УДК 621. 371:621. 372

Дмитриева И. Ю.
Дмитрієва І. Ю.
Dmitrieva I. Yu.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА С ПОМОЩЬЮ МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА

РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ЛАНДАУ-ЛІФШИЦЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ РІМАНА

SOLUTION OF THE LANDAU-LIFSHITZ EQUATION BY MEANS OF THE MATRIX RIEMANN PROBLEM

Аннотация. Рассматривается обобщенное уравнение Ландау-Лифшица (Л.-Л.) в случае полной анизотропии, описывающее динамику намагниченности ферромагнитных образцов в магнитном поле, а также процесс распространения в ферромагнетике низкочастотных спиновых волн. Указанные материалы применяются для создания невзаимных волновых устройств.

Аналитическое исследование данного уравнения реализуется посредством конструктивного решения соответствующей матричной задачи Римана. Предложенный общий подход отличается от хорошо известных направлений по изучению Л.-Л. уравнения и при этом согласуется с основным методом, базирующимся на краевой задаче Римана-Гильберта.

Анотація. Розглядається узагальнене рівняння Ландау-Ліфшиця (Л.-Л.) у випадку повної анізотропії, яке описує динаміку намагнечіності феромагнітних зразків у магнітному полі, а також процес розповсюджування у феромагнетиках низькочастотних спінових хвиль. Зазначені матеріали використовуються для утворення невзаємних хвильових пристроїв.

Аналітичне дослідження даного рівняння реалізується через конструктивне розв'язання відповідної матричної задачі Рімана. Запропонований загальний підхід відрізняється від добре відомих напрямків з вивчення Л.-Л. рівняння і при цьому погоджується з основним методом, який базується на крайовій задачі Рімана-Гільберта.

Summary. The generalized Landau-Lifshitz (L.-L.) equation is considered in the case of complete anisotropy, describes the dynamics of magnetization of the ferromagnetic patterns in magnetic field and the process of the low-frequent spin ware propagation in ferromagnetics. The specified materials are used in the creation of nonreciprocal wave devices.

Analytical investigation of the given equation is done by means of the explicit solution of the corresponding matrix Riemann problem. The suggested general approach differs from the well-known tendencies of the L.-L. equation's study and simultaneously is in conformity with the main method that is based on the boundary Riemann-Hilbert problem.

Уравнение Ландау-Лифшица (Л.-Л.), полученное Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшицем в 1935 году, является макроскопическим уравнением бездиссипативного движения вектора намагниченности ферромагнетика в магнитном поле и изначально предлагалось для описания изменения со временем намагниченности $\vec{M}$ однодоменного магнитного образца [1]. Здесь необходимо подчеркнуть, что указанные материалы применяются для создания невзаимных волновых устройств [2].

Л.-Л. уравнение является эволюционным, т.е. допускает истолкование как запись дифференциального закона развития (эволюции) некоторого процесса во времени. В данном случае речь идет об описании эволюции электронной намагниченности ферромагнитных образцов различной формы в правильно подобранном эффективном магнитном поле $\vec{H}$, причем вектор $\vec{M}$ под действием момента $[\vec{M},\vec{H}]$ прецессирует. Последний факт означает, что в ферромагнетике могут распространяться низкочастотные спиновые волны. Эффективное магнитное поле $\vec{H}$ представляет собой сумму внешнего магнитного поля и полей магнитостатического, обменного взаимодействий и анизотропии.

На протяжении последних двадцати лет область применимости Л.-Л. уравнения оставалась неизменной [1…6]. В настоящее время значимость этого уравнения проявилась в его новых приложениях к процессам переноса спинового момента в магнитных наноструктурах и стимулируется успехами в области создания элементов магнитной памяти MRAM (Magneto Resistive Random Access Memory), а также магнитных логических элементов [7].

Экспериментально обнаруженный новый механизм перемагничивания магнитных тел состоит в том, что протекающий через магнитную систему ток переносит не только заряд, но и спин, т.е.

является током момента импульса. При этом спиновая поляризация, совпадающая с ненулевым суммарным спиновым моментом, возникает по причине обменного взаимодействия при протекании тока через ферромагнетик. Изменение момента импульса поляризованного тока передается ферромагнетику за счет локального сохранения спина. В неоднородно намагниченных магнитных системах дивергенция потока спина влечет возникновение вращающего момента, действующего на намагниченность. Такой процесс называется «перенос спина» (spin transfer) и при определенных условиях может привести к перемагничиванию магнитных структур, генерации спиновых волн или движению доменных стенок [7].

Индуцированный спиновым током процесс изменений в вышеописанной неоднородно намагниченной системе аналитически приближенно описывается Л.-Л. уравнением [7].

Очевидно, что предложенный, даже столь краткий обзор значимости и области применения Л.-Л. уравнения в насущных задачах современной физики, инженерии и, в частности, технической электродинамики, подтверждает важность и необходимость изучения этого уравнения, в том числе и аналитическими математическими методами прикладного анализа.

Традиционно такой процедурой является так называемый метод обратной задачи теории рассеяния (МОЗР) [8], неизменно применявшийся при решении нелинейных волновых уравнений, и Л.-Л. уравнения в том числе [6]. Современной трактовкой МОЗР, как справедливо замечено в статье [6], является однородная векторная краевая задача Римана [9, 10], эффективно аналитически решающая задачи акустики, оптики и пр. (см. библиографию [6], [11]).

Тем не менее, при непосредственном применении данного аппарата исследования, решение Л.-Л. уравнения осуществлялось либо из физико-геометрических соображений исходной постановки задачи [6], либо базировалось лишь на конкретной математической формулировке [12]. В работе [7] изучение Л.-Л. уравнения проведено полностью на экспериментальной основе.

Однако, несмотря даже на применение МОЗР [8], основой которого служит векторная задача Римана [9, 10], нетрудно заметить, что указанные в литературе подходы не предлагают единого конструктивного математического исследования Л.-Л. уравнения.

Таким образом, целью настоящей статьи является реализация единого аналитического математического метода изучения нелинейных волновых уравнений, базирующегося на матричной задаче Римана и также явно решающего общее Л.-Л. уравнение для случая полной анизотропии [6].

1. Предварительные сведения и общая постановка задачи. Для понимания дальнейшего изложения необходимо напомнить следующие определения [11].

Определение 1. Всякой подстановке $\omega_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ взаимнооднозначно соответствует m-мерная квадратная матрица, состоящая из нулей и единиц такая, что в каждой ее k-й строке все элементы равны нулю, кроме одного, стоящего в j_k-м столбце и равного единице $(j_k, k = \overline{1,m})$. Такие матрицы называются подстановочными, и их связь с соответствующими подстановками можно продемонстрировать на следующем простом примере:

$$\omega_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В том случае, когда вместо единиц матричные элементы представляют гельдеровские функции, говорят о подстановочной матрице - функции.

Определение 2. Символ $h_0(L;R)$ обозначает класс вектор-функций, аналитичных всюду на алгебраической (замкнутой ориентируемой) римановой поверхности R за исключением конечной системы простых гладких разомкнутых контуров L, не пересекающихся между собой. Рассматриваемые вектор - функции ограничены на концах L, H – продолжимы на L справа и слева и допускают конечный порядок на бесконечности.

Определение 3. Матрица $X(u), u \in R$, порядка $m \times m$ называется канонической матрицей решений (к. м. р.) однородной краевой m-мерной векторной задачи Римана на R, если: a) $X(u)$ удовлетворяет данному граничному условию; b) определитель $X(u) - \det X(u)$ не имеет полюсов нигде в конечной части R и может обращаться в нуль только на концах системы контуров L; c) порядки столбцов на бесконечности $r_j\ (j=\overline{1,m})$ матрицы $X(u)$ уменьшить нельзя, т. е. $\underset{\infty}{ord}\ \det X(u)=\sum_{j=1}^{m} r_j$.

Матрица $X(u), u\in R$, порядка $m\times m$ называется нормальной матрицей решений (н. м. р.), той же самой однородной краевой векторной задачи Римана на поверхности R, если $X(u)$ удовлетворяет условиям a), b), но не удовлетворяет последнему условию c), т. е. $\underset{\infty}{ord}\ \det X(u)<\sum_{j=1}^{m} r_j$. Данное неравенство означает, что порядки столбцов на бесконечности $r_j\ (j=\overline{1,m})$ н. м. р. $X(u), u\in R$, можно понизить.

Далее, пусть поверхность R имеет конечный род $\rho\geq 0$. Ищется функция, аналитичная всюду на R , исключая конечное число точек ветвления

$$(\alpha_i, u(\alpha_i))\in R \quad (i=\overline{1,n}), \tag{1}$$

при обходе которых значения $f(z,u)$ претерпевают соответствующие m -мерные подстановки

$$T_i=\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j_1^{(i)} & \dots & j_m^{(i)} \end{pmatrix}=(j_1^{(i)}\dots j_m^{(i)}),\ \ (j_k,\, k=\overline{1,m};\, i=\overline{1,n}). \tag{2}$$

Поиск неизвестной многозначной (здесь m -значной) функции $f(z,u)$ по ее группе монодромии (1), (2) [9] и в предположении конечного порядка на бесконечности приводит к решению соответствующей однородной краевой матричной задачи Римана [10] в классе m – мерных вектор – функций $F(z,u)=\{F_j(z,u)\}_{j=1}^{m}\in h_0(L,R)$.

Здесь

$$L=\sum_{i=1}^{n} L_i,\, L_l\cap L_k=\varnothing\ (l\neq k;\, l,k=\overline{1,n}), \tag{3}$$

и все концы разомкнутых кривых $L_i\,(i=\overline{1,n})$ расположены в соответствующих точках ветвления (1). Кроме того, каждая скалярная компонента $F_j(z,u)\ (j=\overline{1,m})$ является j -й $(j=\overline{1,m})$ ветвью изначально искомой m -значной функции $f(z,u)$ над поверхностью R , а сама вектор-функция $F(z,u)$ удовлетворяет следующему граничному условию

$$F^{+}(t,v)=M(t,v)F^{-}(t,v),\ (t,v)\in L,\ D^{-1}\,|\,(F). \tag{4}$$

В выражении (4): $F^{\pm}(t,v)$ – граничные значения $F(z,u)$ слева и справа на системе контуров (3); $D-m-$мерный вектор–дивизор бесконечностей на R , имеющий конечный порядок, и символ $D^{-1}\,|\,(F)$ означает кратность вектор - функции $F(z,u)$ этому дивизору [13]. В случае поверхности R нулевого рода $\rho=0$, топологически эквивалентной комплексной плоскости, либо когда R совпадает с ней, условие $D^{-1}\,|\,(F)$ не рассматривается, и решение исходной задачи (1)…(4) предлагаемым здесь методом существенно упрощается. Далее, коэффициент $M(t,v)$ граничного условия (4) имеет вид

$$M(t,v)=\sum_{i=1}^{n} M_i(t,v)\delta(t,v;L_i),\ \delta(t,v;L_i)=\begin{cases}1,(t,v)\in L_i \\ 0,(t,v)\in L\setminus L_i\end{cases}\quad (i=\overline{1,n}), \tag{5}$$

где $M_i\,(i=\overline{1,n})$– подстановочная матрица порядка $m\times m$, порожденная соответствующей подстановкой $T_i\ (i=\overline{1,n})$ из формул (2).

Простота или сложность исследования задачи (1)…(5) зависит от того, коммутативен ли матричный коэффициент (5), либо нет. Коммутативность означает здесь, что существует линейное преобразование, постоянное всюду на системе разомкнутых контуров (3) и приводящее все матрицы $M_i\ (i=\overline{1,n})$ из выражения (5) к диагональному виду [14]. В этом случае исходная векторная задача (1)…(5) очевидным образом сводится к эквивалентной системе m скалярных однородных краевых задач Римана на поверхности R относительно неизвестных компонент $F_j(z,u)\ (j=\overline{1,m})$ искомой вектор - функции $F(z,u)\in h_0(L;R)$.

Конструктивное решение таких задач полностью изучено и хорошо известно [15…17].

Кроме того, необходимо напомнить, что явное решение векторной задачи (1)…(5) с m-мерным подстановочным матричным коэффициентом на поверхности R влечет построение алгебраического уравнения m-листного накрытия R [9, 10]. Последний момент не менее важен для инженерных и физических приложений, нежели сама векторная задача Римана (1) …(5), и подтверждается современной прикладной проблематикой, в том числе и работы [6], связанной с общим случаем Л.-Л. уравнения для условий полной анизотропии.

2. Решение матричной задачи Римана для общего Л.-Л. уравнения в случае полной анизотропии. Как отмечено ранее, в работе [6] исследовано общее Л.-Л. уравнение в случае полной анизотропии, и требуемое решение представлено в виде конечнозонной функции [18] Ψ. Последняя определена с помощью построения двулистного накрытия тора T с заданными точками ветвления и является решением матричной задачи Римана со следующим граничным условием

$$\Psi^+(\tau)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Psi^-(\tau),\ \tau\in L=L_1\cup L_2,\ L_1\cap L_2=\varnothing,\ L_1=\bigcup_{i=1}^{g}(p_i,q_i),\ L_2=\bigcup_{i=1}^{g}(p_i+2iK`,q_i+2iK`),\ (6)$$

где T – это тор со сторонами $2K,4iK`\ (i=\overline{1,g})$.

Затем в статье [6] найдена пара Γ_1,Γ_2 различных двулистных накрытий T с одними и теми же точками ветвления и похожими уравнениями:

$$\begin{gathered}\Gamma_1: W_1^2=R(u),\ R(u)=B(u)B(u-2iK`),\\ B(u)=\prod_{i=1}^{g}(\xi(u-p_i)-\xi(u-q_i)+2\xi(\frac{p_i-q_i}{2})),\ u\in T.\end{gathered}\qquad(7)$$

В (7): $\xi(u)$-дзета-функция Вейерштрасса, задаваемая тором T [19], а Γ_2 строится аналогично Γ_1 в соответствии с заменой p_1 на значения $p_1+2iK`$.

Хотя формулы (7) получены удачным подбором из физико-геометрических соображений, как отмечено в статье [6], сами неизвестные скалярные компоненты $\Psi_i\ (i=1,2)$ искомой вектор-функции Ψ из задачи (6) определены после длительных трудоемких математических рассуждений и доказательств.

При этом явный вид Ψ представлен только для минимальных значений $g=1,2$ (см. (6)). Последующие случаи произвольного возрастания g оставлены в работе [6] вне рассмотрения, возможно, в силу своей необозримости.

Предлагаемая далее конкретная реализация задачи (1)…(5) позволяет решить аналитически Л. - Л. уравнение из статьи [6] более простыми методами прикладного анализа, согласуется с выводами [6] и включает (6), (7) как частный случай нижерассмотренных результатов.

Итак, ищется вектор - функция $F(z,u)=\{F_i(z,u)\}_{i=1}^{2}\in h_0(L;R_T)$, где R_T - тор рода $\rho=1$, заданный уравнением

$$u^2=\prod_{l=1}^{2}(z-a_l)(z-b_l),\qquad(8)$$

а

$$L=\bigcup_{i=1}^{n}L_i=\bigcup_{i=1}^{n}(\alpha_i,v(\alpha_i);\beta_i,v(\beta_i)),\ v^2=\prod_{l=1}^{2}(t-a_l)(t-b_l),-\qquad(9)$$

система разомкнутых контуров, описанных формулами (3). Концы $L_i\ (i=\overline{1,n})$ из выражения (9) являются точками ветвления функции $F(z,u)$ с общим законом обхода, определяемым подстановкой $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=(1\quad 2)$. Искомая вектор-функция $F(z,u)$ удовлетворяет следующему граничному условию

$$F^{+}(t,v)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}F^{-}(t,v),\ \ (t,v)\in L,\ D^{-1}\big|(F). \qquad (10)$$

Здесь: v - из выражения (9); D - двумерный вектор-дивизор бесконечностей конечного порядка на R_T, а значения всех остальных понятий и символов раскрыты при общей постановке задачи (1) - (5).

Очевидно, что матричный коэффициент в (10) коммутативен как простейший случай циклической абелевой группы подстановок второго порядка [13]:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^2=I=diag(1,1).$$

Таким образом, неизвестное линейное преобразование S, постоянное всюду на контурах из формул (9), легко определяется с помощью выводов работы [14]. При этом S совпадает со своим обратным S^{-1} и диагонализирует данную матрицу $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$:

$$S=S^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ SS^{-1}=S^{-1}S=I. \qquad (11)$$

С учетом (11) граничное условие (10) можно переписать так

$$(S^{-1}S)F^{+}(t,v)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}(S^{-1}S)F^{-}(t,v),\ \ (t,v)\in L,\ D^{-1}\big|(F). \qquad (12)$$

После введения вспомогательного обозначения

$$\Phi(z,u)=SF(z,u) \qquad (13)$$

выражение (12) принимает вид

$$\Phi^{+}(t,v)=\left(S\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}S^{-1}\right)\Phi^{-}(t,v),\ \ (t,v)\in L,\ D^{-1}\big|(\Phi). \qquad (14)$$

При перемножении матриц в коэффициенте условия (14) последнее сводится к эквивалентной системе двух скалярных однородных краевых задач Римана относительно компонент новой неизвестной вектор - функции (13):

$$\Phi^{+}(t,v)=diag(-1,1)\Phi^{-}(t,v),\ (t,v)\in L,\ D^{-1}\big|(\Phi). \qquad (15)$$

Согласно хорошо известным результатам [15…17], [11], искомые решения системы (15) таковы:

$$\Phi_2(z,u)=\text{const}=1,\ \ (z,u)\in R_T, \qquad (16)$$

$$\Phi_1(z,u)=\varphi_1(z,u)\chi(z,u),\ (z,u)\in R_T, \qquad (17)$$

где каноническая функция $\chi(z,u)$ [15 … 17] имеет следующую структуру

$$\chi(z,u)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_L dw-\int_{(z^*,\xi^*)}^{(m_1,\mu_1)}dw+\sum_{i=1}^{n}\int_{(z^*,\xi^*)}^{(\alpha_i,v(\alpha_i))}dw\right\}. \qquad (18)$$

В выражении (18): dw - разрывной аналог ядра типа Коши на торе R_T [16]; (z^*,ξ^*) – произвольная точка тора R_T; u,v задаются уравнениями (8), (9) соответственно; точки ветвления $(\alpha_i,v(\alpha_i))\ (i=\overline{1,n})$ - из формул (1), (3), (9), а точка (m_1,μ_1) определяется посредством проблемы обращения Якоби [16, 17] и представляется через эллиптические функции Якоби [16], [20].

Доказано [11], [21], что функция $\varphi_1(z,u)$ может задаваться двумя возможными способами:

$$\varphi_1(z,u)=\varphi_{1j}(z,u)\ (j=1,2);\ \varphi_{11}(z,u)=d_1(z),\ \varphi_{12}(z,u)=s_0(z)+u;\ \underset{\infty}{ord}\,\varphi_{11}=1,\ \underset{\infty}{ord}\,\varphi_{12}=2, \qquad (19)$$

где $d_i(z), s_0(z)$ – известные полиномы от комплексной переменной z степеней 1, 0 соответственно; u – из уравнения (8), а символ $\underset{\infty}{ord}$, как обычно, означает порядок на бесконечности.

Таким образом, первая скалярная задача из системы (15) имеет два решения, первое из которых - $\varphi_{11}(z,u)$формирует к. м. р. этой системы. Второе – $\varphi_{12}(z,u)$служит основой для построения н. м. р. той же самой задачи. Оба вывода полностью согласуются с известными фактами работ [13], [11].

Очевидно [11], что соответствующие к. м. р. и н. м. р. в случае (15) таковы:

$$Y_j(z,u) = diag(\Phi_{1j}(z,u),1), \quad \Phi_{1j}(z,u) = \varphi_{1j}(z,u)\chi(z,u) \quad (j=1,2), \tag{20}$$

где функции $\varphi_{1j}(z,u)$ $(j=1,2)$ и $\chi(z,u)$ – из формул (19) и (18).

Далее на основании выражений (11), (13), (20), к. м. р. и н. м. р. исходной векторной задачи (10) записываются в виде:

$$X_j(z,u) = S^{-1}Y_j(z,u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\Phi_{1j}(z,u) & 1 \\ \Phi_{1j}(z,u) & 1 \end{bmatrix} \quad (j=1,\,2), \tag{21}$$

откуда неизвестные компоненты искомой вектор-функции $F(z,u)$ из задачи (10) определяются с помощью следующих формул

$$F_{1j}(z,u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\Phi_{1j}(z,u)+1\right), \quad F_{2j}(z,u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi_{1j}(z,u)+1\right) \quad (j=1,2). \tag{22}$$

Последние порождают два соответствующих алгебраических уравнения двулистного накрытия тора R_T с одними и теми же точками ветвления:

$$\eta^2 + c_{1j}(z,u)\eta + c_{2j}(z,u) = 0; \; c_{1j}(z,u) = -\left(F_{1j}(z,u)+F_{2j}(z,u)\right) = \sqrt{2},$$
$$c_{2j}(z,u) = F_{1j}(z,u)F_{2j}(z,u) = \left(1-\Phi_{1j}^2(z,u)\right)/\,2 \quad (j=1,2) \tag{23}$$

и функциями $F_{ij}(z,u)$ $(i,j=1,2)$ – из выражений (22).

Тогда единое алгебраическое уравнение двулистного накрытия тора R_T, объединяющее оба возможных варианта (23), представляется в такой форме

$$W^2 - \Phi_{1j}^2(z,u) = 0 \; (j=1,2), \quad W = \sqrt{2}\eta - 1 \tag{24}$$

и согласуется с результатами (7) статьи [6]. Кроме того, формула (24) включает постановку (6) как частный случай в предложенном методе решения задач (1) … (5) и (8) … (10).

Таким образом, общее Л.-Л. уравнение в случае полной анизотропии, рассмотренное в работе [6], исследовано в настоящей статье конструктивно с помощью общего метода решения соответствующей задачи Римана. Как следует из исходных положений (1) … (5), предложенный здесь подход позволяет эффективно решать достаточно широкий класс задач технической электродинамики с подстановочными матрицами более высокого порядка, чем 2×2. При этом в отличии от традиционного сведения матричной задачи Римана к системе интегральных уравнений (см. библиографию [6], [8]), данный разрабатываемый метод позволяет получать точное, а не приближенное решение, и при этом более простым и доступным путем в терминах к. м. р. (см. определение 3).

Следовательно, поставленный вопрос о реализации единого аналитического математического метода исследования нелинейных волновых уравнений и основанного на матричной задаче Римана, изучен в данной статье для общего Л.-Л. уравнения в случае полной анизотропии. Поскольку требуемое решение представлено в явном виде, цель настоящей работы достигнута. Полученные результаты подтверждают важность развития метода векторной задачи Римана с подстановочными коэффициентами как имеющего ярко выраженный прикладной характер.

В заключении следует отметить, что краткое изложение вышеприведенных исследований анонсировано в статье [21].

Литература

1. *Ландау Л. Д.* Собрание трудов. Т. 1 / Ландау Л. Д. – М.: Наука, 1969. – С. 127 - 143.
2. *Пименов Ю. В.* Техническая электродинамика / Пименов Ю. В., Вольман В. И., Муравцов А. Д. – М.: Радио и связь, 2002. – 536 с.
3. *Скроцкий Г. В.* Еще раз об уравнении Ландау-Лифшица / Г. В. Скроцкий // Успехи физических наук. – 1984. – Т. 144. – Вып. 4. – С. 681 – 686.
4. *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках / Гуревич А. Г. – М.: Наука, 1973. – 592 с.
5. *Макомбер Дж.* Динамика спектроскопических переходов / Макомбер Дж. – М.: Мир, 1979. – 347 с.

6. *Бобенко А. И.* Вещественные алгебро - геометрические решения уравнения Ландау-Лифшица в тета-функциях Прима / А. И. Бобенко // Функциональный анализ и его приложения. – 1985. – Т. 19. – Вып .1. – С. 6 – 19.
7. *Звездин А. К.* Обобщенное уравнение Ландау-Лифшица и процессы переноса спинового момента в магнитных наноструктурах / А. К. Звездин, К. А. Звездин, А. В. Хвальковский // Успехи физических наук. – 2008. – Т. 178. – № 4. – С. 436 – 442.
8. *Захаров В. Е.* Теория солитонов. Метод обратной задачи; под ред. С. П. Новикова / Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
9. *Риман Б.* Сочинения / Риман Б. – М. – Л.: ОГИЗ, 1948. – 543 с.
10. *Plemelj I.* Riemannsche Funktionen scharen mit gegebener Monodromien Gruppe / I. Plemelj // Monatsh. Math. Phys. – 1908. – Vol. 19. – P. 211 – 215.
11. *Dmitrieva I.* On some generalizations of the classical Riemann problem / I. Dmitrieva // Proc. of the 6th Intern. Congress on Industrial and Applied Math. (ICIAM 07) and GAMM Annual Meeting, Zurich, 2007. – PAMM. – Published on-line 21.05.09. – Vol.7. – Issue 1 (Special Issue). – P. 2160003 – 2160004.
12. *Тайманов И. А.* Уравнение Ландау-Лифшица и четверные секущие многообразий Прима / И. А. Тайманов // Функциональный анализ и его приложения. – 1993. – Т. 27. – Вып. 3. – С. 90 – 92.
13. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций / Чеботарев Н. Г. – М.–Л.: ОГИЗ, 1948. – 396 с.
14. *Морозов В. В.* О некоммутативных матрицах / В. В. Морозов // Научные заметки Казанского университета. – 1952. – Т. 112. – Вып. 9. – С. 17 – 20.
15. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи / Гахов Ф. Д. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
16. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровсих классах на римановых поверхностях / Э. И. Зверович // Успехи математических наук. – 1971. – Т. 26. - № 1. – С. 113 – 179.
17. *Чибрикова Л. И.* Краевые задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях / Л. И. Чибрикова // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - Т. 18. – М.: Наука, 1980. – С. 3 – 66.
18. *Математическая энциклопедия;* под ред. И. М. Виноградова. – Т. 3. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – С. 30 – 31.
19. *Математическая энциклопедия;* под ред. И. М. Виноградова. – Т. 1. – М.: Советская энциклопедия, 1977. – С. 621 – 623.
20. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
21. *Dmitrieva I.* Vector boundary Riemann problems in soliton theory / I. Dmitrieva // Proc. of the Internat. Scient. Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory (MMET10). – IEEE, 2010. – Print ISBN: 978 – 1 – 4244 – 8859 – 9. – DOI: 10.1109 / MMET. 2010. 5611433. – P. 1 – 4.