

**МОДЕЛЬ ЖИДКОСТРУЙНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ С КРУГОВЫМ  
ЩЕЛЕВЫМ СОПЛОМ В ВИДЕ СООСНЫХ ДИСКОВ****МОДЕЛЬ РІДИННОСТРУМИННОГО ВИПРОМІНЮВАЧА  
З КОЛОВИМ ЩІЛИННИМ СОПЛОМ У ВИГЛЯДІ СПІВВІСНИХ ДИСКІВ****MODEL HYDRODYNAMIC RADIATOR  
WITH THE CIRCULAR GAP NOZZLE AS DISKS**

**Аннотация.** Рассмотрены особенности генерирования акустических волн жидкоструйным излучателем со ступенчатым препятствием и круговым щелевым соплом в виде соосных дисков. Предложена физическая модель такого устройства на основе автоколебаний затопленной плоской осесимметричной струи жидкости. Проведено сопоставление теоретических и экспериментальных результатов.

**Анотація.** Розглянуті особливості генерації акустичних хвиль рідинноструминним випромінювачем із східчастою перешкодою й коловим щілинним соплом у вигляді співвісних дисків. Запропоновано фізичну модель такого пристрою на основі автоколиваний зануреного плоского осесимметричного струменя рідини. Проведено зіставлення теоретичних і експериментальних результатів.

**Summary.** The features of acoustic wave generation by a hydrodynamic radiator with the step obstacle and circular gap nozzle as disks are considered. A physical model based on self-oscillations of the flooded plane axisymmetric liquid jet. Theoretical results are compared with the experimental ones.

В информационной гидроакустике важной проблемой является проблема увеличения дальности действия передающей аппаратуры. Для решения этой проблемы перспективно использовать рупорные излучающие антенны, элементами которых являются низкочастотные (0,3...6 кГц) осесимметричные жидкоструйные преобразователи со ступенчатым препятствием [1]. К достоинствам преобразователей такого типа следует отнести: возможность генерировать интенсивный акустический сигнал в широком диапазоне избыточных статических давлений (на глубине моря от 10 до 240 м), малые габариты и массу, а также их простоту в эксплуатации. Раньше для прямого жидкоструйного преобразователя была разработана математическая модель колебаний струйной цилиндрической оболочки, что позволило получить аналитическое выражение для расчета частоты основной гармоник генерируемого сигнала, а также для расчета амплитудно-частотных характеристик излучателя [2, 3]. Однако, судя по отсутствию соответствующих публикаций, до сих пор не разрабатывалась математическая модель для жидкоструйного преобразователя со ступенчатым препятствием и круговым щелевым соплом в виде соосных дисков [4]. Особенность такого модифицированного гидродинамического излучателя заключается в том, что выходящая из щелевого сопла затопленная плоская струя формируется под прямым углом к его оси.

*Цель данной статьи* – разработать адекватную модель для осесимметричного жидкоструйного излучателя со ступенчатым препятствием и круговым щелевым соплом в виде соосных дисков.

**1. Модель жидкоструйного излучателя звука.** Рассмотрим возможный механизм генерации звука жидкоструйным излучателем со ступенчатым препятствием и круговым щелевым соплом в виде соосных дисков. В основу предлагаемой физической модели положена идея об автоколебаниях упругой затопленной кольцевой струйной пластинки при наличии развитой кавитации [5].

Из кругового щелевого сопла преобразователя, образованного соосными дисками корпуса 1 и обтекателя 6, с регулируемой скоростью перпендикулярно оси излучателя вытекает затопленная плоская осесимметричная струя 5 (рис. 1, а). Она представляет собой затопленную кольцевую струйную пластинку, совершающую изгибные колебания (рис. 1, б). Можно считать, что внутренний край кольцевой пластинки жестко зашпелен на выходе из сопла, а наружный свободно опирается на ступенчатое препятствие 3. Геометрическими параметрами струйной пластинки являются радиус ее внутреннего края  $r_c$ , ширина  $s$  и толщина  $h$ . В корпусе 1 излучателя выполнена кольцевая проточка, форма поперечного сечения которой близка к квадрату. Ступенчатое препятствие 3 (прямоугольный клин) способствует тому, что часть кинетической энергии струи за счет эффекта

Бернулли расходует на формирование в проточке корпуса 1 первичного тороидального вихря 2. В центре вихревой области 2 создаются условия для развития кавитации. Поэтому область 2 заполнена сложной двухфазной средой – жидкостью с парогазовыми микропузырьками [6].

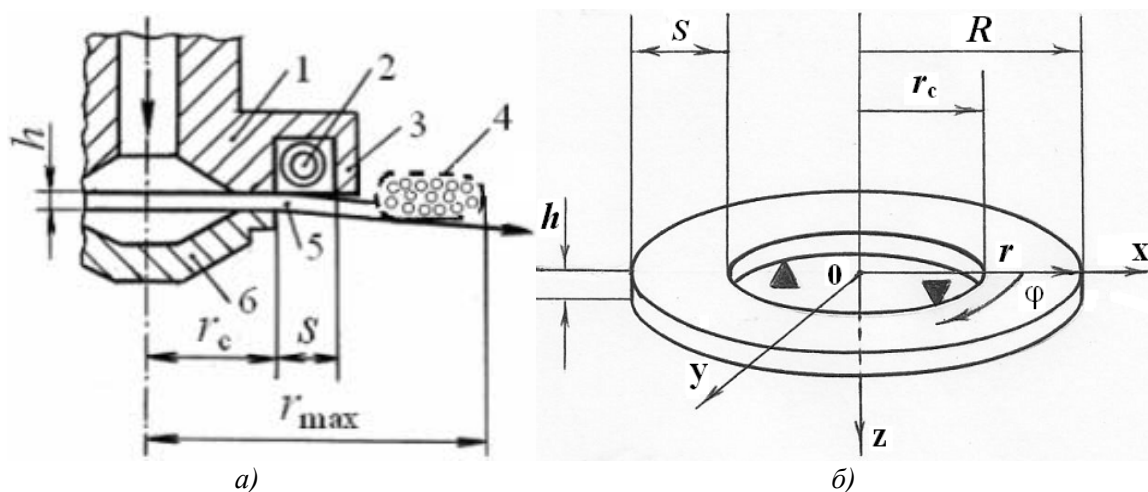


Рисунок 1 – а) схема жидкоструйного излучателя, б) модель кольцевой струйной пластинки с жестко зашпеленным внутренним контуром

С увеличением концентрации газовых и паровых каверн давление внутри проточки возрастает и достигает критического значения. В этот момент происходит деформация наружного края кольцевой струйной пластинки и выброс содержимого кавитационной области во внешнюю среду. При этом создается вторичная тороидальная область 4 с развитой кавитацией, имеющая эллиптическое поперечное сечение (рис. 1, а). В области 4 происходит коллапс кавитационных пузырьков, в результате чего в окружающей жидкой среде возникают микроударные волны. Это приводит к усилению генерируемого акустического сигнала. Давление в кольцевой проточке корпуса 1 после выброса парогазовых каверн становится меньше гидростатического давления в невозмущенной среде и в ней вновь создаются условия для формирования вихря 2. Далее этот процесс периодически повторяется и пульсации двухфазной области 2 возбуждают изгибные колебания в кольцевой струйной пластинке 5. Частота пульсаций зоны развитой кавитации 2 зависит от скорости и кинетической мощности струи на выходе из сопла. При совпадении частоты пульсаций области 2 и собственной частоты струйной пластинки генерируется акустический сигнал максимального уровня. Можно сказать, что в рабочей зоне излучателя образуется своеобразная резонансная система, состоящая из упругой кавитирующей среды внутри кольцевой проточки корпуса 1, струйной пластинки 5 и присоединенной массы внешней среды. Эта резонансная система и обеспечивает обратную акустическую связь, навязывая струйной пластинке автоколебания со стабильной частотой [7].

Следует отметить, что описанный механизм звукообразования в целом аналогичен предложенному ранее механизму звукообразования прямооточных и противоточных жидкоструйных излучателей [2, 7].

**2. Собственные колебания кольцевой струйной пластинки.** Перейдем к математической постановке задачи. Пусть затопленная кольцевая струйная пластинка характеризуется геометрическими параметрами: толщиной  $h$ , шириной  $S$ , внутренним радиусом  $r_c$  и внешним радиусом  $R$  (рис. 2, а). Учтем, что толщина пластинки  $h$  мала по сравнению с радиусом  $R$ . Расположим оси  $x$  и  $y$  в верхней плоскости кольцевой пластинки, ось  $z$  направим по нормали к этой плоскости, и декартову систему координат совместим с цилиндрической системой координат. В первом приближении струйную пластинку можно рассматривать как твердотельную с некоторым эквивалентным модулем упругости. Будем считать, что кольцевая струйная пластинка жестко зашпелена по внутреннему контуру и свободно оперта по внешнему контуру. Предполагаем, что струйная пластинка деформируется под действием сил, равномерно распределенных по ее внутренней поверхности, и потому совершает вертикальные изгибные гармонические колебания. Для определения частоты собственных колебаний кольцевой струйной пластинки воспользуемся

однородным дифференциальным уравнением изгиба круглой пластинки в полярных координатах  $r, \varphi$  [8]

$$\tilde{D}\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2}$  – оператор Лапласа;  $w(r, \varphi, t)$  – динамический прогиб пластинки;  $t$  –

параметр времени;  $\rho$  – плотность материала струйной пластинки;  $\tilde{D}$  – цилиндрическая жесткость кольцевой пластинки.

Используем метод разделения переменных Фурье [9], тогда частное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w(r, \varphi, t) = W(r, \varphi)F(t). \quad (2)$$

Разделив уравнение (1) на правую часть функции (2), после разделения переменных получим

$$\frac{\tilde{D} \Delta\Delta W(r, \varphi)}{\rho h W(r, \varphi)} = -\frac{d^2 F(t)}{dt^2} / F(t). \quad (3)$$

Так как левая часть уравнения (3) представляет функцию только переменных  $r$  и  $\varphi$ , а правая зависит только от времени  $t$ , то очевидно, что каждая из величин  $\tilde{D}\Delta\Delta W / \rho h W$  и  $-\frac{d^2 F}{dt^2} / F$

должна быть постоянной. Обозначим указанную постоянную через  $\omega^2$ , тогда

$$\frac{d^2 F(t)}{dt^2} = -\omega^2 F(t). \quad (4)$$

Поскольку в правой части уравнения (4) стоит отрицательная величина, то уравнение (4) имеет решение в виде тригонометрической функции [9]

$$F(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5)$$

где  $\omega$  является круговой частотой колебаний.

Ввиду радиальной симметрии изгибные колебания кольцевой пластинки естественно считать независимыми от угловой координаты  $\varphi$ . Перейдем от переменной  $r$  к приведенному расстоянию  $\xi = \lambda(r - r_c)$  и учтем, что  $r_c \leq r \leq R$  (рис. 1, б). Тогда форма колебаний, функция  $W(\xi)$ , будет удовлетворять дифференциальному уравнению [10]

$$\Delta_\xi \Delta_\xi W(\xi) - \lambda^4 W(\xi) = 0, \quad (6)$$

где  $\Delta_\xi = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{d}{d\xi}$ , а для характеристического параметра  $\lambda$  справедливо выражение

$$\lambda^4 = \omega^2 \rho h / \tilde{D}. \quad (7)$$

В связи с тем, что материалом пластинки является жидкость и пластинка, испытывающая колебания, находится в затопленном состоянии в этой же жидкости, то коэффициент Пуассона  $\mu \approx 0$  [11]. Это позволяет использовать для вычисления коэффициента жесткости кольцевой пластинки формулу [12]

$$\tilde{D} = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \cdot \left(1 - \frac{r_c}{R}\right) \approx \frac{E h^3}{12} \cdot \left(1 - \frac{r_c}{R}\right), \quad (8)$$

где  $E$  – модуль упругости струйной кольцевой пластинки. Уравнение (6) может быть представлено в виде

$$(\Delta_\xi - \lambda^2)(\Delta_\xi + \lambda^2)W(\xi) = 0, \quad (9)$$

откуда следует, что решениями уравнения (6) являются, в частности, решения более простых уравнений:

$$\frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dW(\xi)}{d\xi} - \lambda^2 W(\xi) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dW(\xi)}{d\xi} + \lambda^2 W(\xi) = 0. \quad (11)$$

Поскольку мы рассматриваем осесимметричные колебания круглой пластинки, то решениями уравнения (10) являются функции Бесселя:  $J_0(\xi)$  – первого рода и  $Y_0(\xi)$  – второго рода 0-го порядка. Решениями же уравнения (11) служат модифицированные функции Бесселя:  $I_0(\xi)$  – первого рода и  $K_0(\xi)$  – второго рода 0-го порядка [10]. Таким образом, общее решение уравнения (6) будет иметь вид

$$W(\xi) = C_1 \cdot J_0(\xi) + C_2 \cdot Y_0(\xi) + C_3 \cdot I_0(\xi) + C_4 \cdot K_0(\xi). \quad (12)$$

Можно считать, что внутренний край струйной кольцевой пластинки ( $r = r_c$ ) жестко защемлен, а на наружном крае ( $r = R$ ) – отсутствуют продольное смещение, сдвиг и перерезывающие усилия [8]. Тогда граничные условия на контурах пластинки примут вид:

$$W(\xi) \Big|_{r=r_c} = 0; \quad \frac{dW(\xi)}{d\xi} \Big|_{r=r_c} = 0; \quad \frac{dW(\xi)}{d\xi} \Big|_{r=R} = 0; \quad \frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{r=R} = 0. \quad (13)$$

Используя граничные условия (13) для функции  $W(\xi)$ , а также рекуррентные формулы для функций Бесселя [13], получим однородную систему четырех алгебраических уравнений относительно постоянных коэффициентов  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\begin{aligned} C_1 \cdot J_0(0) + C_2 \cdot Y_0(0) + C_3 \cdot I_0(0) + C_4 \cdot K_0(0) &= 0, \\ -C_1 \cdot J_1(0) - C_2 \cdot Y_1(0) + C_3 \cdot I_1(0) - C_4 \cdot K_1(0) &= 0, \\ -C_1 \cdot J_1(\lambda s) - C_2 \cdot Y_1(\lambda s) + C_3 \cdot I_1(\lambda s) - C_4 \cdot K_1(\lambda s) &= 0, \\ -C_1 \cdot J_1'(\lambda s) - C_2 \cdot Y_1'(\lambda s) + C_3 \cdot I_1'(\lambda s) - C_4 \cdot K_1'(\lambda s) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В системе уравнений (14) учтено, что  $\xi = 0$  на внутреннем контуре, а на наружном контуре приведенное расстояние  $\xi = \lambda(R - r_c) = \lambda s$  (рис. 1, б). Поскольку динамический прогиб пластинки должен быть конечным, то коэффициенты  $C_2$  и  $C_4$  равны нулю при функциях  $Y_0(0)$ ,  $K_0(0)$ ,  $Y_1(0)$  и  $K_1(0)$ , стремящихся к бесконечности при  $\xi \rightarrow 0$  [13]. Это подтвердил анализ, проведенный в работе [10]. Функции  $J_0(0)$  и  $I_0(0)$  равны единице [13], тогда из граничных условий при  $\xi = 0$  находим, что  $C_1 + C_3 = 0$ . Граничные условия при  $\xi = \beta = \lambda s$  приводят к уравнениям относительно коэффициентов  $C_1$  и  $C_3$ :

$$\begin{cases} C_1 \cdot J_1(\beta) - C_3 \cdot I_1(\beta) = 0, \\ C_1 \cdot J_1'(\beta) - C_3 \cdot I_1'(\beta) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для того чтобы система уравнений (15) имела нетривиальное решение, необходимо равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных [10]. Отсюда получаем следующее уравнение:

$$I_1(\beta) \cdot J_1'(\beta) - J_1(\beta) \cdot I_1'(\beta) = 0. \quad (16)$$

Найдя корни  $\beta_i$  трансцендентного уравнения (16) и используя выражение (7), мы тем самым определим частоты собственных колебаний кольцевой пластинки

$$\omega_i = \frac{\beta_i^2}{s^2} \sqrt{\frac{\tilde{D}}{\rho h}}. \quad (17)$$

Нас интересует частота основного тона (низшая гармоника) генерируемого акустического сигнала  $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ . Ей соответствует первый корень уравнения (16)  $\beta_0 = \lambda_{0s} = 4,611$  [13]. Тогда, воспользовавшись формулой для коэффициента жесткости (8), окончательно получим формулу для расчета частоты основной гармоники жидкоструйного излучателя со ступенчатым препятствием и круговым щелевым соплом в виде соосных дисков

$$f_0 = \frac{\beta_0^2}{2\pi(R - r_c)^2} \sqrt{\frac{E h^2}{12\rho} \cdot \left(1 - \frac{r_c}{R}\right)}. \quad (18)$$

Как и следовало ожидать, собственная частота затопленной струйной пластинки (18) прямо пропорциональна квадратному корню из отношения модуля упругости и плотности рабочей жидкости. Известно [11], что модуль упругости  $E$  можно выразить через адиабатический модуль объемной упругости жидкости  $K_{ад}$ :

$$E = \frac{K_{ад}}{3(1 - 2\mu)} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \chi_i (P^* + \Delta P_{ст})^i. \quad (19)$$

Здесь  $P^*$  – предел прочности жидкости на разрыв;  $\Delta P_{ст}$  – избыточное (по сравнению с атмосферным) статическое давление на глубине моря;  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$  – коэффициенты Тэта, которые практически не изменяются в широком диапазоне температур жидкости, но зависят от объема включений (мелкодисперсные твердые частицы, растворенный газ, зародыши кавитационных пузырьков и др.). В связи с тем, что модуль упругости (19) плоской струи зависит от  $\Delta P_{ст}$ , то и частота основной гармоники звукового сигнала излучателя, при погружении на различную глубину моря, будет изменяться как функция гидростатического давления.

С целью проверки соответствия разработанной математической модели реальным жидкоструйным излучателям были проведены экспериментальные исследования, результаты которых представлены ниже.

**3. Анализ результатов экспериментальных исследований.** Экспериментальные исследования частотных характеристик жидкоструйных излучателей проводились в акустическом бассейне со звукопоглощающими стенками [5]. В ходе экспериментов излучатели помещались в гидроакустическом бассейне с водопроводной водой, которая для достижения стабильного газосодержания предварительно отстаивалась в течение трех недель. Температура воды поддерживалась в пределах (19...21) С°, что обеспечивало практически постоянными плотность и вязкость жидкой среды; избыточное статическое давление составляло 5 кПа. Тогда, для отстоянной в течении трех недель воды, при расчете частоты основной гармоники сигнала можно использовать следующие значения:  $P^* = 0,51$  МПа;  $\chi_1 = 7,5$ ;  $\chi_2 = 8 \cdot 10^{-6}$ ;  $\chi_3 = 1,2 \cdot 10^{-11}$  [3].

На первом этапе исследований изучалось влияние толщины плоской осесимметричной струи на частоту основного тона  $f_0$  жидкоструйного излучателя. В данном эксперименте постоянным оставался радиус кругового щелевого сопла:  $r_c = 13$  мм. Регулировка ширины щели сопла позволяла изменять толщину  $h$  плоской струи в диапазоне (0,3...1,4) мм. На рис. 2 представлена зависимость частоты основной гармоники акустического сигнала от относительной толщины  $h/s$  струйной пластинки. Здесь сплошными линиями отражены данные расчета  $f_0$  по формуле (18), точками – результаты экспериментальных измерений, а пунктирными линиями – аппроксимация данных эксперимента.

Видно, что увеличение толщины кольцевой струйной пластинки для каждого параметра  $S$  приводит к линейному повышению частоты основной гармоники звукового сигнала. Объяснение данного факта связано с тем, что с увеличением толщины пластинки возрастает цилиндрическая жесткость  $\tilde{D}$  струйной пластинки, что в результате приводит к линейному повышению собственной частоты излучателя (8). Следует отметить, что теоретическая зависимость  $f_0(h/s)$  хорошо соответствует экспериментальным точкам в интервале значений  $h/s = 0,08...0,20$ .

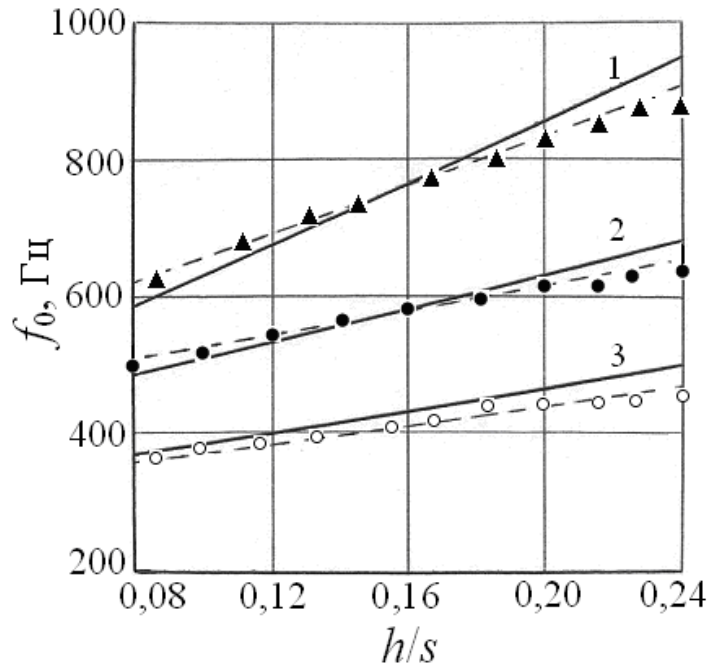


Рисунок 2 – Зависимость частоты основной гармоники звукового сигнала от относительной толщины плоской струи: 1 –  $s = 3,5$  мм; 2 –  $s = 5,0$  мм; 3 –  $s = 6,0$  мм

Второй этап экспериментов был посвящен исследованию влияния ширины  $S$  кольцевой струйной пластинки на частоту нижней гармоники акустического сигнала. Использовались три жидкоструйных излучателя, у которых радиус сопла (радиус внутреннего края струйной пластинки) принимал значения:  $r_c = 10,0; 13,0; 21,0$  мм. При этом толщина плоской струи оставалась неизменной и равной:  $h = 0,5$  мм. Для изменения параметра  $S$  в интервале от 2 до 6 мм использовался набор корпусов излучателя с различными по ширине кольцевыми проточками.

Зависимость частоты основного тона сигнала от ширины кольцевой струйной пластинки представлена на рис. 3. Здесь точки соответствуют экспериментальным измерениям частоты основного тона генерируемого акустического сигнала, сплошные линии – результаты расчета по формуле (18). Для всех кривых видно, что с увеличением параметра  $S$  частота собственных колебаний кольцевой пластинки уменьшается обратно пропорционально квадрату ширины пластинки. При этом хорошее количественное соответствие между теоретическими и экспериментальными данными наблюдается для значений  $s \geq 3$  мм.

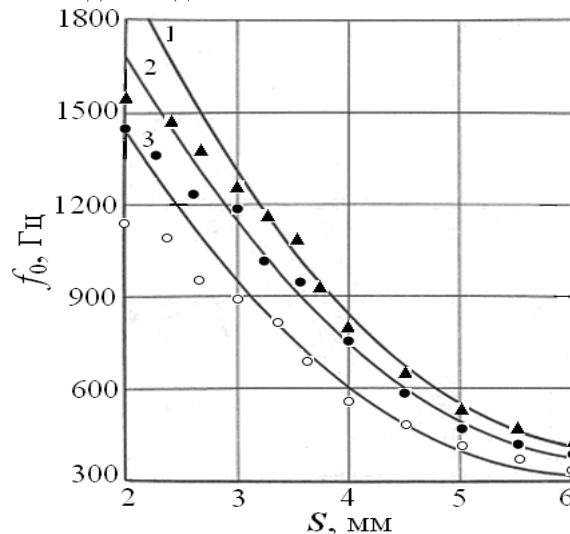


Рисунок 3 – Зависимость частоты основной гармоники звукового сигнала от ширины кольцевой струйной пластинки: 1 –  $r_c = 10,0$  мм; 2 –  $r_c = 13,0$  мм; 3 –  $r_c = 21,0$  мм

По результатам исследований, представленным на рис. 3, можно также оценить влияние радиуса щелевого сопла излучателя  $r_c$  (или внешнего радиуса  $R$  струйной пластинки) на частоту основной гармоники акустического сигнала. С увеличением радиуса сопла  $r_c$ , при постоянной ширине  $S$  кольцевой пластинки, частота основного тона  $f_0$  уменьшается, что связано с увеличением площади поверхности колеблющейся плоской струи. Так, например, для жидкоструйного излучателя звука с  $r_c = 10,0$  мм при параметре  $s = 5,0$  мм частота низшей гармоники  $f_0 = 567$  Гц. Для излучателя с  $r_c = 13,0$  мм при той же ширине пластинки  $S$  частота основной гармоники  $f_0 = 518$  Гц, а для преобразователя с  $r_c = 21,0$  мм при параметре  $s = 5,0$  мм частота основного тона звука уже составляет  $f_0 = 430$  Гц.

Мы получили известный ожидаемый результат: увеличение габаритов колеблющейся пластинки или оболочки приводит к уменьшению низшей из ее собственных частот [8]. Результаты теории и эксперимента, представленные на рис. 3, хорошо согласуются с этой закономерностью. Сравнение теории с экспериментальными данными (см. рис. 2 и 3) позволяет предложить критерий применения разработанной математической модели для расчета частоты основного тона модифицированного жидкоструйного излучателя:

$$0,08 \leq \frac{h}{s} \leq 0,20; s \geq 3 \text{ мм.} \quad (20)$$

При выполнении этого условия излучатель генерирует акустический сигнал максимальной интенсивности [5], а ошибка расчета частоты основной гармоники по формуле (18) по сравнению с экспериментальными данными не превышает 5 %.

В заключение отметим: для жидкоструйного излучателя со ступенчатым препятствием и круговым щелевым соплом в виде соосных дисков предложена модель в виде затопленной кольцевой струйной пластинки. В результате решения задачи собственных колебаний кольцевой пластинки получена аналитическая зависимость частоты основного тона акустического сигнала от геометрических параметров плоской струи и свойств рабочей жидкости. Установлено, что частота основной гармоники звукового сигнала прямо пропорциональна толщине кольцевой струйной пластинки и обратно пропорциональна квадрату ее ширины. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных. Предложен критерий применения представленной математической модели для рассмотренного типа жидкоструйного преобразователя.

#### Литература

1. Сухарьков О.В. Передача дискретной информации в гидроакустический канал связи с использованием жидкоструйных преобразователей / О.В. Сухарьков // Цифрові технології. – 2011. – № 9. – С. 100 – 110.
2. Дудзінський Ю.М. Модель прямооточного гідродинамічного випромінювача з кільцевим соплом і східчастою перешкодою / Ю.М. Дудзінський, О.В. Сухарьков, Н.В. Манічева // Акуст. вісник. – 2004. – 7, № 3. – С. 49 – 54.
3. Сухарьков О.В. Амплитудно-частотные характеристики прямооточных жидкоструйных преобразователей / О.В. Сухарьков // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2011. – № 1. – С. 95 – 101.
4. Сухарьков О.В. Жидкоструйный излучатель со ступенчатым препятствием и круговым щелевым соплом в виде соосных дисков / О.В. Сухарьков // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2010. – № 1. – С. 102 – 108.
5. Сухарьков О.В. Энергетические характеристики затопленной кольцевой струйной пластинки, при наличии развитой кавитации / О.В. Сухарьков // Акуст. вісник. – 2010. – 13, № 2. – С. 45 – 52.
6. Singhal A. K. Mathematical basis and validation of the full cavitation model / A. K. Singhal, M. M. Athavale, H. Li, Y. Jiang // Trans. ASME, J. Fluids Eng. – 2002. – № 124. – P. 617 – 624.
7. Вовк И.В. О возможном механизме автоколебаний в струйных гидродинамических излучателях с развитой кавитацией / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко, Ю.М. Дудзінський // Акустичний вісник. – 2008. – 11, № 2. – С. 16 – 23.
8. Перцев А.К. Динамика оболочек и пластин / А.К. Перцев, Э.Г. Платонов. – Л. : “Судостроение”, 1987. – 400 с.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том второй / Смирнов В.И. – М. : Наука, 1974. – 656 с.
10. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций / Коренев Б.Г. – М. : Наука, 1971. – 288 с.
11. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей / Корнфельд М. – М. : ГТТИ, 1951. – 200 с.
12. Чижевский К.Г. Расчет круглых и кольцевых пластин. Справочное пособие / Чижевский К.Г. – Л. : Машиностроение, 1977. – 184 с.
13. Янке Е. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. – М. : Наука, 1964. – 344 с.