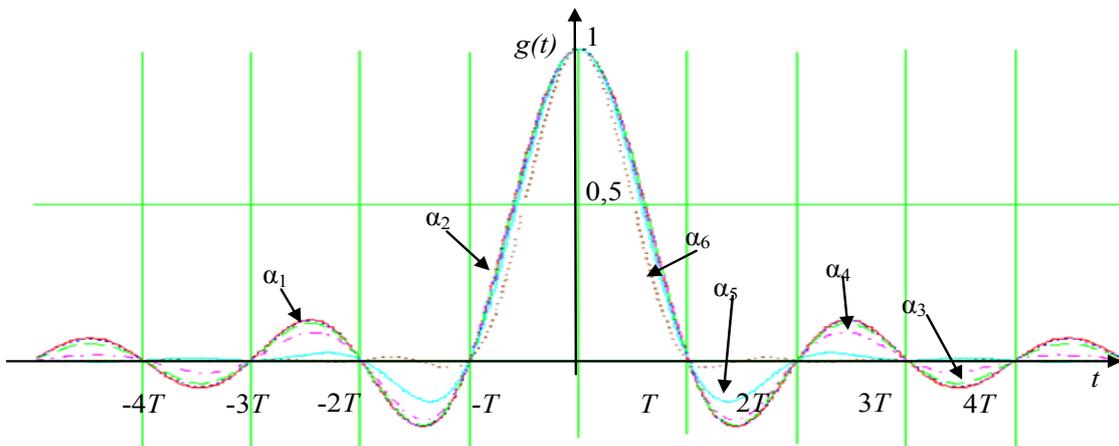


Рисунок 7 – Импульсные реакции каналов передачи с косинусквадратичной ПФ для различных значений α

Для удобства сравнения скорости затухания ИР при различных α , на рис. 8 приведены графики функции $A_\alpha = 10 \log \frac{g^2(0)}{g_\alpha^2(t)}$, где $g(0) = 1$, $g_\alpha(t)$ – определяется выражением (14).

ПФ с кососимметричными скатами, которая, как уже упоминалось выше, синтезируется путем свертки функции $\Psi(\omega) = 1$; $-\Delta\omega/2 \leq \omega < \Delta\omega/2$ и функции $P(\omega) = 1$; $-\omega_0/2 \leq \omega < \omega_0/2$, описывается выражением:

$$Q_{жс}(f) = \begin{cases} 1, & \text{при } |f| \leq (1-\alpha)\frac{f_0}{2}, \\ \frac{f_0(1+\alpha)}{2} - |f|\frac{1}{T_3}, & \text{при } (1-\alpha)\frac{f_0}{2} \leq |f| < (1+\alpha)\frac{f_0}{2}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (15)$$

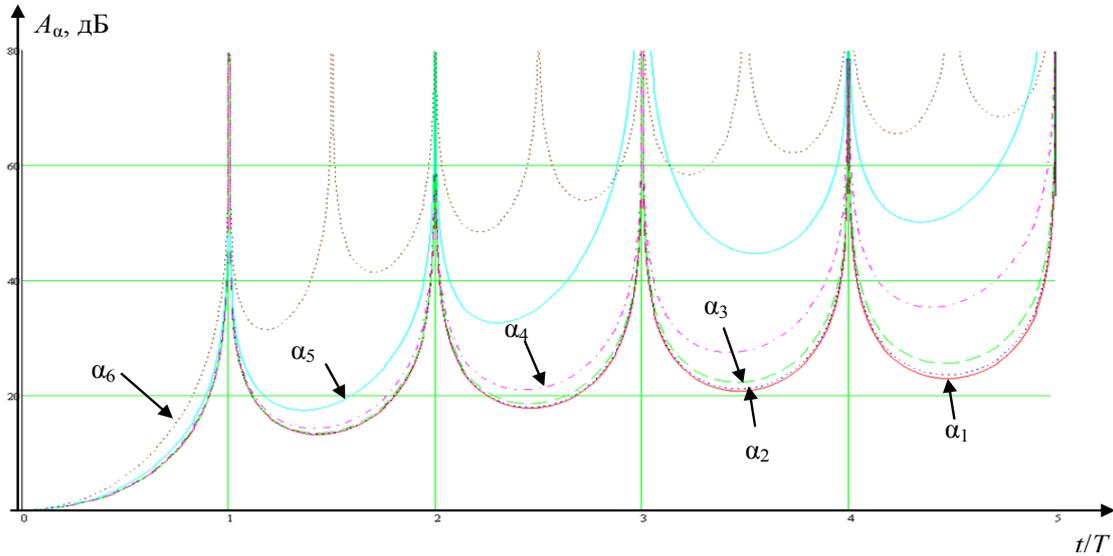


Рисунок 8 – Графики функции A_α при различных значениях α

Из рис. 8 видно, что, чем больше коэффициент расширения α , тем быстрее затухает соответствующая ИР.

Импульсная реакция $g(t)$ канала передачи с ПФ (15) определяется в соответствии с формулой (6):

$$g(t) = \frac{\sin(t\pi f_0)}{2\pi f_0 \frac{t}{2}} \cdot \frac{\sin(\alpha t\pi f_0)}{2\pi f_0 \alpha \frac{t}{2}}, \quad (16)$$

где первый множитель функция (12), а второй – функция (12) промасштабированная в α раз.

Графики характеристики затухания $A_\alpha = 10 \log \frac{g^2(0)}{g_\alpha^2(t)}$ приведены на рис. 9.

Рассмотрим синтез сигнала с квадратичными скатами. В результате свертки функции $\Psi(\omega) =$ треугольник, $-\Delta\omega/2 \leq \omega < \Delta\omega/2$ и функции $P(\omega) = 1, -\omega_0/2 \leq \omega < \omega_0/2$ получается функция с квадратичными скатами, описываемая выражением:

$$|Q(f)| = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq |f| < (1-\alpha)\frac{f_0}{2}, \\ \frac{2}{\Delta f^2} \left(|f| - \frac{\Delta f}{2} - \frac{f_0}{2} \right)^2, & \text{при } \frac{f_0}{2} \leq |f| < (1+\alpha)\frac{f_0}{2}, \\ 1 - \frac{2}{\Delta f^2} \left(|f| + \frac{T_3}{2} - \frac{f_0}{2} \right)^2, & \text{при } (1-\alpha)\frac{f_0}{2} \leq |f| < \frac{f_0}{2}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (17)$$

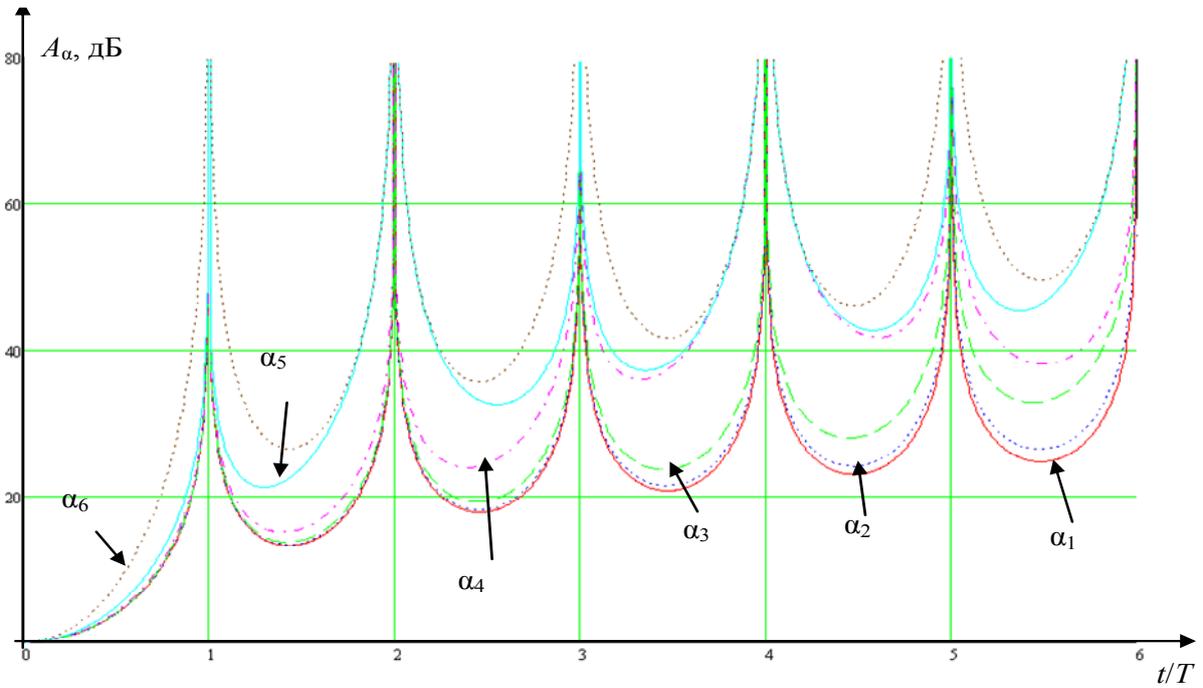


Рисунок 9 – Графики функции A_α при различных значениях α

Импульсная реакция $g(t)$ канала передачи с квадратичной ПФ будет определяться формулой:

$$g(t) = \frac{\sin(\pi f_0 t)}{2\pi f_0 \frac{t}{2}} \cdot \left(\frac{\sin(2\pi \Delta f \frac{t}{4})}{2\pi \Delta f \frac{t}{4}} \right)^2. \quad (18)$$

График характеристики затухания $A_\alpha = 10 \log \frac{g^2(0)}{g_\alpha^2(t)}$ для (18) приведен на рис. 10.

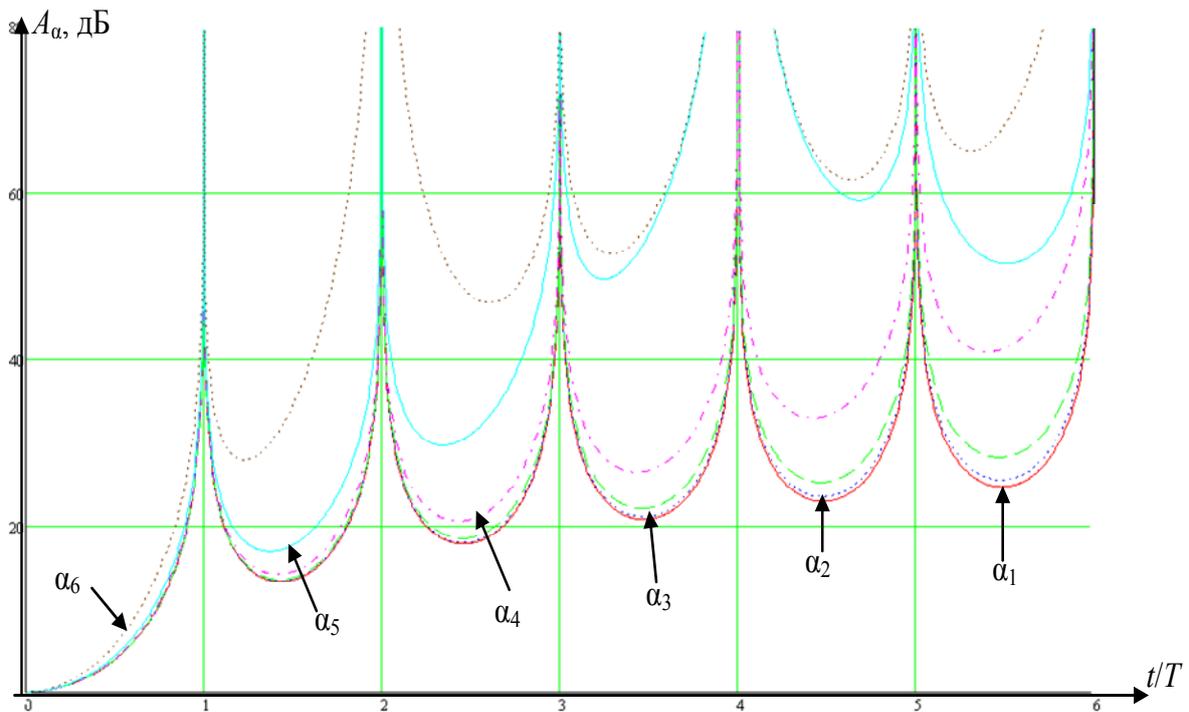


Рисунок 10 – Графики функции A_α при различных значениях α

Для сравнения характеристик синтезированных найквистовых функций с косинусквадратичными – A_1 , кососимметричными – A_2 и квадратичными – A_3 скатами эти функции построены на одном графике (рис. 11) при коэффициентах ската $\alpha = 0,5$ и $\alpha = 1$.

Из анализа рисунков следует, что наиболее быстро затухает ИР канала, соответствующая ПФ вида «приподнятый косинус», что и предопределило ее широкое применение в системах передачи.

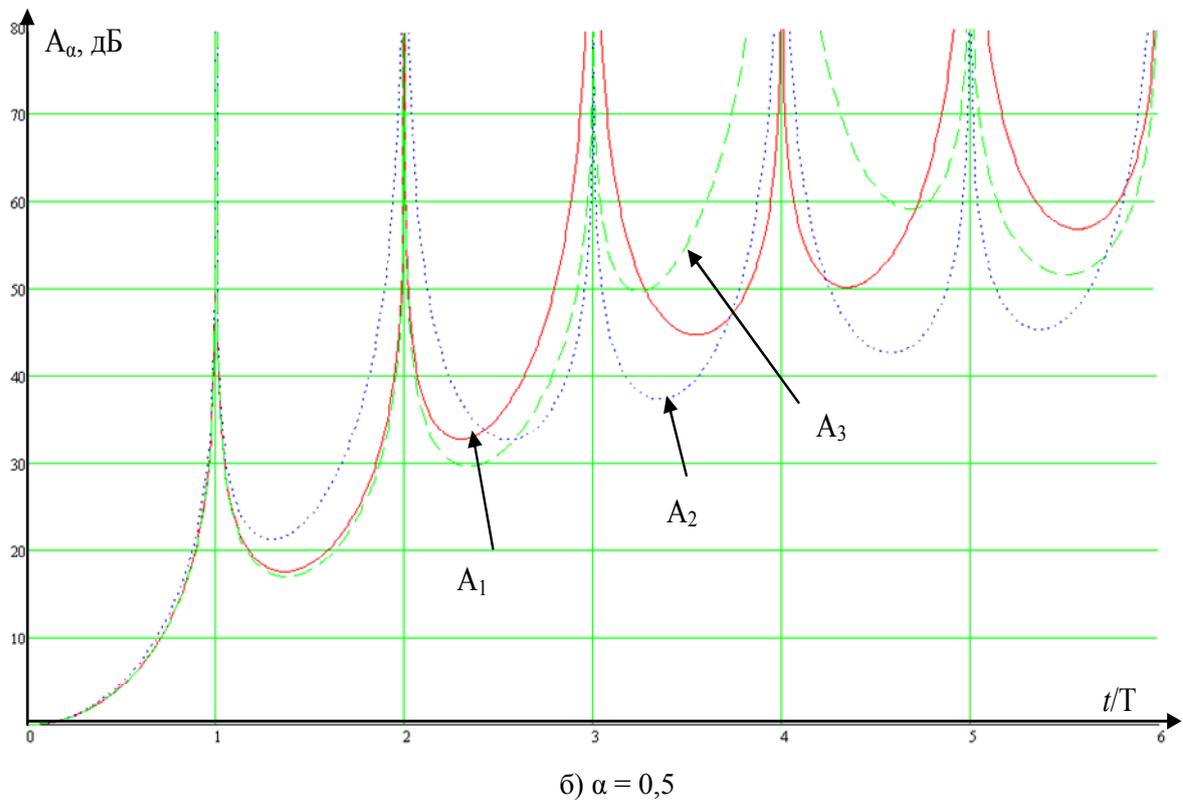
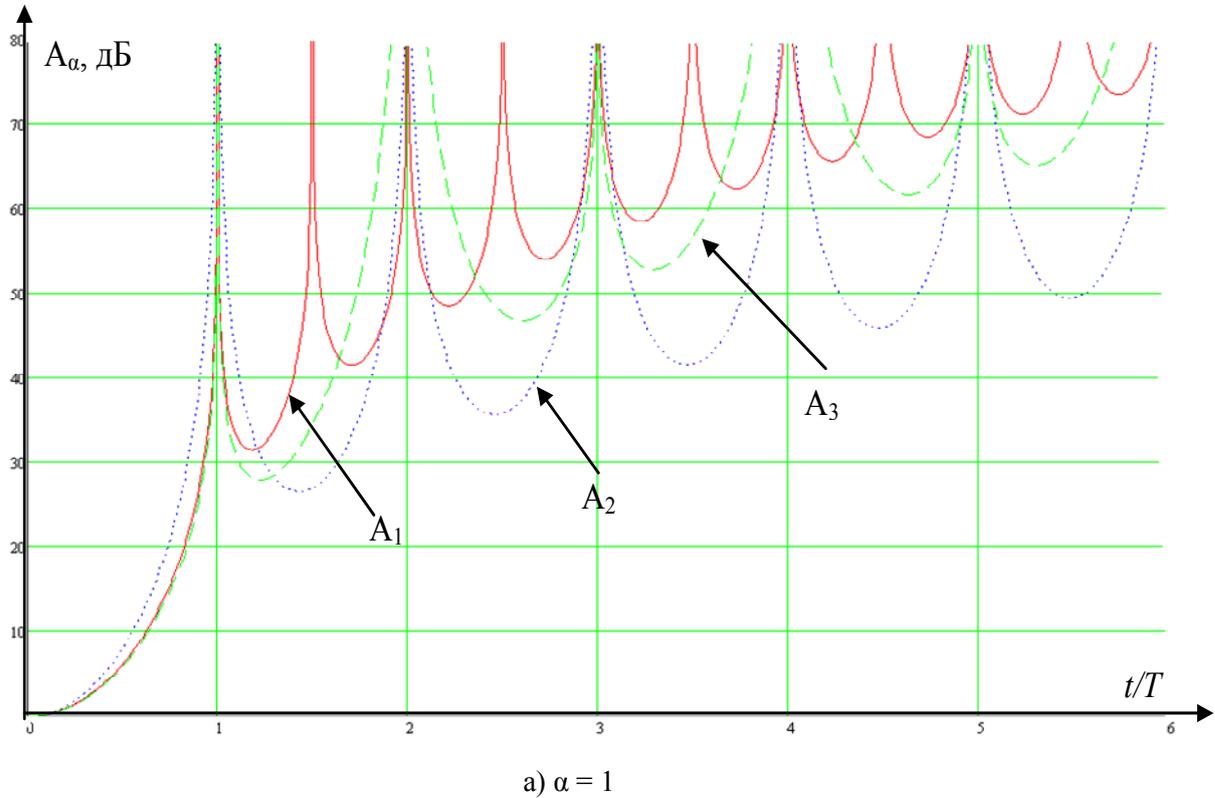


Рисунок 11 – Графики функции A_α при $\alpha = 1$ (а) и $\alpha = 0,5$ (б).

Рисунки также отражают зависимость скорости затухания ИР от значения коэффициента ската α .

В заключение можно сказать следующее. В статье сформулирован общий метод синтеза ПФ каналов передачи, удовлетворяющих критерию Найквиста. На основе сформулированного метода синтезированы широко распространенные ПФ каналов связи: косинус-квадратичная («приподнятый косинус»), кососимметричная и квадратичная. Показано, что широко распространенная передаточная функция вида «приподнятый косинус», соответствует критерию максимальной концентрации энергии ее преобразования Фурье (импульсной реакции канала передачи) в конечном интервале времени.

Литература

1. *Захарченко Н.В.* Основы передачи дискретных сообщений: учеб. пособ. для вузов/ Захарченко Н.В., Нудельман П.Я., Кононович В.Г. – М.: Радио и связь, 1990. – 240 с.: ил.
2. *Джон К. Беллами.* Цифровая телефония, пер.с англ./ Д.К.Беллами; под ред. А.Н. Борлина, Ю.Н.Чернышова. – М.: Эко-Трендз, 2004. – 640 с.:ил.
3. *Прокис Джон.* Цифровая связь; пер.с англ /под ред. Д.Д.Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.: ил.
4. *Скляр Бернад.* Цифровая связь: Теоретические основы и практическое применение/ [2-е изд., испр]; пер.с англ/ Б. Скляр. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.:ил.