УДК 621.372

Иваницкий А. М.
Іваницький А. М.
Ivanitckiy A. M.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ *R*, *L*, *C*-ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ЭКСПОГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ *R*, *L*, *C*-ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПРИ ЕКСПОГАРМОНІЙНИХ ДІЯХ

INVESTIGATION OF THE PROPERTIES OF THE *R*, *L*, *C*-ELEMENTS OF THE THEORY OF THE ELECTRICAL CIRCUITS WITH THE EXPOFUNCTIONAL EXCITATIONS

Аннотация. Проведено исследование энергетических свойств *R, L, C*-элементов теории электрических цепей при экспогармонических воздействиях. Введено понятие средней активной мощности в интервале времени. Показано, что это понятие тесно связано с действием, которое характеризует электрическую энергию.

Анотація. Проведено дослідження енергетичних властивостей *R, L, C*-елементів теорії електричних кіл при експогармонійних діях. Запроваджено поняття середньої активної потужності в інтервалі часу. Показано,що це поняття близько пов’язано з дією, яка характеризує електричну енергію.

Summary. Investigation of the energetical properties of the *R, L, C*-elements of the theory of the electrical circuits with the expofunctional excitations is done. The notion of the middle active power in an interval of a time is given. It is shown that this concept is closely related to the action, which characterizes the electrical energy.

Развитие теории электрических цепей при экспофункциональных воздействиях [1 – 4] постоянно требует решения проблемы согласования указанного раздела теории с общей теорией электрических цепей. Это связано с тем, что экспофункциональные воздействия порождают новое явление материального мира – явление выделения активной мощности реактивными элементами электрической цепи [5]. Традиционные подходы к исследованию электрических цепей уже в её основах требуют существенного дополнения. Это прежде всего наблюдается при рассмотрении энергетических свойств *R*, *L*, *C*-элементов электрических цепей, которые достаточно полно описаны в литературе (см., например, [6]) при воздействии на эти элементы сигналами, описываемыми обычными функциями, в том числе и гармоническими; при таких воздействиях указанное выше явление не возникает. Из анализа результатов, описанных в статье [7], где рассмотрена индуктивность L при экспогармоническом воздействии, следует необходимость в решении задачи окончательной записи энергетических свойств элементов электрической цепи без зависимости от нижней границы временного диапазона, которая наблюдается в выражении средней мощности на индуктивности.

Однако решение такой задачи не было описано в литературе. Поэтому целью данной статьи является исследование энергетических свойств *R*, *L*, *C*-элементов теории электрических цепей при экспогармонических воздействиях с получением окончательного результата без какой-либо зависимости от границ временного диапазона.

1. **Энергетические свойства *R*, *L*, *C*-элементов.** Пусть задана экспогармоническая функция во временном интервале $0 \le t \le T$ вида

$$f(t) = F_m e^{\pm \lambda t} \sin\omega t, \tag{1}$$

где $\lambda > 0$; $F_m > 0$; t – время;

$$\omega = \frac{2\pi}{T_s}, \tag{2}$$

здесь – период синусоиды, связанный с T соотношением

$$\frac{T}{T_s} = m \text{ – целое число.} \tag{3}$$

Предполагается, что функция вида (1) описывает сигнал как единичного импульса, так и первый период периодического сигнала. Энергетические свойства R, L, C-элементов электрической цепи рассмотрим в интервале

$$\Delta t = t_2 - t_1 = kT_s, \tag{4}$$

где $t_1 \geq 0$, $t_2 \leq T$; k — целое число; $k \leq m$.

Далее энергетические свойства рассмотрим для каждого элемента отдельно.

1.1. *Сопротивление при экспогармоническом воздействии.* Пусть ток сопротивления R, величина которого может быть либо больше нуля, либо меньше нуля, описывается функцией (1)

$$i_R(t) = I_{Rm}e^{\pm\lambda t}\sin\omega t. \tag{5}$$

Тогда по закону Ома напряжение на сопротивлении R можно получить

$$. \tag{6}$$

Отсюда, используя выражения (5) и (6), найдем мгновенную мощность [8] на сопротивлении R

$$p_R(t) = i_R(t)u_R(t) = RI_{Rm}^2 e^{\pm 2\lambda t}\sin^2\omega t. \tag{7}$$

Для дальнейших исследований удобно использовать среднее значение мгновенной мощности за промежуток времени $\Delta t = kT_s$ [7] или активную мощность за этот промежуток времени

$$P = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt. \tag{8}$$

Подставим в формулу (8) значение $p(t) = p_R(t)$, записанное по формуле (7), учтем условие (4) и проведем ряд преобразований

$$\begin{aligned}
P &= \frac{RI_{Rm}^2}{kT_S}\int_{t_1}^{t_2} e^{\pm 2\lambda t}\sin^2\omega t\,dt = \frac{RI_{Rm}^2}{2kT_S}\int_{t_1}^{t_1+kT_s} e^{\pm 2\lambda t}(1-\cos 2\omega t)dt = \frac{RI_{Rm}^2}{2kT_S}\left[\pm\frac{e^{\pm 2\lambda t}}{2\lambda}\right]_{t_1}^{t_1+kT_S} - \\
&- \frac{RI_{Rm}^2}{2kT_S}\left[\frac{e^{\pm 2\lambda t}}{4(\lambda^2+\omega^2)}(\pm 2\lambda\cos 2\omega t + 2\omega\sin 2\omega t)\right]_{t_1}^{t_1+kT_S} = \frac{RI_{Rm}^2}{2kT_S}\left[\pm\frac{1}{2\lambda}\left(e^{\pm 2\lambda(t_1+kT_S)} - e^{\pm 2\lambda t_1}\right)\right] - \\
&- \frac{RI_{Rm}^2}{2kT_S}\left[\frac{e^{\pm 2\lambda(t_1+kT_S)}}{4(\lambda^2+\omega^2)}(\pm 2\lambda\cos 2\omega(t_1+kT_S) + 2\omega\sin 2\omega(t_1+kT_S)) - \frac{e^{\pm 2\lambda t_1}}{4(\lambda^2+\omega^2)}(\pm 2\lambda\cos 2\omega t_1 + \right. \\
&\left. + 2\omega\sin 2\omega t_1)\right] = \pm\frac{RI_{Rm}^2}{2kT_S}e^{\pm 2\lambda t_1}\left(e^{\pm 2\lambda kT_S} - 1\right)\left[\frac{1}{2} \mp \frac{\lambda}{2(\lambda^2+\omega^2)}(\pm\lambda\cos 2\omega t_1 + \omega\sin 2\omega t_1)\right].
\end{aligned} \tag{9}$$

В работе [9] введено понятие добротности сигнала (1)

$$Q_c = \frac{\omega}{2\lambda}. \tag{10}$$

Используя это понятие, можно переписать выражение (9) в форме

$$P = \frac{RI_{Rm}^2}{2}\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\dfrac{2k\pi}{Q_c}}e^{\pm 2\lambda t_1}\left[1 \mp \frac{1}{1+4Q_c^2}(\pm\cos 2\omega t_1 + 2Q_c\sin 2\omega t_1)\right]. \tag{11}$$

Из выражений (9) и (11) видно, что в данном случае активная мощность является функцией от нижней границы интегрирования t_1 определенного интеграла (8), которую можно считать некоторой переменой τ. Поэтому найденная активная мощность

$$P = P(\tau), \tag{12}$$

где

$$\tau \equiv t_1. \tag{13}$$

Так как $Q_c > 0$, $e^{\pm 2\lambda\tau} > 0$,

$$\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}-1}{\pm\dfrac{2k\pi}{Q_c}} > 0, \tag{14}$$

(последнее следует из разложения показательной функции в степенной ряд [10]), то знак активной мощности определяется знаком сопротивления, т.е. если $R > 0$, то и $P > 0$, если $R < 0$, то и $P < 0$. В первом случае энергия поступает из цепи в сопротивление, во втором – из сопротивления в цепь [8].

В связи с тем, что активная мощность является функцией независимой временной переменной τ, т.е. величина активной мощности хотя и является либо положительной, либо отрицательной в любой момент времени, но не является постоянной, а зависит от выбора величины $\tau = t_1$. Это вносит определенные трудности в физическую трактовку рассматриваемого понятия при экспофункциональном воздействии. Для исключения возникшей трудности введем понятие средней активной мощности за промежуток времени $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$

$$P_{\text{ñð}} = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau_1}^{\tau_2} P(\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

Подставим в это выражение *P(τ)*, описанное формулой (11) с учетом обозначений (12) и (13), при $\tau_1 = 0,\ \tau_2 = \dfrac{T_S}{2},\ \Delta\tau = \dfrac{T_S}{2}$

$$P_{\text{ñð}} = \frac{RI_{Rm}^2}{2}\,\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}-1}{\pm\dfrac{2k\pi}{Q_c}}\int_0^{\frac{T_s}{2}} e^{\pm 2\lambda\tau}\left[1 \mp \frac{1}{1+4Q_c^2}\left(\pm\cos 2\omega\tau + 2Q_c\sin 2\omega\tau\right)\right]. \tag{16}$$

Раскрывая скобки под знаком определенного интеграла выражения (16) и записывая сумму интегралов, получим следующее выражение $P_{\text{ñð}}$

$$P_{\text{ñð}} = \frac{RI_{Rm}^2}{2}\,\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}-1}{\pm\dfrac{2k\pi}{Q_c}}\left[\int_0^{\frac{T_s}{2}} e^{\pm 2\lambda\tau}d\tau - \frac{1}{1+4Q_c^2}\int_0^{\frac{T_s}{2}} e^{\pm 2\lambda\tau}\cos 2\omega\tau\,d\tau \mp \frac{2Q_c}{1+4Q_c^2}\int_0^{\frac{T_s}{2}} e^{\pm 2\lambda\tau}\sin 2\omega\tau\,d\tau\right]. \tag{17}$$

В этом выражении записаны табличные интегралы, интегрируя которые по таблицам [11], после несложных преобразований получим формулу для расчета средней активной мощности

$$P_{\text{ñð}} = \frac{RI_{Rm}^2}{2}\,\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}-1}{\pm\dfrac{2k\pi}{Q_c}}\,\frac{e^{\pm\frac{\pi}{Q_c}}-1}{\pm\dfrac{\pi}{Q_c}}\left(1 - \frac{1}{\left(1+4Q_c^2\right)^2} + \frac{4Q_c^2}{\left(1+4Q_c^2\right)^2}\right). \tag{18}$$

Рассмотрим влияние величины добротности сигнала Q_c на *P* и $P_{\text{ñð}}$. Из выражения (10) видно, что при условии

$$\lambda \to 0 \qquad Q_c \to \infty\ . \tag{19}$$

В этом случае формулы (11) и (18) упрощаются и имеют вид

$$P = P_{\text{ñð}} = \frac{RI_{Rm}^2}{2}, \tag{20}$$

что соответствуют случаю гармонического воздействия на сопротивление [6, 8]. Из равенства (20) следует, что в этом случае введение средней активной мощности является излишним. Введение средней активной мощности необходимо только для экспогармонических воздействий. Однако на практике не всегда необходимо пользоваться для расчета P и $P_{\text{ср}}$ полными формулами (11) и (18). Так, для в формуле (18) выражение, стоящее в скобках, по величине приблизительно равно единице при относительной погрешности δ не более 1%. Поэтому можно рассчитывать по упрощенной формуле

$$P_{\text{ñð}} = \frac{RI_{Rm}^2}{2}\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\dfrac{2k\pi}{Q_c}}\frac{e^{\pm\frac{\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\dfrac{\pi}{Q_c}}\,. \tag{21}$$

Если , то $P_{\text{ñð}}$ можно считать по формуле

$$P_{\text{ñð}} = \frac{RI_{Rm}^2}{2}\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\dfrac{2k\pi}{Q_c}}\,, \tag{22}$$

а величину P — по формуле

$$P = \frac{RI_{Rm}^2}{2}\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\dfrac{2k\pi}{Q_c}}e^{\pm 2\lambda t_1}; \tag{23}$$

при этом в первом случае $\delta < 5\%$ (для формулы (22)), а во втором случае $\delta < 2\%$. При для k=1 следует считать по формуле (20) с погрешностью $\delta < 1\%$.

1.2. Индуктивность при экспогармоническом воздействии. Теперь рассмотрим элемент индуктивности L. Пусть ток индуктивности описывается функцией (1), который можно записать

$$i_L(t) = I_{Lm}e^{\pm\lambda t}\sin\omega t\,. \tag{24}$$

В этом случае напряжение на индуктивности можно рассчитать, используя формулу, определяющую элемент индуктивности [8],

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}\,, \tag{25}$$

а мгновенная мощность на индуктивности равна

$$p_L(t) = i_L(t)u_L(t)\,. \tag{26}$$

Подставим в формулу (8) выражение (26) вместо и учтем формулу (25)

$$P = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} p_L(t)dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} i_L(t)u_L(t)dt = \frac{L}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} i_L(t)\frac{di_L(t)}{dt}dt = \frac{L}{\Delta t}\int_{i_L(t_1)}^{i_L(t_2)} i_L(t)di_L(t) =$$

$$= \left.\frac{Li_L^2(t)}{2\Delta t}\right|_{i_L(t_1)}^{i_L(t_2)} = \frac{L}{2\Delta t}\left[i_L^2(t_2) - i_L^2(t_1)\right]. \tag{27}$$

Подставив выражение (24) в формулу (27), можно рассчитать активную мощность на индуктивности с учетом (4) по формуле

$$P = \frac{LI_{Lm}^2}{2kT_S}\left(e^{\pm 2\lambda t_2}\sin^2\omega t_2 - e^{\pm 2\lambda t_1}\sin^2\omega t_1\right) = \frac{LI_{Lm}^2}{2kT_S}\left(e^{\pm 2\lambda(t_1 + kT_S)}\sin^2(\omega t_1 + \omega kT_S) - e^{\pm 2\lambda t_1}\sin^2\omega t_1\right) =$$

$$= \frac{LI_{Lm}^2}{2kT_S}\left(e^{\pm 2\lambda kT_S} - 1\right)e^{\pm 2\lambda t_1}\sin^2\omega t_1\,, \tag{28}$$

или, используя понятие (10), активная мощность на индуктивности равна

$$P = \pm\lambda LI_{Lm}^2\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\dfrac{2k\pi}{Q_c}}e^{\pm 2\lambda t_1}\sin^2\omega t_1. \tag{29}$$

Из формулы (29) видно, что P сильно зависит от t_1, поэтому, заменив t_1 на τ в формуле (29), получим выражение для $P(\tau)$, которое подставим в формулу (15). В результате запишем среднюю активную мощность на индуктивности

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau_1}^{\tau_2} P(\tau)\,d\tau = \pm\lambda L I_{Lm}^2 \frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}-1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\pm 2\lambda\tau}\sin^2\omega\tau\,d\tau. \qquad (30)$$

Интеграл в выражении (30) является табличным, поэтому, используя таблицы неопределенных интегралов [11], запишем выражение при $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \frac{T_S}{2}$ $\Delta\tau = \frac{T_S}{2}$,

$$P_{\text{ср}} = \pm\frac{2\lambda L I_{Lm}^2}{T_S}\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}-1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}\left[\frac{e^{\pm 2\lambda\tau}}{4(\lambda^2+\omega^2)}\left(\pm\frac{\lambda^2+\omega^2}{\lambda}\mp\cos 2\omega\tau-\omega\sin 2\omega\tau\right)\right]_0^{\frac{T_S}{2}} =$$

$$= \pm\frac{2\lambda L I_{Lm}^2}{T_S}\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}-1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}\left[\frac{e^{\pm\lambda T_S}}{4(\lambda^2+\omega^2)}\left(\pm\frac{\lambda^2+\omega^2}{\lambda}\mp\lambda\right)-\frac{1}{4(\lambda^2+\omega^2)}\left(\pm\frac{\lambda^2+\omega^2}{\lambda}\mp\lambda\right)\right] =$$

$$= \pm\frac{\lambda L I_{Lm}^2}{2}\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}-1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}\frac{e^{\pm\frac{\pi}{Q_c}}-1}{\pm\frac{\pi}{Q_c}}\frac{4Q_c^2}{1+4Q_c^2}. \qquad (31)$$

Если $Q_c \geq 5$, то $P_{\text{ср}}$ можно рассчитать по упрощенной формуле с $\delta < 1\%$

$$P_{\text{ср}} = \pm\frac{\lambda L I_{Lm}^2}{2}\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}-1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}\frac{e^{\pm\frac{\pi}{Q_c}}-1}{\pm\frac{\pi}{Q_c}}; \qquad (32)$$

если же $Q_c \geq 30$, то $P_{\text{ср}}$ можно считать с точностью $\delta < 5\%$ по формуле

$$P_{\text{ср}} = \pm\frac{\lambda L I_{Lm}^2}{2}\frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}-1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}}. \qquad (33)$$

Для $Q_c \geq 300$ $P_{\text{ср}}$ для $k = 1$ можно считать с точностью $\delta < 1\%$ по формуле

$$P_{\text{ср}} = \pm\frac{\lambda L I_{Lm}^2}{2}. \qquad (34)$$

Сравнивая формулы (21) и (32), (22) с (33) и (20) с (34), видим, что они попарно совпадают при условии

$$R = \pm\lambda L. \qquad (35)$$

Это говорит о том, что средняя активная мощность на индуктивности при экспогармоническом воздействии равна средней активной мощности на сопротивлении при том же воздействии и выполнении условия (35). Верхний знак в условии (35) соответствует величине $R > 0$, а нижний – величине $R < 0$.

1.3. Емкость при экспогармоническом воздействии. При нахождении энергетических свойств емкости C, воспользуемся принципом дуальности [8]. В этом случае и постановка задачи должна быть сформулирована в дуальной форме, т.е. вместо заданного тока индуктивности L нужно задавать напряжение на емкости C.

Итак, пусть напряжение на емкости описывается функцией (1), т.е.

$$u_C(t) = U_{Cm}e^{\pm\lambda t}\sin\omega t, \qquad (36)$$

а ток емкости имеет вид [8]

$$i_C(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}. \qquad (37)$$

Тогда по принципу дуальности активная мощность на емкости за промежуток времени равна

$$P = \pm\lambda C U_{Cm}^2 \frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} e^{\pm 2\lambda t_1} \sin^2 \omega t_1, \quad (38)$$

а средняя активная мощность на емкости за промежуток времени $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$, при $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \frac{T_S}{2}$ можно рассчитать по формуле

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pm\lambda C U_{Cm}^2}{2} \frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} \frac{e^{\pm\frac{\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{\pi}{Q_c}} \frac{4Q_c^2}{1+4Q_c^2}. \quad (39)$$

Упрощенные формулы, дуальные формулам (32), (33) и (34), можно записать, заменив в исходных формулах величину на :

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pm\lambda C U_{Cm}^2}{2} \frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} \frac{e^{\pm\frac{\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{\pi}{Q_c}} \quad (Q_C \geq 5,\ \delta < 1\%), \quad (40)$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pm\lambda C U_{Cm}^2}{2} \frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} \quad (Q_C \geq 30,\ \delta < 5\%), \quad (41)$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pm\lambda C U_{Cm}^2}{2} \quad (Q_C \geq 300 \text{ при } k{=}1,\ \delta < 1\%). \quad (42)$$

Условие, дуальное условию (35), можно записать

$$G = \pm\lambda C, \quad (43)$$

где $G = \frac{1}{R}$ – проводимость, поэтому требуется найти дуальную формулу для средней активной мощности на сопротивлении R (см. выражение (18)). Из формулы (18) видно, что в ней необходимо заменить величину на величину ; в результате получим её дуальный аналог

$$P_{\text{ср}} = \frac{G U_{Gm}^2}{2} \frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} \frac{e^{\pm\frac{\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{\pi}{Q_c}} \left(1 - \frac{1}{\left(1+4Q_c^2\right)^2} + \frac{4Q_c^2}{\left(1+4Q_c^2\right)^2}\right). \quad (44)$$

Отсюда следуют упрощенные формулы, дуальные формулам (21),(22) и (20):

$$P_{\text{ср}} = \frac{G U_{Gm}^2}{2} \frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} \frac{e^{\pm\frac{\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{\pi}{Q_c}} (Q_C \geq 5,\ \delta < 1\%), \quad (45)$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{G U_{Gm}^2}{2} \frac{e^{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} - 1}{\pm\frac{2k\pi}{Q_c}} \quad (Q_C \geq 30,\ \delta < 5\%), \quad (46)$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{G U_{Gm}^2}{2} \ (Q_C \geq 300 \text{ при } k{=}1,\ \delta < 1\%). \quad (47)$$

Сравнивая формулы (45) с (40), (46) с (41) и (47) с (42), делаем вывод, что при выполнении условия (43) они попарно совпадают. Поэтому средняя активная мощность на емкости при экспогармоническом воздействии равна средней активной мощности на сопротивлении при том же воздействии и выполнении условия (43). Верхний знак в условии (43) соответствует величине $G>0$ ($R > 0$), а нижний – величине $G < 0$ (*$R < 0$).*

2. Физическая трактовка средней активной мощности за промежуток времени. В связи с тем, что введенное в разделе понятие средней активной мощности за промежуток времени $\Delta\tau = \dfrac{T_S}{2}$ хорошо описывает энергетические свойства *R*, *L*, *C*-элементов при экспогармоническом воздействии, то необходимо более подробно рассматривать физический смысл этого понятия.

Напомним, что энергетические свойства *R*, *L*, *C*-элементов при гармоническом воздействии рассматривались с помощью понятий мгновенной мощности $p(t)$ и электрической энергии [6,8], которые связаны между собой соотношениями:

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt}\ . \tag{48}$$

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau\ . \tag{49}$$

Из выражения (48) следует, что запись элементарной энергии имеет вид [6]

$$dW(t) = p(t)dt. \tag{50}$$

Отсюда общее количество энергии за промежуток времени от t_1 до t_2 выражается определенным интегралом [6,8]

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt. \tag{51}$$

Сравнивая выражения (51) с (8) видно, что активная мощность за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$P = \frac{W}{\Delta t}\ . \tag{52}$$

Для более детального рассмотрения энергетических свойств *R*, *L*, *C*-элементов при экспогармоническом воздействии удобно дополнительно рассмотреть еще одно понятие, которое в теорию электричества введено авторами работ [12, 13] и которое в работе [12] названо действием, а в работе [13] – электромагнитным моментом количества движения (раннее это понятие применялось к механическим движениям [14]). В работе [12] действие определено как

$$D(t) = q(t)\psi(t)\ , \tag{53}$$

где $q(t)$ – электрический заряд; $\psi(t)$ – магнитный поток. Действие связано с энергией по формуле

$$W(t) = \frac{dD(t)}{dt} \text{ или } D(t) = \int_{-\infty}^{t} W(\tau)d\tau. \tag{54}$$

Действие имеет размерность произведения энергии на время [14], т.е. Дж·с в системе СИ. Из выражения (54) следует, что элементарное действие можно найти по формуле

$$dD(t) = W(t)dt\ . \tag{55}$$

Следовательно общее количество действия за промежуток времени от t_1 до t_2 равно

$$D = \int_{t_1}^{t_2} W(t)dt. \tag{56}$$

Запишем среднюю активную мощность за промежуток времени $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$, подставив в равенство (15) выражение (52),

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{W(\tau)}{\Delta t}d\tau = \frac{1}{\Delta\tau\Delta t}\int_{\tau_1}^{\tau_2} W(\tau)d\tau. \tag{57}$$

Последнее равенство можно переписать с учетом выражения (56)

$$P_{\text{ср}} = \frac{D}{\Delta\tau\Delta t}\ . \tag{58}$$

или

$$D = P_{\text{ср}}\Delta\tau\Delta t\ . \tag{59}$$

Из этого уравнения видно, что средняя активная мощность за определенный промежуток времени пропорциональна действию, за этот промежуток времени.

Как видно из равенств (48), (49) и (54) $p(t)$, $W(t)$ и $D(t)$ тесно связаны между собой. Подставив первое равенство (54) в (48), получим еще одну взаимосвязь

$$p(t) = \frac{d^2D(t)}{dt^2}, \tag{60}$$

т.е. мгновенная мощность описывает ускорение в изменении действия.

В связи с тем, что теория электрических цепей строится по аксиоматическому принципу [15, 8], в основу которой положены два постулата: законы Кирхгофа, то следует показать, что закон сохранения действия, который постулировался в [12], вытекает из законов Кирхгофа. В [15] показано, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(t) = 0, \tag{61}$$

т.е. сумма мгновенных мощностей всех ветвей замкнутой изолированной цепи равна нулю.

Возьмем от обеих частей равенства (61) определенный интеграл от -∞ до t. В результате получим

$$\int_{-\infty}^{t}\sum_{k=1}^{n} p_k(t)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{t} p_k(t)dt = 0. \tag{62}$$

Учтем равенство (49). Тогда выражение (62) можно переписать

$$\sum_{k=1}^{n} W_k(t) = 0. \tag{63}$$

Это равенство выражает закон сохранения энергии. Теперь возьмем от обеих частей равенства (63) определенный интеграл от -∞ до t и учтем второе равенство из (54)

$$\int_{-\infty}^{t}\sum_{k=1}^{n} W_k(t)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{t} W_k(t)dt = \sum_{k=1}^{n} D_k(t) = 0. \tag{64}$$

В последней части равенства (64) и записан закон сохранения действия, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} D_k(t) = 0. \tag{65}$$

Таким образом, в теории электрических цепей закон сохранения действия выводится строго логическим путем.

Завершая данный раздел, запишем формулу для расчета действия при экспогармоническом воздействии вида (1). В этом случае $\Delta t = kT_s$, $\Delta\tau = \frac{T_s}{2}$, поэтому формула (59) имеет вид

$$D = \frac{P_{\text{ср}}kT_S^2}{2}. \tag{66}$$

В эту формулу нужно подставлять выражения для расчета $P_{\text{ср}}$, найденные ранее. Так, например, если учесть величину $P_{\text{ср}}$ по формуле (34), то

$$D = \frac{\pm\lambda LI_{Lm}^2kT_S^2}{4}, \tag{67}$$

т.е. в этом случае индуктивность L при экспогармоническом воздействии для верхнего знака поглощает из цепи, а для нижнего знака отдает в цепь величину действия, определяемую формулой (67). Размерность этой величины действия Дж·с в системе СИ. Такая же величина действия получается, если подставить в формулу (66) $P_{\text{ср}}$ по формуле (20) для сопротивления R при выполнении условия (35)

$$D = \frac{RI_{Rm}^2kT_S^2}{4}, \tag{68}$$

т.е. индуктивность L при экспогармоническом воздействии поглощает из цепи или отдает в цепь такую же величину действия, как сопротивление R>0 или соответственно сопротивление R<0 при выполнении равенства

$$|R| = \lambda L. \tag{69}$$

Этот факт еще раз подтверждает реальность существования в природе явления выделения активной мощности реактивными элементами электрической цепи [5], так как величина действия связана с величиной средней активной мощности по формуле (58), а средняя активная мощность – с активной мощностью по формуле (15).

В заключение можно сказать следующее.

В статье выполнено систематическое исследование энергетических свойств R, L, C-элементов теории электрических цепей при экспогармоническом воздействии с помощью введенного нового понятия средней активной мощности за определенный промежуток времени. Указанное понятие тесно связано с понятием действия, которое характеризует электрическую энергию.

Литература

1. *Иваницкий А.М.* Реактивные элементы при экспофункциональных воздействиях / А.М. Иваницкий // Информатика и связь: Сб. научн. тр. УГАС им. А.С. Попова. – Одесса, 1996. – № 1. – С. 236 – 240.
2. *Иваницкий А.М.* Компенсация потерь электрической энергии в электрической цепи при воздействии сигналов произвольной длительности / А.М. Иваницкий // Наукові праці УДАЗ ім. О. С. Попова. – Одесса, 1999. – № 1. – С.50 – 52.
3. *Иваницкий А.М.* Применение экспофункциональных воздействий в электросвязи и электроэнергетике / А.М. Иваницкий // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – Одесса, 1999. – № 2 – С. 53 – 57.
4. *Иваницкий А.М.* Простое доказательство существования явления выделения активной мощности реактивными элементами / А.М. Иваницкий // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова. – Одесса, 2007. – № 1. – С. 3 – 5.
5. *Іваницький А.М.* Явище виділення активної потужності реактивними елементами електричного кола / Диплом на відкриття НВ № 3, зареєстровано 12.01.99; пріоритет від 30.11.94 // Винахідник України. – 2’1999 / 1’2000. – С. 121 – 126.
6. *Атабеков Г.И.* Основы теории цепей: учебник для вузов / Атабеков Г.И. – М.: Энергия, 1969. – 424 с. –
7. *Иваницкий А.М.* Доказательство существования явления выделения активной мощности реактивными элементами электрической цепи с помощью рядов Фурье / А.М. Иваницкий // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова. – Одесса, 2010. – № 1. – С. 3 – 10.
8. *Зелях Э.В.* Теория линейных электрических цепей. Раздел первый: учеб. пособ. / Зелях Э.В. – Одесса: ОЭИС им. А.С. Попов, 1978. – 64 с.
9. *Иваницкий А.М.* Эффект выделения активной мощности реактивными элементами / А.М. Иваницкий // ТЕМА. Техніка майбутнього. – 1997. – № 5 – 6. – С. 29 – 30.
10. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике / Выгодский М.Я. – М.: Наука, 1996. – 872 с.
11. Смолянский М.Л. Таблицы неопределенных интегралов/ Смолянский М.Л. – М.: Физматгиз, 1963. – 112 с.
12. *Иосифьян А.Г.* К вопросу об уравнениях взаимодействия электричества и вещества / А.Г. Иосифьян // Доклады Академии наук Армянской ССР. – 1955. – Т. XX, № 2. – С. 32 – 41.
13. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества / Тамм И.Е. – М.: Наука, 1966. – 624 с.
14. *Тарг С.М.* Действие / С.М. Тарг // Большой энциклопедический словарь. Физика. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 944 с.
15. *Зелях Э.В.* Основы общей теории линейных электрических схем / Зелях Э.В. – М.: АН СССР, 1951. – 336 с.