

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ТЕНЗОРНОЙ МОДЕЛИ ЦИФРОВЫХ ПОТОКОВ В ОТКРЫТОЙ СЕТИ

ГЕОМЕТРИЗАЦІЯ ТЕНЗОРНОЇ МОДЕЛІ ЦИФРОВИХ ПОТОКІВ У ВІДКРИТІЙ МЕРЕЖІ

GEOMETRIC PRESENTATION FOR THE TENSOR MODEL
OF DIGITAL FLOWS IN THE OPEN NETWORK

Аннотация. Получено геометрическое представление тензорной модели цифровых потоков в открытой изотропной телекоммуникационной сети с симметричными связями. Построен метрический тензор Римана для потоков сети как функция от матрицы потоков. Результаты работы применимы в задачах проектирования сетей и управления сетевыми ресурсами.

Анотація. Одержано геометричне представлення тензорної моделі цифрових потоків у відкритій ізотропній телекомунікаційній мережі з симетричними зв'язками. Побудовано метричний тензор Римана для потоків мережі як функція від матриці потоків. Результати роботи можуть бути використані в задачах проектування мереж і керування мережними ресурсами.

Summary. The geometric presentation of tensor model derived for digital flows in the open isotropic telecommunication network with symmetric links. The Riemann metric tensor for network flows defined as a function of the network flows matrix. The results of this work intend utilization in network design and network facilities management.

Важной проблемой в теории и практике телекоммуникаций является построение адекватной математической модели сети и процессов информационного взаимодействия между выделенными в ней сегментами и подсетями. Известные методы моделирования процессов в сетях опираются на теорию графов [1] и сетей Петри [2], теорию массового обслуживания [3 ... 5], тензорный анализ [6 ... 8] и др. Тензорное моделирование информационных процессов в сетях является одним из новых и перспективных направлений в телекоммуникациях, которое позволяет использовать полученные ранее в физике и математике результаты для решения прикладных задач оптимального проектирования инфокоммуникационных сетей и управления сетевыми ресурсами [9 ... 13]. В работе [14] сформулировано в общем виде понятие тензора цифровых потоков для открытой анизотропной сети, инвариантного относительно некоторой заданной функции от матрицы потоков сети. Вопрос о выборе конкретных функций от матрицы потоков при определении инвариантов тензорной модели сети не является решенным и требует дальнейших исследований.

Целью данной статьи является геометрическое представление тензорной модели цифровых потоков в открытой изотропной телекоммуникационной сети с симметричными связями, в которой инвариантом тензора потоков является метрический тензор Римана.

Рассмотрим некоторую инфокоммуникационную сеть V , которая является частью более общей сети W . Назовем сеть V открытой в сети W , если сеть V имеет каналы коммуникаций и информационные связи с сетью W . Выделим в сети V некоторый объект (например, маршрутизатор, сегмент сети, подсеть и др.), который далее будем рассматривать как центральный элемент модели. Обозначим эту модель $M(V, x_0)$, где x_0 – центральный элемент модели.

Модель $M(V, x_0)$ сети V будем строить в виде сетевого окружения центрального элемента x_0 . С этой целью выделим в сети V некоторое множество \hat{X} , состоящее из N объектов $x_n \in \hat{X}$, где $n = 1, 2, \dots, N$, с которыми преимущественно взаимодействует выделенный нами центральный объект x_0 . При этом объект x_0 может иметь информационные связи и с другими (невыведенными) объектами как внутри сети V , так и за ее пределами в сети W . Множество \hat{X} , согласно [14], будем называть актуальным для x_0 множеством, а объект x_0 , обладающий указанными выше свойствами, – открытым элементом модели $M(V, x_0)$.

Аналогичным образом, будем полагать, что объекты $x_n \in \hat{X}$; $n = 1, 2, \dots, N$, актуального для x_0 множества \hat{X} также являются открытыми элементами модели $M(V, x_0)$, т.е. могут иметь ин-

формационные связи, как между собой, так и с объектом x_0 , а также с другими (невыделенными) объектами внутри сети V и за ее пределами в сети W .

Объединим элемент x_0 с элементами $x_n \in \hat{X}$ в одно множество X , где $X = x_0 \cup \hat{X}$. Согласно принятым выше исходным предположениям, объект x_0 как центральный элемент в модели сети, обязательно имеет информационные связи со всеми выделенными объектами $x_n \in \hat{X}$; $n = 1, 2, \dots, N$, в его сетевом окружении. В то же время, объекты $x_n \in \hat{X}$; $n = 1, 2, \dots, N$ могут иметь любую конфигурацию информационных связей между собой внутри множества \hat{X} , например, не иметь ни одной такой связи, иметь полный набор всех возможных связей и др. Поэтому во множестве X центральный элемент x_0 обеспечивает связность всех элементов множества \hat{X} в единую структуру, вне зависимости от наличия или отсутствия прямых связей элементов множества \hat{X} между собой. Из общей топологии известно, что связной структуре на множестве элементов соответствует понятие «топологическое пространство», в котором необходимым связующим элементом является так называемый «открытый пустой элемент множества» [15 ... 17].

Структуру связности элементов множества, в которой все непустые элементы множества объединены только через посредство открытого пустого элемента множества, называют сильнейшей, или дискретной топологией на множестве [17]. Дискретная топология является одной из двух крайних структурных форм топологического пространства. Другая крайняя форма – так называемая слабейшая, или примитивная топология, которую также называют «анти-дискретной». Примитивная топология соответствует полной связности всех элементов множества (т.е. любая пара элементов множества связана между собой прямой связью). Дискретную и примитивную топологию объединяют одним общим термином «тривиальная топология». Все промежуточные между дискретной и примитивной формами топологии называют «нетривиальные топологии» [17].

Условимся, что при построении топологии на множестве X выделенных нами объектов сети $x_n \in X$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, центральный элемент модели $x_0 \in X$ будет исполнять роль открытого пустого элемента \emptyset множества X . Далее по тексту элемент x_0 будем иногда обозначать как пустой элемент \emptyset , если это не вызывает разночтений. Согласно [18], структуру сети, построенную на множестве элементов $x_n \in X$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, в котором центральный элемент модели x_0 обеспечивает гарантированную минимальную связность всех выделенных объектов открытой сети V , назовем фракталом сети V , или просто фракталом. Согласно этому определению, фрактал может иметь любой тип тривиальной и нетривиальной топологии в диапазоне от дискретной (минимально связной) до примитивной (полносвязной).

На рис. 1 показан пример фрактала сети для случая $N = 2$, в котором выделен центральный элемент \emptyset и два непустых элемента x_1 и x_2 (обозначены тремя сплошными окружностями). Свойство открытости элементов фрактала для информационного взаимодействия с объектами своего локального сетевого окружения обозначены условно в виде пунктирных окружностей вокруг каждого из элементов фрактала. Свойство открытости элементов фрактала для информационного взаимодействия с другими (невыделенными) объектами внутри сети V и за ее пределами (т.е. в сети W) обозначены условно в виде пунктирных линий, исходящих из каждого элемента фрактала.

В соответствии с целью данной статьи, исследуем изотропную сеть, в которой цифровые потоки между любой парой объектов сети являются двунаправленными и симметричными в прямом и обратном направлениях. Вначале рассмотрим простую сеть, которая представлена фракталом на рис. 1. Согласно данному в работе [14] общему определению, тензор цифровых потоков сети представляет собой систему из трех математических объектов (C, C_0, J) , удовлетворяющую уравнению инвариантности вида

$$J(C) = J(C_0), \quad (1)$$

где C – комплексная матрица цифровых потоков сети, выраженных в амплитудной форме; C_0 – аналогичная C матрица потоков, условно принятая в качестве эталона для сравнения с матрицей C ; $J(C)$ – функция инвариантности, аргументом которой является матрица C . Вещественная часть каждого элемента матрицы обозначает симметрическую составляющую потока, а мнимая – кососимметрическую составляющую потока.

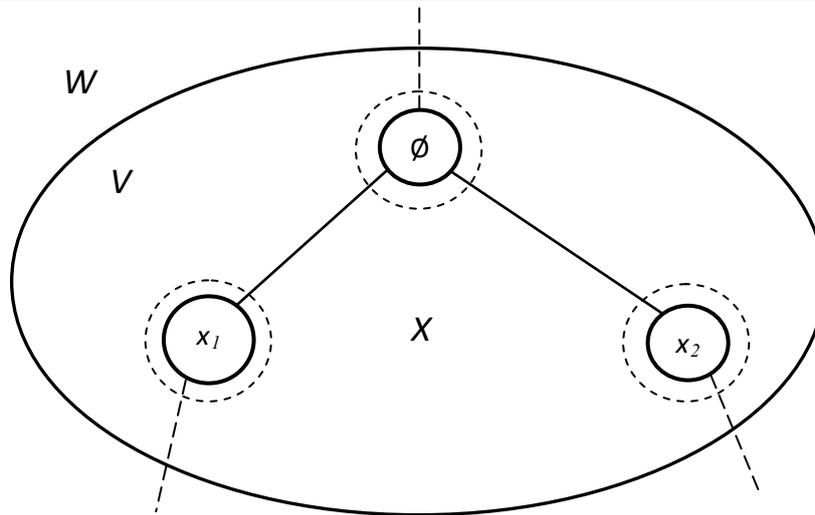


Рисунок 1 – Фрактал сети V из двух непустых элементов

Применительно к рассматриваемому нами частному случаю изотропной сети на рис. 1, кососимметрические составляющие отсутствуют, т.е. матрица C представляет собой вещественную симметрическую матрицу амплитуд потоков. Выберем функцию инвариантности J вида $J(C) = R$, где R – неотрицательная вещественная симметрическая матрица потоков, представленная в форме квадратов амплитуд, т.е. $r_{nm} = |c_{nm}|^2$ для всех $n, m = 0, 1, 2$; здесь r_{nm} и c_{nm} – элементы матриц R и C соответственно. Диагональные элементы r_{nn} матрицы R описывают полный цифровой поток каждого из сетевых объектов \emptyset, x_1, x_2 ; эти диагональные элементы имеют смысл информационной мощности выделенных объектов сети [14].

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} m \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{matrix} \end{matrix}$$

Рисунок 2 – Симметрическая вещественная матрица потоков изотропной сети

Каждый диагональный элемент матрицы R учитывает все виды информационного взаимодействия соответствующего объекта со своим сетевым окружением (в том числе, с теми объектами сетей V и W , которые не выделены явно как элементы множества X). Недиagonальные элементы матрицы R описывают потоки между выделенными объектами сети в принятых нами единицах информационной мощности байт/с. Общий вид матрицы R для изотропной сети с симметричными потоками, изображенной на рис. 1, показан на рис. 2.

Примем следующую аксиому геометризации тензорной модели цифровых потоков в изотропной сети:

1. Аксиома геометризации матрицы потоков. Матрица R цифровых потоков изотропной сети является положительно определенной симметрической вещественной матрицей.

Принятие сформулированной выше аксиомы геометризации означает предположение о существовании изотропных сетей, для которых выполняется данная аксиома, а также соглашение о том, что в рамках данной статьи мы будем рассматривать класс сетей, для которых справедлива эта аксиома.

При выполнении аксиомы геометризации матрица R представляет собой метрический тензор Римана, т.е. является метрикой некоторого вещественного евклидова пространства. Базис этого пространства составляет репер векторов с матрицей скалярных произведений R . Любые преобразования тензора потоков сети, инвариантные относительно значения функции инвариантности $J(C) = R = R_0$, сохраняют все геометрические свойства репера векторов (длины, углы и пр.).

Рассмотрим множество моделей сетей, для которых матрица цифровых потоков R является симметрической вещественной положительно определенной квадратной матрицей, т.е. удовлетворяет определению метрического тензора Римана [6]. В таком случае, матрица R размером 3×3 на рис. 2 может рассматриваться как матрица скалярных произведений некоторой невырожденной системы из трех векторов, исходящих из общей точки; эти векторы образуют базис трехмерного вещественного

евклидового пространства. Поставим эти три вектора в соответствие трем выделенным объектам сети (рис. 1) и обозначим вектора именами объектов, как показано на рис. 3. Система из трех векторов не вырождена, если каждый вектор имеет длину, не равную нулю, и при этом три вектора не лежат в одной (двумерной) плоскости или же на одной прямой. В общем случае, система из N векторов не вырождена, если все вектора системы имеют длину, не равную нулю, и при этом N векторов системы не лежат в одной гиперплоскости, размерность которой меньше чем N [17].

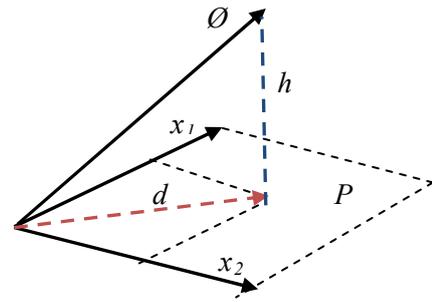


Рисунок 3 – Система векторов как модель потоков в сети из трех объектов

Невырожденную систему векторов, исходящих из общей точки, будем называть кратко «репер векторов», или просто «репер». В евклидовом вещественном пространстве скалярное произведение векторов друг на друга определено как вещественная функция вида [17]:

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos \varphi, \quad (2)$$

где $|x|$ и $|y|$ – модули векторов x и y (т.е. длины этих векторов); φ – угол между векторами x и y . Если углы между векторами находятся в диапазоне от 0 до $\pi/2$, то скалярное произведение является неотрицательным вещественным числом. Скалярное произведение (2) коммутативно, т.е. $(x, y) \equiv (y, x)$. Запишем некоторые известные формулы, которые выражают геометрические свойства векторов через скалярное произведение векторов. Эти формулы нам понадобятся далее.

Длина вектора:

$$|x| = (x, x)^{1/2}. \quad (3)$$

Угол между векторами:

$$\varphi = \arccos[(x, y) / (|x| \cdot |y|)]. \quad (4)$$

Нормальная (т.е. ортогональная) проекция x_y вектора x на вектор y :

$$x_y = |x| \cdot \cos \varphi = (x, y) / |y|. \quad (5)$$

Нормальная проекция y_x вектора y на вектор x :

$$y_x = |y| \cdot \cos \varphi = (x, y) / |x|. \quad (6)$$

Рассмотрим некоторые возможные способы построения репера трех произвольных векторов (обозначим их x, y, z) в трехмерном вещественном евклидовом пространстве.

Первый способ. Укажем длину каждого вектора, а также углы между каждой парой векторов. Например: $|x| = 1, |y| = 1,2, |z| = 1,5, \angle(x, y) = 90^\circ, \angle(x, z) = 45^\circ, \angle(y, z) = 60^\circ$. Шесть чисел $(1; 1,2; 1,5; 90^\circ; 45^\circ; 60^\circ)$ однозначно определяют взаимное расположение трех векторов, вне зависимости от их абсолютной ориентации в декартовой системе координат. Параллельные переносы, а также вращения репера в пространстве не изменяют значения указанных шести чисел. Данная шестерка чисел является значением 6-компонентной векторной функции инвариантности для репера трех векторов, а рассматриваемый первый способ определения репера является инвариантным относительно выбора исходной системы координат. Этот способ удобен тем, что он является компактным и независимым от выбора системы координат. Недостаток данного способа – отсутствие информации об ориентации репера относительно осей декартовой системы координат, т.е. неопределенность положения репера в окружающем пространстве.

Второй способ. Зададим исходную декартову систему координат с помощью ортов e_1, e_2, e_3 , а затем опишем каждый вектор репера тройкой координат относительно заданных ортов. В результате мы получим квадратную матрицу A размером 3×3 , каждая строка которой – это вектор, представленный своими координатами в ортонормированном базисе (в декартовой системе координат):

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Данный способ требует большего количества чисел, однако позволяет указать ориентацию всех векторов репера относительно выбранной системы координат. Зная матрицу A , можно вычислить инвариантные характеристики репера, например, квадратную матрицу R скалярных произведений размером 3×3 . Матрица R вычисляется как произведение исходной матрицы A на транспонированную матрицу A^T :

$$R = A \cdot A^T. \quad (8)$$

Диагональные элементы матрицы R – это скалярные квадраты соответствующих векторов x, y, z , а недиагональные элементы матрицы R – это смешанные скалярные произведения. Матрица R , очевидно, является вещественной симметрической матрицей, в силу известных свойств скалярного произведения векторов в вещественном евклидовом пространстве. В матрице R из девяти элементов независимыми являются только шесть элементов (три диагональных элемента и три элемента, которые находятся по одну любую сторону главной диагонали матрицы). Так же как и шесть чисел в первом способе, независимые шесть элементов матрицы R однозначно определяют длины векторов репера и углы между ними, а также нормальные проекции векторов репера друг на друга по формулам (3 ... 6).

Третий способ. Зададим репер с помощью матрицы скалярных произведений векторов. Эти скалярные произведения могут быть определены различным образом, например, заданы эмпирически. Этот способ, так же как и первый, является инвариантным относительно выбора базисной системы координат, в которой находится репер.

Четвертый способ. В отличие от рассмотренных выше трех способов, которые определяют репер векторов в терминах элементарной геометрии, данный (четвертый) способ требует привлечения некоторых базовых понятий тензорного анализа, в т.ч. понятий «ковариантные и контравариантные проекции вектора» как «тензора первого ранга» [6, 7].

m	1	2	3
n			
1	(b_1, b_1)	(b_1, b_2)	(b_1, b_3)
2	(b_2, b_1)	(b_2, b_2)	(b_2, b_3)
3	(b_3, b_1)	(b_3, b_2)	(b_3, b_3)

Рисунок 4 – Матрица скалярных произведений для репера трех базисных векторов

Предположим, что трехмерное евклидовое пространство задано не с помощью ортонормированной декартовой системы координат (в которой орты имеют единичную длину и попарно ортогональны), а с помощью некоторого базиса B в виде репера базисных векторов $B = (b_1, b_2, b_3)$, для которого известна матрица R_B скалярных произведений этих векторов, рис. 4:

Определим произвольный вектор x в трехмерном евклидовом пространстве (заданном с помощью базиса B) путем указания скалярных произведений вектора x на каждый из базисных векторов b_1, b_2, b_3 :

$$x_B = [(x, b_1), (x, b_2), (x, b_3)]. \quad (9)$$

Вектор, определенный через скалярные произведения вида (9), является ковариантным тензором первого ранга, а проекции этого вектора – ковариантными проекциями в базисе B [17]. Тензоры принято обозначать с помощью нижних и верхних индексов независимых переменных. Количество нижних индексов обычно называют ковариантной валентностью, а количество верхних индексов – контравариантной валентностью тензора [17]. В этих обозначениях вектор x_B в (9) запишется как x_m , т.е. как один раз ковариантный и нуль раз контравариантный тензор.

Пару целых чисел, которые обозначают ковариантную и контравариантную валентности тензора, называют просто валентностью тензора, а сумму ковариантной и контравариантной валентностей, которые определены по разноименным индексам – рангом тензора. Таким образом, тензор x_n имеет валентность (1, 0) и ранг 1. Матрица скалярных произведений R_B по определению является дважды ковариантным тензором второго ранга (обозначим тензорную запись матрицы R_B как B_{nm}). Обратная (по отношению к R_B) матрица $(R_B)^{-1}$ является дважды контравариантным тензором второго ранга (обозначим этот тензор как B^{nm}).

Контравариантный вектор x^n выражается через ковариантный вектор x_m и обратную матрицу скалярных произведений для базисных векторов b_1, b_2, b_3 [17]:

$$x^n = x_m \cdot (R_B)^{-1} = x_m \times B^{nm}, \quad (10)$$

где \times – символ тензорного произведения. Тензорное произведение $x_m \times B^{nm}$ в (10) является один раз ковариантным и два раза контравариантным тензором. Свертка этого тензора по паре одноименных индексов m (нижнему в x_m и верхнему в B^{nm}) понижает валентность тензора на два и в итоге дает контравариантный тензор первого ранга x^n [17].

Из (10) непосредственно следует выражение для коектора через контрвектор:

$$x_n = x^m \cdot R_B = x^m \times B_{nm}. \quad (11)$$

Тензорное произведение $x^m \times B_{nm}$ в (11) является один раз контравариантным и дважды ковариантным тензором. Свертка этого тензора по паре одноименных индексов m (верхнему в x^m и нижнему в B_{nm}) дает один раз ковариантный тензор первого ранга x_n [17].

Матрица R_B скалярных произведений базисных векторов b_1, b_2, b_3 линейного пространства играет ключевую роль в определении основных понятий тензорного анализа; эту матрицу называют

матрицей преобразования, или фундаментальной матрицей [17]. Фундаментальная матрица R_B , как отмечено выше, является дважды ковариантным тензором второго ранга.

Если в базисе B заданы два вектора x_B, y_B с помощью контравариантных проекций x^n и y^m , то скалярное произведение этих векторов есть билинейная форма с матрицей преобразования R_B [17]:

$$(x_B, y_B) = x^n \cdot R_B \cdot (y^m)^T, \quad (12)$$

где x^n – вектор-строка; $(y^m)^T$ – вектор-столбец (т.е. транспонированный вектор-строка y^m). В тензорной записи выражение (12) принимает вид:

$$(x_B, y_B) = x^n \times B_{mn} \times y^m. \quad (13)$$

Тензорное произведение вида $x^n \times B_{mn} \times y^m$ в (13) представляет собой дважды ковариантный и дважды контравариантный тензор. Двойная свертка этого тензора (по индексам n и m) понижает ранг тензора на 4 и в итоге дает тензор нулевого ранга (вещественное скалярное число, равное скалярному произведению векторов) [17].

Из выражений (12 ... 13) следует, что квадрат длины вектора x_B , заданного контравариантными проекциями в базисе B , определяется как частный случай билинейной формы (12), в которой $x_B = y_B$. Этот частный случай есть квадратичная форма относительно вектора x_B с матрицей преобразования R_B . Запишем ее в матричной и тензорной формах:

$$\left. \begin{aligned} |x_B|^2 &= (x_B, x_B) = x^n \cdot R_B \cdot (x^n)^T \\ |x_B|^2 &= x^n \times B_{nn} \times x^n. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Если векторы x_B, y_B заданы своими ковариантными проекциями в базисе B , то их скалярное произведение соответственно в матричной и тензорной формах есть билинейная форма вида:

$$\left. \begin{aligned} (x_B, y_B) &= x_n \cdot (R_B)^{-1} \cdot (y_m)^T \\ (x_B, y_B) &= x_n \times B^{mn} \times y_m. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Если базис B ортонормирован, то матрица R_B является единичной диагональной матрицей (обозначим ее I). В этом случае ковариантные и контравариантные проекции любого вектора x_B , выраженные своими координатами в базисе B , совпадают; такие проекции определены выше как нормальные проекции; обозначим их с индексом I , например, x_I, y_I . Нетрудно показать, что имеют место следующие свойства скалярного произведения векторов, которые заданы своими проекциями в различных вещественных базисах:

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= x_I \cdot y_I^T = y_I \cdot x_I^T = x_n \times y^n = x^n \times y_n = y_n \times x^n = \\ &= y^n \times x_n = x^n \cdot R_B \cdot (y^m)^T = x_n \cdot (R_B)^{-1} \cdot (y_m)^T. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Отсюда квадрат длины вектора, заданного своими проекциями в различных вещественных базисах, может быть вычислен одним из следующих способов:

$$\left. \begin{aligned} |x|^2 &= x_I \cdot x_I^T = x_n \times x^n = x^n \times x_n = x^n \cdot R_B \cdot (x^m)^T = x_n \cdot (R_B)^{-1} \cdot (x_m)^T = \\ &= x^n \times B_{nn} \times x^n = x_n \times B^{nn} \times x_n. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Пусть x^n, y^n, z^n – система из трех контрвекторов (т.е. трех векторов репера, заданных своими контравариантными проекциями в базисе B). Каждый из этих контрвекторов является контравариантным тензором первого ранга. Тогда квадратная матрица размером 3×3 , составленная из контравариантных проекций векторов репера является один раз ковариантным и один раз контравариантным тензором второго ранга (обозначим этот тензор A_k^m) [17]. Матрица R скалярных произведений векторов репера, очевидно, является дважды ковариантным тензором второго ранга (обозначим его R_{kj}); эта матрица выражается через A_k^m и B_{mn} :

$$R_{kj} = A_k^m \times B_{mn} \times A_j^n. \quad (18)$$

Тензорное произведение в выражении (18) является дважды контравариантным и четыре раза ковариантным тензором шестого ранга. Двойная свертка этого тензора по индексам m и n понижает ранг тензора на 4, и в результате дает дважды ковариантный тензор второго ранга.

Аналогичное по структуре выражение для тензора R_{kj} можно получить для системы из трех ковекторов (т.е. трех векторов репера, заданных своими ковариантными проекциями в базисе B). Каждый из этих ковекторов является ковариантным тензором первого ранга. Тогда квадратная матрица

размером 3×3 , составленная из ковариантных проекций векторов репера является дважды ковариантным тензором второго ранга (обозначим этот тензор A_{km}) [17]. Матрица R скалярных произведений векторов репера в этом случае равна:

$$R_{kj} = A_{km} \times B^{mn} \times A_{nj}. \quad (19)$$

Четвертый способ построения репера векторов в трехмерном вещественном евклидовом пространстве имеет три альтернативных варианта определения репера векторов в произвольном (не обязательно ортонормированном) невырожденном базисе этого пространства:

- а) контравариантными проекциями векторов репера на базисные вектора (тензор A^m_k);
- б) ковариантными проекциями векторов репера на базисные вектора (тензор A_{mk});
- в) инвариантными проекциями (т.е. ковариантными проекциями векторов репера друг на друга, которые образуют метрический тензор R_{kj} для репера векторов).

Очевидно, что во всех четырех рассмотренных выше способах построения репера векторов, явно или неявно, определена матрица скалярных произведений векторов репера друг на друга. Эта матрица является инвариантом репера как геометрического объекта, который не зависит от того, каким образом и в какой системе координат задан репер.

Известно, что невырожденная система векторов (в нашем случае – репер) обладает тем свойством, что матрица скалярных произведений этой системы векторов является положительно определенной симметрической вещественной матрицей (т.е. все собственные значения этой матрицы – положительные вещественные числа); справедливо и обратное утверждение [17]. Положительно определенная вещественная матрица однозначно определяет некоторую невырожденную систему векторов, т.е. задает некоторое вещественное евклидовое пространство, и называется метрическим тензором Римана (или римановой метрикой евклидового пространства) [17]. Для того, чтобы представить рассмотренную выше симметрическую вещественную матрицу цифровых потоков изотропной сети R (рис. 2) как геометрический объект – репер векторов (рис. 3) – примем следующую рабочую гипотезу: все элементы матрицы удовлетворяют аксиомам скалярного произведения векторов в линейном вещественном евклидовом пространстве [17]. Согласно определению матрицы цифровых потоков в [14], диагональные элементы этой матрицы имеют физический смысл информационной мощности каждого из выделенных объектов открытой сети. Геометрическим эквивалентом понятия мощности является квадрат длины вектора (или скалярный квадрат вектора). Диагональные элементы любой матрицы скалярных произведений являются скалярными квадратами, т.е. диагональные элементы матрицы R по определению этой матрицы могут быть интерпретированы как скалярные квадраты векторов. Таким образом, требование выполнения принятой нами гипотезы касается, главным образом, недиагональных элементов матрицы R . Формальным признаком того, что принята нами гипотеза выполняется, является положительная определенность спектра матрицы цифровых потоков R .

Для того, чтобы проверить, удовлетворяет ли некоторая заданная матрица потоков сети рассмотренной выше аксиоме геометризации, докажем следующее необходимое и достаточное условие положительной определенности матрицы цифровых потоков сети (на примере сети, состоящей из трех объектов: x_0 , x_1 и x_2). Будем считать, что сеть может иметь не только дискретную топологию (изображенную на рис. 1), но и другие виды топологий.

2. Теорема о геометризации матрицы потоков. Пусть $\mathbf{r} = [r_{01}, r_{02}]$ – вектор-строка ковариантных проекций вектора \emptyset на вектора x_1 и x_2 , рис. 3; \mathbf{r}^T – транспонированный вектор \mathbf{r} (т.е. вектор-столбец); r_{00} – скалярный квадрат вектора \emptyset на рис. 3; B – невырожденная квадратная матрица скалярных произведений векторов x_1 и x_2 друг на друга размером 2×2 (т.е. матрица, вложенная в матрицу R на рис. 2, которая получается из матрицы R путем удаления из R нулевой строки и нулевого столбца); тогда *необходимым и достаточным условием* для положительной определенности матрицы цифровых потоков R является выполнение неравенства

$$r_{00} > \mathbf{r} \cdot B^{-1} \cdot \mathbf{r}^T, \quad (21)$$

Для доказательства теоремы геометризации рассмотрим репер из трех векторов на рис. 3. Согласно предположению, матрица B не вырождена, т.е. вектора x_1 и x_2 пересекаются под углом, отличным от нуля, и однозначным образом задает некоторую плоскость P . Пусть h – перпендикуляр, опущенный из конца вектора \emptyset на плоскость P , вектор d – проекция вектора \emptyset на плоскость P . Поскольку система из векторов x_1 и x_2 не вырождена, то система из векторов \emptyset , x_1 и x_2 может быть вырожденной только в том случае, если вектор \emptyset лежит в плоскости P , т.е. совпадает с вектором d . В этом случае ковариантные проекции $\mathbf{r} = [r_{01}, r_{02}]$ вектора \emptyset одновременно являются ковариантными проекциями вектора d в общем базисе B . Согласно (17), квадрат длины вектора d вычисляется через

его ковариантные проекции r по формуле $|d|^2 = r \cdot B^{-1} \cdot r^T$. Для того, чтобы вектор \emptyset не лежал в плоскости P , необходимо и достаточно, чтобы длина вектора \emptyset была больше, чем длина его проекции на плоскость P , т.е. чтобы выполнялось условие $|\emptyset| > |d|$. Это неравенство эквивалентно отношению вида

$$r_{00} = |\emptyset|^2 > |d|^2 = r \cdot B^{-1} \cdot r^T. \text{ Теорема доказана.}$$

Для произвольного числа N объектов сети доказательство аналогично, если рассматривать N -гиперплоскость P в $(N + 1)$ -мерном евклидовом пространстве

Рассмотрим некоторые частные случаи геометрической интерпретации для тензора цифровых потоков открытой изотропной сети.

Пример 1. Пусть выделенные объекты x_1 и x_2 сети V не имеют прямой связи между собой (а связаны лишь через посредство объекта $x_0 = \emptyset$), как показано на рис. 1. В этом случае фрактал сети на рис. 1 имеет дискретную топологию, а в матрице потоков сети R (рис. 2) элементы $r_{12}^a = r_{21}^a = 0$. На рис. 5 показан один из возможных вариантов матрицы R . Вектора x_1 и x_2 имеют единичную длину и ортогональны, т.е. базис B , образованный векторами x_1 и x_2 , является ортонормированным.

Поскольку базис B ортонормирован, то ковариантные проекции вектора d на рис. 3 совпадают с его нормальными проекциями. Отсюда квадрат длины вектора d равен сумме квадратов его нормальных проекций, т.е. $3^2 + 4^2 = 25$. Согласно теореме о необходимом и достаточном условии геометризации матрицы потоков, значение элемента $R(0, 0) = r_{00}$ должно быть больше, чем 25. Значение $r_{00} = 25$ для рассматриваемой матрицы потоков является предельным, при котором матрица R становится вырожденной. При этом в спектре ее собственных значений появляется одно нулевое значение. Нетрудно проверить (например, в MathCAD), что матрица на рис. 5 при $r_{00} = 25$ имеет собственные значения 26, 1 и 0. Любое значение $r_{00} > 25$ делает матрицу R положительно определенной. Например, при $r_{00} = 26$ собственные значения равны 26,963; 1; 0,037. В случае $r_{00} < 25$ в спектре собственных значений матрицы R появляется одно отрицательное число. Например, если $r_{00} = 24$, то собственные значения равны 25,04; 1; -0,04.

Пример 2

Убедимся, что матрица $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ не вырождена.

Собственные значения матрицы B (полученные, например, с помощью пакета MathCAD) равны 2,618 и 0,382, т.е. матрица положительно определенная (а значит, невырожденная). Квадрат длины вектора d есть квадратичная форма $|d|^2 = r \cdot B^{-1} \cdot r^T$. Найдем предварительно обратную матрицу B^{-1} :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Далее вычислим произведение}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 17. \text{ Значение } r_{00} = 17 \text{ является предельным для матрицы потоков } R. \text{ При } r_{00} = 17$$

матрица R становится вырожденной; ее значения матрицы равны 18,544; 1,456; 0 (т.е. в спектре матрицы появляется один ноль). Значит, при $r_{00} > 17$ матрица R не вырождена и может быть представлена геометрически как репер векторов, заданный метрическим тензором Римана.

В заключение отметим следующее. Данная работа является развитием и конкретизацией обобщенного понятия тензора цифровых потоков открытой анизотропной сети, описанного в литературе. В частности, исследован случай симметричных потоков в изотропной сети, для которых матрица потоков является положительно определенной вещественной симметрической матрицей. Такая матрица удовлетворяет определению метрического тензора Римана для вещественного евклидова пространства с римановой метрикой. Геометрической интерпретацией римановой метрики является невырожденная система векторов, исходящих из общей точки (обозначенная в работе как репер векторов).

$$R(n, m) = \begin{matrix} & \begin{matrix} m \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ ? & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Рисунок 5 – Значения матрицы цифровых потоков сети

$$R(n, m) = \begin{matrix} & \begin{matrix} m \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ ? & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Рисунок 6 – Значения матрицы цифровых потоков сети

В работе сформулирована аксиома геометризации для матрицы цифровых потоков в открытой изотропной телекоммуникационной сети с симметричными потоками. Доказана теорема о необходимом и достаточном условии для выполнения аксиомы геометризации. В качестве примеров, рассмотрены некоторые частные случаи геометризации матрицы потоков в трехмерном евклидовом пространстве для простой сети, в которой выделен один центральный объект и два других объекта, которые взаимодействуют между собой и с центральным объектом.

Полученное в работе геометрическое представление матрицы потоков сети в виде репера векторов соответствует функции инвариантности $J(C) = R$, где R – неотрицательная вещественная симметрическая матрица потоков, представленная в форме квадратов амплитуд. Функция J входит в известное уравнение инвариантности $J(C) = J(C_0)$ для обобщенного тензора потоков сети.

Интерпретация матрицы потоков как метрического тензора Римана позволяет установить структурную и функциональную эквивалентность математических моделей для выделенного класса информационных процессов в сетях и класса геометрических объектов, для которых развит аппарат тензорного анализа. Таким образом, известные методы и результаты в области геометрии могут быть использованы при построении математических моделей информационных процессов в сетях.

Полученную в работе геометрическую форму тензорной модели для цифровых потоков целесообразно применять в задачах оптимального проектирования сетей и динамического управления сетевыми ресурсами, которые требуют совместного учета структурных и функциональных свойств сетевого оборудования, каналов связи и процессов в сетях. Дальнейшим развитием полученной в работе тензорной модели потоков в сетях может быть исследование асимметричных потоков в комплексных евклидовых и неевклидовых пространствах, а также построение тензорных моделей сети с другими функциями инвариантности.

Литература

1. *Свами М.* Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
2. *Зайцев Д.А.* Синтез моделей Петри телекоммуникационных протоколов / Д.А.Зайцев // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С.Попова. – 2005. – № 2. – С. 36-42.
3. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями / Клейнрок Л. – М.: Мир, 1979. – 600 с.
4. *Guizani M., Rayes A., Khan B., Al-Fuqaha A.* Queuing Theory, in Network Modeling and Simulation: A Practical Perspective. – Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2010. – Chapter 9. – P. 197-233. – doi: 10.1002/9780470515211.ch9.
5. *Arnold O. Allen.* Probability, Statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications. – Orlando, FL, USA: Academic Press, Inc., 1978. – ISBN 0120510502.
6. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ / Рашевский П.К. – М.:Наука, 1967. – 664 с.
7. *Шапуков Б.Н.* Дифференциальная геометрия и основы тензорного анализа. Казанский государственный университет: курс лекций для студентов механико-математического факультета. – Режим доступа: <http://www.ksu.ru/f5/shapukov/0-CONTENT.pdf> .
8. *Шарипов Р.А.* Быстрое введение в тензорный анализ. – Режим доступа: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Sharipov2004ru.pdf> .
9. *Поповский В.В.* Тензорный анализ в задачах системного исследования телекоммуникационных систем / В.В.Поповский, А.В. Лемешко // Радиотехника. – 2002. – Вып. 125. – С. 156-164.
10. *Пасечников И.И.* Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей / Пасечников И.И. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 216 с.
11. *Лемешко О.В.* Теоретичні основи управління мережними ресурсами з використанням тензорних математичних моделей телекомунікаційних систем: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. докт. техн.наук / Лемешко Олександр Віталійович. – Харків, 2005. – 37 с.
12. *Кутергин В.А.* Тензорный метод построения моделей пространства инфокоммуникационных сетей / В.А. Кутергин, А.С. Шадрин // Электронный журнал "Вычислительные сети. Теория и практика". – 2009. – № 2 (15):4.3. – Режим доступа: <http://network-journal.mpei.ac.ru/cgi-bin/main.pl?l=ru&n=15&pa=4&ar=3>
13. *Петров А.Е.* Тензорный метод Крона, LT метод Бартини-Кузнецова и двойственные сети / А.Е. Петров // Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление». – 2010. – Том 6. – № 4 (9), ст. 2. – С. 13-32.
14. *Тихонов В.И.* Комплексная тензорная модель анизотропной телекоммуникационной сети. Електронний журнал «Проблеми телекомунікацій» – ХНУРЕ.
15. *Дж.Келли.* Общая топология / Келли Дж. – М.: Наука, 1968, 384 с.
16. *Болтянский В.Г.* Наглядная топология / В.Г. Болтянский, В.А. Ефремович; под ред. С.П. Новикова. – М.: Наука [Главная редакция физико-математической литературы], 1982. – 148 с.
17. *Корн Г.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

18. *Тихонов В.И.* Фрактальная топологическая модель открытой телекоммуникационной сети // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С.Попова. – 2010. – № 1. – С. 49-58.