УДК 621.371:621.372

Дмитриева И.Ю.
Дмитрієва І.Ю.
Dmitrieva I.Yu.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ВОЗБУЖДЕННОЙ СРЕДЫ

РІШЕННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ЗБУДЖЕНОГО СЕРЕДОВИЩА

SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL MAXWELL EQUATIONS' SYSTEM IN THE CASE OF AN INHOMOGENEOUS EXCITED MEDIUM

Аннотация. Получено аналитическое решение системы дифференциальных уравнений Максвелла для произвольной изотропной линейной неоднородной возбужденной среды. Исследование проведено с помощью построения обратного матричного оператора, как векторного, так и скалярного, и реализовано на уровне полной диагонализации исходной системы. Данное эквивалентное преобразование сводит изучаемую систему к единому скалярному дифференциальному уравнению в частных производных относительно компонент искомых вектор-функций напряженностей электромагнитного поля.

Полученное уравнение является обобщенным волновым и решается эффективно применением метода интегральных преобразований по всем пространственным переменным, не затрагивая аргумент времени.

Анотація. Одержано аналітичне рішення системи диференціальних рівнянь Максвелла для довільного ізотропного лінійного неоднорідного збудженого середовища. Дослідження проведено за допомогою побудови оберненого матричного оператора як векторного, так і скалярного, та реалізовано на рівні повної діагоналізації вихідної системи. Дане еквівалентне перетворення зводить вивчену систему до єдиного скалярного диференціального рівняння у частинних похідних відносно компонент шуканих вектор-функцій напруженостей електромагнітного поля.

Одержане рівняння є узагальненим хвильовим та розв'язується ефективно застосуванням методу інтегральних перетворень з усіх просторових змінних, не зачіпаючи аргумент часу.

Summary. The analytic solution of the differential Maxwell equations' system is got in the case of an arbitrary isotropic linear inhomogeneous excited medium. The investigation is done by means of the inverse matrix operator's construction, either vector, or scalar, and is executed at the stage of complete diagonalization of the initial system. The given equivalent transformation reduces the studied system to the unified scalar partial differential equation with respect to the components of the sought-for vector functions that describe the electromagnetic field tensions.

The obtained equation is the generalized wave and is solved effectively by the application of integral transform method. The latter operates on all spatial variables and does not affect the temporal argument.

Известно, что всякая вектор-функция представляет собой математическую модель некоторого векторного поля. И, наоборот, каждое векторное поле аналитически описывается определенной вектор-функцией [1]. Таким образом, между теми и другими существует взаимно однозначное соответствие.

В свою очередь, аналитический поиск неизвестной вектор-функции означает определение в явном виде всех ее координатных компонент, которые могут быть как скалярными, так и векторными, в зависимости от требований исходной постановки задачи.

Хорошо известно, что большинство конкретных инженерных и физических процессов в технической и классической электродинамике описывается системами дифференциальных уравнений, где неизвестными являются соответствующие вектор-функции напряженностей электромагнитного поля [2, 3], поэтому вышеуказанное нахождение искомых координатных компонент является первостепенным при решении данных систем, а значит, и при аналитическом исследовании того или иного природного явления.

Практически, последний момент означает сведение исходной векторной задачи к эквивалентной совокупности скалярных уравнений, каждое из которых содержит ровно один из вышеупомянутых неизвестных координатных элементов. Такое преобразование называется диагонализацией и осуществляется различными [4…11] методами. Результаты [4…11] по вопросам диагонализации систем операторных уравнений, причем необязательно дифференциальных и линейных [10], при своем формировании изначально были рассчитаны для использования прикладниками и инженерами, владеющими лишь основным курсом высшей математики технического университета. При этом математическая корректность предложенных методов [4…11] не нарушалась, а лишь существенно упрощался для понимания и реализации алгоритм диагонализации, приводящий исходную систему к требуемой совокупности скалярных уравнений. Так, работы [4…10] посвящены операторному аналогу алгебраического метода Гаусса [12], и единственным ограничением на матричные элементы исследуемой системы являются их попарная коммутативность и обратимость. Предложенный процесс диагонализации не зависит ни от структуры матрицы, ни от граничных и начальных условий, что существенно расширяет сферу его применимости.

В дальнейшем замечено, что на некоторых этапах диагонализации можно использовать комбинированный метод, включающий построение обратного матричного оператора [11]. Предложенный подход не выходит за рамки простейшего курса линейной алгебры, остается по-прежнему доступным для прикладников и инженеров, существенно сокращая при этом объем вычислений на заключительном «покоординатном» уровне диагонализации. Кроме того, насколько известно, такой операторный аналог при решении систем дифференциальных уравнений относительно вектор-функций ранее не рассматривался.

Результаты указанной статьи [11] посвящены изучению симметричной системы дифференциальных уравнений Максвелла для произвольной изотропной однородной линейной возбужденной среды. Этот объект впервые рассмотрен в работе [6] и связан с таким важным разделом технической электродинамики, как теория многомерных аналоговых цепей [2, 3].

Однако, поскольку более важным и востребованным с точки зрения применимости в технической и классической электродинамике являются все же неоднородные среды [13, 14], то возникает естественная необходимость их исследования, и в первую очередь, простыми, краткими и аналитически строгими методами.

Поэтому *целью настоящей статьи является решение симметричной системы дифференциальных уравнений Максвелла для произвольной <u>неоднородной</u> изотропной линейной возбужденной среды с помощью построения соответствующих обратных матричных операторов.*

Предложенный новый метод существенно сокращает прежнюю процедуру диагонализации [4…10], оставаясь при этом доступным в конкретном инженерно-прикладном применении, а также математически корректным.

Прежде чем перейти к непосредственному изложению, следует отметить, что нижеприведенные результаты вкратце анонсированны в [15].

1. Постановка задачи. Пусть задана симметричная система дифференциальных уравнений Максвелла для произвольной неоднородной изотропной линейной возбужденной среды:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{H} = (\sigma \pm \lambda\varepsilon_a)\vec{E} + \varepsilon_a \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\,CT} \\ -\operatorname{rot}\vec{E} = (r \pm \lambda\mu_a)\vec{H} + \mu_a \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{e}^{\,CT}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$, $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ – искомые вектор функции со скалярными компонентами $E_\text{k} = E_\text{k}(x, y, z, t)$, $H_\text{k} = H_\text{k}(x, y, z, t)$ $(\text{k} = \overline{1,3})$ обозначают напряженности электрического и магнитного полей соответственно; $\sigma = \sigma(x, y, z), \mu_a = \mu_a(x, y, z), \varepsilon_a = \varepsilon_a(x, y, z)$ - удельная проводимость, абсолютная магнитная и диэлектрическая проницаемость неоднородной среды. Легко заметить, что в отличие от общепринятого случая, когда $\sigma, \mu_a, \varepsilon_a = \text{const} > 0$ [6], в данной постановке задачи рассматриваются соответствующие функции, зависящие от пространственных координат (x, y, z) и характеризующие неоднородность изучаемых сред. Функциональный класс $\sigma, \mu_a, \varepsilon_a$ фиксируется конкретной постановкой исходной инженерно-прикладной задачи. Далее, $\lambda = \text{const} > 0$, – параметр воздействующего на среду сигнала. При этом, как и ранее в статьях [6, 11], предшествующее λ чередование знака означает реакцию среды на данный сигнал. Именно, «плюс» означает поглощение, «минус» – отторжение. Кроме того, для сохранения единообразия формы при обобщении постановки задачи [6, 11] для неоднородного случая, прежняя теоретическая постоянная $r > 0$ также предполагается известной. Наконец, $\vec{j}^{CT} = \vec{j}^{CT}(x, y, z, t)$, $\vec{e}^{CT} = \vec{e}^{CT}(x, y, z, t)$ – заданные вектор-функции со скалярными компонентами $j_k^{CT} = j_k^{CT}(x, y, z, t)$, $e_k^{CT} = e_k^{CT}(x, y, z, t)$ ($i = \overline{1,3}$), характеризующие сторонние токи и напряжения.

Все скалярные элементы, в том числе и координатные компоненты, принадлежащие $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{j}^{CT}$, $\vec{e}^{CT}$, являются четырежды непрерывно дифференцируемыми функциями на одном и том же подмножестве пространства (x, y, z) либо (x, y, z, t) соответственно, что объясняется дифференциальной структурой (1).

Ставится вопрос о конструктивном аналитическом решении системы (1) безотносительно начальных либо граничных условий. Предлагаемый метод осуществляется в два этапа: 1) построением двух матричных операторов, сводящих (1) к единому скалярному уравнению относительно неизвестных компонент E_k, H_k $(k = \overline{1,3})$; 2) решением полученного уравнения в явном виде общим методом интегральных преобразований, не зависящим также от краевой постановки исходной задачи и, насколько известно из литературы, впервые предложенным в статье [16].

2. Диагонализация системы (1) посредством построения обратных матричных операторов. Учитывая структуру системы (1) и опыт предыдущих исследований [6, 7, 9], можно заведомо утверждать, что диагонализация осуществляется в две стадии – по блокам и по координатам. На каждой из этих двух стадий строится единое уравнение: в первом случае – векторное относительно $\vec{E}$ и $\vec{H}$ одновременно, а во втором – общее волновое скалярное, объединяющее в себе все координатные компоненты E_k, H_k $(k = \overline{1,3})$.

Принимая во внимание вышесказанное, первоочередным является построение обратного матричного оператора, диагонализирующего изучаемую систему на векторном уровне. С этой целью (1) записывается в новой эквивалентной блочно-векторной форме:

$$\begin{cases} -C\vec{F}_1 + A\vec{F}_2 = \vec{f}_1 \\ -A\vec{F}_1 - D\vec{F}_2 = \vec{f}_2, \end{cases} \tag{2}$$

где введены символы дифференциальных операторов

$$C = \sigma + \varepsilon_a \partial_0^*;\ D = r + \mu_a \partial_0^*;\ \partial_0^* = \partial_0 \pm \lambda;\ \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t};\ A = \mathrm{rot}, \tag{3}$$

а также искомых и заданных вектор-функций

$$\vec{F}_1 = \vec{E};\quad \vec{F}_2 = \vec{H};\quad \vec{f}_1 = \vec{j}^{CT};\quad \vec{f}_2 = \vec{e}^{CT}. \tag{4}$$

Применяя матричную форму записи [12] и учитывая формулы (3), (4), система (2) представляется как векторное уравнение

$$M\vec{F} = \vec{f}, \tag{5}$$

где M – это операторная матрица вида

$$M = \begin{bmatrix} -C & A \\ -A & -D \end{bmatrix}, \tag{6}$$

а соответствующие искомая и заданная вектор-функции выглядят так

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{bmatrix},\quad \vec{f} = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Для диагонализации системы (1) на блочном уровне, а значит, и эквивалентного ей векторного уравнения (5)…(7), строится обратный матричный оператор M^{-1} по отношению M из формулы (6). Построение M^{-1} осуществляется известными методами теории матриц [12] и приводит к следующему результату

$$M^{-1} = (\det M)^{-1} \begin{bmatrix} -D & -A \\ A & -C \end{bmatrix}. \tag{8}$$

В (8): $(\det M)^{-1}$ означает обратный дифференциальный оператор по отношению к определителю матрицы M – $\det M$, который задается следующим выражением

$$\det M = A^2 + CD = \mathrm{rot}^2 + \widetilde{\partial}_0^2 = \mathrm{grad\,div} - \Delta + \widetilde{\partial}_0^2, \tag{9}$$

а операторы $\Delta, \widetilde{\partial}_0^2$ в правой части (9) выглядят так:

$$\Delta = \sum_{\kappa=1}^{3} \partial_\kappa^2;\ \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}; \tag{10}$$

$$\widetilde{\partial}_0^2 = CD = (\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*)(r + \mu_a \partial_0^*) = \mu_a \varepsilon_a (\partial_0^*)^2 + (\sigma\mu_a + r\varepsilon_a)\partial_0^* + r\sigma. \tag{11}$$

Применение обратного оператора M^{-1}, заданного формулами (8)…(11), к векторному уравнению (5)…(7), преобразует его в единое скалярно-векторное уравнение, завершающее диагонализацию исходной системы (1) на блочном этапе. Именно,

$$M^{-1}(M\vec{F}) = M^{-1}\vec{f} \Leftrightarrow \vec{F} = M^{-1}\vec{f} \Leftrightarrow \vec{F} = (\det M)^{-1}\begin{bmatrix} -D & -A \\ A & -C \end{bmatrix}\vec{f} \Leftrightarrow (\det M)\vec{F} = \begin{bmatrix} -D & -A \\ A & -C \end{bmatrix}\vec{f}.$$

Принимая во внимание обозначения (7), (9), последнее выражение можно записать в эквивалентной форме

$$(A^2 + CD)\vec{F} = \begin{bmatrix} -D\vec{f}_1 - A\vec{f}_2 \\ A\vec{f}_1 - C\vec{f}_2 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Уравнение (12) полностью согласуется с ранее полученными результатами работы [6], где диагонализация системы (1) осуществлялась для однородной возмущенной среды более громоздким операторным аналогом алгебраического метода Гаусса [12].

Переходя к диагонализации (1) на координатном уровне, векторное уравнение (12) следует переписать в виде соответствующей системы, используя формулы (3), (9). Указанное преобразование подробно осуществлено в статье [6] для однородной среды, базируется на повторной операции классической теории поля grad div [1], остается неизменным в неоднородном случае и приводит (12) к следующей системе уравнений относительно скалярных компонент искомых вектор-функций $\vec{F}_i\ (i = 1,2)$ из (7)

$$\begin{cases} A_{23}F_{i1} - B_{12}F_{i2} - B_{13}F_{i3} = f_{i1} \\ -B_{12}F_{i1} + A_{13}F_{i2} - B_{23}F_{i3} = f_{i2} \\ -B_{13}F_{i1} - B_{23}F_{i2} + A_{12}F_{i3} = f_{i3} \end{cases} \quad (i = 1,2). \tag{13}$$

В (13)

$$F_{ik} = F_{ik}(x,y,z,t),\ \vec{F}_i = \begin{bmatrix} F_{i1} \\ F_{i2} \\ F_{i3} \end{bmatrix}\ (i = 1,2);\ f_{ik} = f_{ik}(x,y,z,t),\ \vec{f}_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ f_{i3} \end{bmatrix} (i = 1,2;\ k = \overline{1,3}); \tag{14}$$

матричные операторные элементы выглядят так

$$B_{jk} = \partial_j \partial_k \quad (j \neq k;\ j,k = \overline{1,3});\quad A_{jk} = \Delta - \partial_l^2 - \widetilde{\partial}_0^2 \quad (l \neq j,k;\ j \neq k;\ k,l = \overline{1,3}), \tag{15}$$

а остальные обозначения в (14), (15) приняты ранее в (7), (10) соответственно.

Записывая далее систему (13)…(15) в матричной форме [12]

$$KF_i = f_i \quad (i = 1,2), \tag{16}$$

где $F_i, f_i\ (i = 1,2)$ – из (14), а

$$K = \begin{bmatrix} A_{23} & -B_{12} & -B_{13} \\ -B_{12} & A_{13} & -B_{23} \\ -B_{13} & -B_{23} & A_{12} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

и применяя результаты статьи [11] по построению обратного матричного оператора со скалярными компонентами для однородной среды, получаем обратный по отношению к (17) оператор K^{-1}:

$$K^{-1} = (\widetilde{\partial}_0^2(\widetilde{\partial}_0^2 - \Delta))^{-1} \begin{bmatrix} \partial_1^2 - \widetilde{\partial}_0^2 & \partial_1\partial_2 & \partial_1\partial_3 \\ \partial_1\partial_2 & \partial_2^2 - \widetilde{\partial}_0^2 & \partial_2\partial_3 \\ \partial_1\partial_3 & \partial_2\partial_3 & \partial_3^2 - \widetilde{\partial}_0^2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Воздействие (18) на обе части матричного уравнения (16) приводит к требуемым значениям $F_i \ (i = 1,2)$ из (7):

$$F_i = \begin{bmatrix} F_{i1} \\ F_{i2} \\ F_{i3} \end{bmatrix} = K^{-1} f_i \Leftrightarrow F_i = (\widetilde{\partial}_0^2(\widetilde{\partial}_0^2 - \Delta))^{-1} \begin{bmatrix} \partial_1^2 - \widetilde{\partial}_0^2 & \partial_1\partial_2 & \partial_1\partial_3 \\ \partial_1\partial_2 & \partial_2^2 - \widetilde{\partial}_0^2 & \partial_2\partial_3 \\ \partial_1\partial_3 & \partial_2\partial_3 & \partial_3^2 - \widetilde{\partial}_0^2 \end{bmatrix} f_i \quad (i = 1,2), \quad (19)$$

где известные функции $f_i \ (i = 1,2)$ заданы в (4), (7).

Как уже ранее отмечено в [11], несложно проверить, что (19) полностью согласуется с аналогичным результатом работы [6] для однородной среды, оставаясь при этом инвариантным по своей форме и для обобщающего неоднородного случая.

Действительно, переписывая (19) эквивалентным образом

$$\widetilde{\partial}_0^2(\widetilde{\partial}_0^2 - \Delta) \begin{bmatrix} F_{i1} \\ F_{i2} \\ F_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial_1^2 - \widetilde{\partial}_0^2) f_{i1} + \partial_1(\partial_2 f_{i2} + \partial_3 f_{i3}) \\ (\partial_2^2 - \widetilde{\partial}_0^2) f_{i2} + \partial_2(\partial_1 f_{i1} + \partial_3 f_{i3}) \\ (\partial_3^2 - \widetilde{\partial}_0^2) f_{i3} + \partial_3(\partial_1 f_{i1} + \partial_2 f_{i2}) \end{bmatrix} \quad (i = 1,2), \quad (20)$$

приходим к единому скалярному уравнению относительно координатных компонент искомых вектор-функций электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}$, но уже для произвольной <u>неоднородной</u> возбужденной изотропной линейной среды:

$$\widetilde{\partial}_0^2(\widetilde{\partial}_0^2 - \Delta) F_{ij} = f_{ij}^* \quad (i = 1,2;\ j = \overline{1,3}). \quad (21)$$

В (21) $F_{ij}, f_{ij} \ (i = 1,2;\ j = \overline{1,3})$ – из (14); а известные функции $f_{ij}^* = f_{ij}^*(x, y, z, t) \ (i = 1,2;\ j = \overline{1,3})$ в терминах (20) выглядят так

$$f_{ij}^\bullet = (\partial_j^2 - \widetilde{\partial}_0^2) f_{ij} + \partial_j(\partial_k f_{ik} + \partial_l f_{il}) \ \ (k, l \neq j;\ k \neq l;\ k, l, j = \overline{1,3};\ i = 1,2). \quad (22)$$

Таким образом, первый шаг по конструктивному решению системы (1) завершен, поскольку единое скалярное уравнение относительно компонент $E_k, H_k \ (k = \overline{1,3})$ получено в явном виде и отражено в формулах (21), (22).

3. Решение единого обобщенного волнового скалярного уравнения для неоднородной среды. Очевидно, что в общем виде уравнение (21), (22) можно записать так:

$$\widetilde{\partial}_0^2(\widetilde{\partial}_0^2 - \Delta) F = f, \quad (23)$$

где $F = F(x, y, z, t)$ и $f = f(x, y, z, t)$ – искомая и заданная скалярные функции, соответственно четырежды – и дважды – непрерывно дифференцируемые в пространстве (x, y, z, t).

Конструктивное исследование (23) является вторым, заключительным этапом по изучению в явном виде системы (1) безотносительно конкретно поставленных краевых условий.

Принимая во внимание неоднородный, достаточно общий характер рассматриваемых сред, предложенный здесь метод решения уравнения (23) является существенным обобщением работ [6, 16] и распространяется на более широкий класс прикладных задач. При этом внешняя, математическая форма применения данного метода остается прежней, как в [16]. Изменяется в сторону расширения приложений только внутреннее, физическое и инженерное содержание исходных предположений и постановок. Последнее утверждение позволяет описать ход решения уравнения (21)…(23) фрагментарно, опираясь на результаты работы [16] и обобщая их для неоднородных возбужденных изотропных линейных сред.

Продолжая тенденцию работ [4…11], [16], конструктивное исследование (21)…(23) проводится безотносительно начальных и граничных условий, допуская лишь естественную корректную постановку исходной краевой задачи. Последнее означает реальное существование искомой общей вектор-функции $\vec{F}$ из (7), (14), как для изучаемого природного процесса, так и для порожденной им правильно построенной математической модели и сформулированной краевой задачи.

Предположим, что конкретная краевая задача для уравнения (21),…,(23) корректна, т.е. неизвестная вектор-функция $\vec{F}_i\ (i=1,2)$ (7), (14) со всеми своими компонентами гарантировано существует, как и в [16]. Тогда применяется требуемое единое многомерное интегральное преобразование [17] по всем пространственным переменным (x,y,z) одновременно либо соответствующее скалярное по каждой из них [18]. В результате указанной операции приходим к трансформантам [17, 18] неизвестной и заданной функций из (21),…,(23) ${}_{TP}F_{ij}(t,q)={}_{TP}F_{ij}$ и ${}_{TP}f_{ij}(t,q)={}_{TP}f_{ij}$ $(i=1,2;\ j=\overline{1,3})$ соответственно, где q – множество параметров примененного интегрального преобразования.

Само же исходное дифференциальное уравнение в частных производных (21),…,(23) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно аргумента времени t и выглядит так:

$$(\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\left(\frac{d}{dt}\pm\lambda\right)^2+(\tilde{\sigma}\tilde{\mu}_a+r\tilde{\varepsilon}_a)\left(\frac{d}{dt}\pm\lambda\right)+r\tilde{\sigma}-\Delta_{TP})\,{}_{TP}F_{ij}={}_{TP}f_{ij}\quad (i=1,2;\ j=\overline{1,3}),\qquad (24)$$

где нижние левые индексы «ТР» и верхние «тильды» обозначают трансформанты соответствующих объектов, а «квадрат» дифференциального оператора, как и ранее, означает последовательное повторное операторное применение.

Поскольку (24) по своей внешней форме остается таким же, как в [16], – обыкновенным дифференциальным неоднородным линейным уравнением с постоянными коэффициентами [19], ход решения из статьи [16] полностью сохраняется. Так, корни характеристического многочлена [19] для (24) аналогичны [16]:

$$\omega_{1,2}=\frac{1}{2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a}(-((\tilde{\sigma}\tilde{\mu}_a+r\tilde{\varepsilon}_a)\pm 2\lambda\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a)\pm\sqrt{(\tilde{\sigma}\tilde{\mu}-r\tilde{\varepsilon}_a)^2+4\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\Delta_{TP}})\qquad (25)$$

и порождают искомую трансформанту – решение уравнения (24) [16]:

$${}_{TP}F_{ij}=\frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)+i(\kappa_1-\kappa_2)}(e^{\omega_1 t}\int(e^{-\omega_1 t}\,{}_{TP}f^*_{ij})dt-e^{\omega_2 t}\int(e^{-\omega_{21}t}\,{}_{TP}f^*_{ij})dt)\ \ (i=1,2;\ j=\overline{1,3}),\qquad (26)$$

где ${}_{TP}f^*_{ij}$ $(i=1,2;\ j=\overline{1,3})$ – трансформанта заданной функции (14), (22); величины $\omega_{1,2}$ описаны в (25), а $\gamma_m=\operatorname{Re}\omega_m$ и $\kappa_m=\operatorname{Im}\omega_m$ $(m=1,2)$ – их действительная и мнимая части соответственно.

Применяя необходимое обратное преобразование [17, 18] по отношению к первоначальному интегральному, переходим от полученной трансформанты (26) к ее искомому оригиналу F_{ij} $(i=1,2;\ j=\overline{1,3})$, (7), (14).

Таким образом, уравнение (21)…(23) действительно решено в явном виде, и конечная цель данной работы полностью достигнута, так как найденные скалярные функции являются компонентами искомых векторных функций. Последние описывают напряженности электромагнитного поля для произвольной неоднородной изотропной линейной возбужденной среды, аналитически заданной системой дифференциальных уравнений Максвелла (1).

Литература

1. *Ильин В.А.* Основы математического анализа. Часть 2 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
2. *Иваницкий А.М.* Основы теории многомерных аналоговых и дискретных цепей / Иваницкий А.М. – Одесса: ОНАС, 2003. – 38 с.

3. *Иваницкий А.М.* Зависимость третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух уравнений при произвольном возбуждении электромагнитного поля / А.М. Иваницкий // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – № 2. – С. 3 – 7.
4. *Иваницкий А.М.* Сведение классической системы уравнений Максвелла к скалярным уравнениям относительно компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева, М.В. Рожновский // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2006. – № 1. – С. 37 – 47.
5. *Иваницкий А*.М. Сведение «полной» системы дифференциальных уравнений Максвелла к скалярным уравнениям относительно компонент вектор функций $\vec{F} = \{F_i\}_{i=1}^{6}$ / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева, М.В. Рожновский // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2006. – № 2. – С. 11 – 23.
6. *Иваницкий А.М.* Диагонализация «симметричной» системы дифференциальных уравнений Максвелла / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2007. – № 1. – С. 15 – 24.
7. *Dmitrieva I.Yu.* Diagonalization of the differential operator matrix in the case of the multidimensional circuits / I.Yu. Dmitrieva, A.M. Ivanitckiy // Scient. Works of ONAT after A.S. Popov. – 2009. – № 1. – P. 36 – 51.
8. *Дмитриева И.*Ю. Математическая модель численной реализации диагонализационной задачи в случае многомерных аналоговых цепей / И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2010. – № 1. – С. 78 – 84.
9. *Dmitrieva I.* Diagonalization problems in the classical Maxwell theory and their industrial applications / I. Dmitrieva // Proc. of the International Conf. ENEC 2008 (Econophysics, Complexity, etc.), Bucharest. – Bucharest: Victor Publishing House, 2008. – Vol. 1. – P. 11 – 23.
10. *Dmitrieva I.* Operator diagonalization procedure and its numerical realization in the framework of technical electrodynamics / I.Dmitrieva // Proc. of the International Conf. ENEC 2009 (Econophysics, Complexity, etc.), Bucharest. – Bucharest: Victor Publishing House, 2010. – Vol. 3. – P. 291 – 300.
11. *Дмитриева И.*Ю. Построение обратного матричного оператора для симметричной системы дифференциальных уравнений Максвелла / И.Ю. Дмитриева // Праці Одес. політехн. ун-ту. – 2011. – Вип. 1(35). – С. 180 – 184.
12. *Курош А.*Г. Курс общей алгебры / Курош А.Г. – М.: Наука, 1975. – 432 с.
13. *Пименов Ю.*В. Техническая электродинамика / Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. – М.: Радио и связь, 2002. – 536 с.
14. *Максвелл Дж. К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Максвелл Дж. К. – М.: Госуд. изд. технико-теоретич. литер., 1954. – 687 с.
15. *Dmitrieva I.* On the explicit solution of the generalized differential Maxwell system / I. Dmitrieva // 7th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2011), July 18 – 22, 2011, Vancouver, Canada. – Book of Abstracts. – P. 163.
16. *Дмитриева И.*Ю. Решение обобщенного волнового уравнения / И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2009. – № 2. – С. 68 - 72.
17. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten / J. Radon // Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig. – 1917. – Bande 29. – S. 262 - 277.
18. *Трантер К.Дж.* Интегральные преобразования в математической физике / Трантер К.Дж. – М.: ИЛ, 1956. – 403 с.
19. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Камке Э. – М.: Наука, 1976. – 576 с.