УДК 621.391

Стрелковская И. В., Соловская И.Н.
Стрелковська І.В., Соловська І.М.
Strelkovskaya I.V., Solovskaya I.N.

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ КАЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ ЯКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕРЕЖІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

TENSOR ANALYSIS OF QUEUEING NETWORK QUALITY CHARACTERISTICS

Аннотация. Предложено использование тензорного анализа для исследования качественных характеристик сети массового обслуживания, состоящей из систем массового обслуживания M/M/1. Обоснована целесообразность использования тензорных методов, позволяющих получить эффективные решения оценки качественных характеристик при одновременном анализе структурных и функциональных свойств сетей и систем массового обслуживания различных структур и размерностей.

Анотація. Запропоновано використання тензорного аналізу для дослідження якісних характеристик мережі масового обслуговування, що складається з систем масового обслуговування M/M/1. Обґрунтована доцільність використання тензорних методів, що дозволяють отримати ефективні вирішення оцінки якісних характеристик при одночасному аналізі структурних і функціональних властивостей мереж і систем масового обслуговування різних структур й розмірностей.

Summary. Usage of tensor analysis to research queueing network quality characteristics that consists of queueing systems M/M/1 was proposed. Appropriateness of tensor method allowing to get effective solutions of quality characteristics valuations under simultaneous analyses of network and queueing network of different structures a sizes functional characteristics was grounded.

Основным направлением развития телекоммуникаций сегодня является внедрение сетей нового поколения *Next Generation Network (NGN)*, которые позволят на базе единой сетевой архитектуры решить проблему совместного использования сетевых ресурсов и обеспечить требуемую пропускную способность с гарантированным качеством обслуживания *QoS (Quality of Service)*. Одной из важнейших задач, способствующих формированию и реализации *NGN,* является оценка качественных характеристик сети в целом, а также ее отдельных фрагментов [1].

В данной работе предлагается исследование характеристик телекоммуникационной сети, представленной моделью сети массового обслуживания (СеМО), с использованием тензорного анализа. При выборе математического аппарата учтено, что для исследования структурных свойств сетей традиционно применяют матричные методы, а для исследования функциональных свойств сетей − методы теории телетрафика [2]. Использование тензорного анализа является более предпочтительным, так как тензор математический объект более общего характера, чем матрица, и обладает возможностями получения оценки функциональных характеристик значительного количества сетевых узлов, поэтому в рамках одной модели, возможно одновременно исследовать структурные свойства и функциональные характеристики телекоммуникационной сети.

Впервые показал возможность применения тензоров для анализа электрических сетей Г. Крон [3], А.Е. Петров использовал тензоры для моделирования экономических систем [4], результаты тензорного моделирования телекоммуникационных сетей представлены в работах В.В. Поповского, А.В. Лемешко и др. [5−10]. Однако задача анализа характеристик реальных сетевых архитектур СеМО большой размерности достаточно громоздкая и получение аналитических решений для СеМО с учетом топологии сети и динамичности информационных потоков крайне затруднительно.

Целью данной статьи является использование тензорного анализа для оценки характеристик качества обслуживания сетевых архитектур СеМО большой размерности при изменении параметров сети, переходе от одной топологии к другой, прогнозирования состояния сети с учетом особенностей технологического построения коммутационных узлов.

Рассмотрим исходную структуру телекоммуникационной сети, представленную СеМО, состоящую из систем массового обслуживания (СМО) M/M/1. Одноканальная СМО M/M/1 обслуживает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, а длительность обслуживания заявок t распределена по показательному закону [2]. Основной характеристикой СМО M/M/1 является коэффициент загрузки $\rho = t \cdot \lambda$. Для исходной структуры СеМО разработаем тензорную модель и определим качественные характеристики функционирования СМО.

Для разработки тензорной модели СеМО необходимо: выполнить геометризацию сети, введя понятия пространства-структуры; обосновать выбор систем координат и задать правила координатного преобразования; определить инвариантные представления уравнений поведения системы, задав характер величин - ковариантные и контравариантные.

Структурно-топологическую модель СеМО представим в виде графа, вершинами которого являются узлы коммутации СМО, а дуги моделируют тракты передачи. Структура сети определяет пространство, размерность которого соответствует числу ветвей сети. Системы координат образуют совокупность независимых замкнутых и разомкнутых путей (базисных контуров и узловых пар), проходящих по ветвям сети. Каждый путь ввиду своей независимости определяет в рамках введенного пространства координатную ось, а каждая структура – свою систему координат. Преобразование структуры сети с сохранением численности ветвей или переход от одной совокупности независимых путей к другой трактуем как преобразование системы координат [3, 5].

Использование тензорной модели позволяет получить решение поставленной задачи на основе решения ее некоторого «примитивного» аналога, для которого сохраняются структурные и функциональные инварианты. Согласно [3, 5] такая сеть называется примитивной. Обычно, в качестве «примитивной» выбирается сеть, состоящая из отдельных разомкнутых ветвей [3,5]. Переход от разомкнутой структуры сети к соединенной структуре можно трактовать как переход к новой системе координат, т.е. переход от базиса e_i, $i = \overline{1,n}$ к базису $e_i^{'}$, $i = \overline{1,n}$ в выбранном пространстве-структуре.

Для описания сети в рассматриваемом n-мерном пространстве введем в рассмотрение две системы координат: исходную (соединенную) R, которая соответствует структуре моделируемой сети, и примитивную (разомкнутую) R'. При этом в первой системе координат координатными путями являются отдельные ветви сети, а во второй - независимые контуры и узловые пары. Согласно [3] для введенных систем координат существуют правила преобразования из одной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования S, которая составляется согласно структурной модели исходной СеМО и заданных направлений. Закон координатного преобразования из одной системы координат R к другой $R^{'}$ имеет вид [3,4,5]:

$$R = S \cdot R^{'}. \tag{1}$$

Поэтому, применив тензорный метод для СеМО и используя понятие исходной и примитивной сети, возможно получить выражение для определения характеристик исходной СеМО, задавая параметры для примитивной сети – СМО.

Для анализа математической модели СеМО, наряду с рассматриваемой структурой сети рассмотрим характеристики СМО М/М/1 [2]: коэффициент загрузки системы, $\rho_i, i = \overline{1,n}$ представленный тензором P первой валентности, интенсивность поступления заявок, $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ представленную одновалентным тензором Λ, длительность обслуживания $t_j^{\alpha} = \begin{cases} t_j, \ \alpha = j \\ 0, \ \alpha \neq j \end{cases}$, $\alpha, j = \overline{1,n}$ – двухвалентным тензором T, где

$$P = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix}, \ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & t_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_n \end{pmatrix}.$$

Функциональные характеристики СМО М/М/1 согласно [2] в n-мерном пространстве выражаются векторно-матричным уравнением:

$$P = T \cdot \Lambda, \tag{2}$$

где P и Λ – матрицы размерности $n \times 1$ коэффициентов загрузки и интенсивности поступления заявок соответственно; T – диагональная матрица размерности $n \times n$, элементами которой являются длительности обслуживания заявок.

Используем в качестве инварианта выражение $\rho = t \cdot \lambda$, для каждого элемента сети в качестве воздействующей величины рассмотрим – интенсивность поступления заявок λ_i, а в качестве величины отклика – коэффициент загрузки ρ_j.

Эти величины для СМО М/М/1 связаны между собой следующим уравнением:

$$\rho_j = t_j^{\alpha} \cdot \lambda_\alpha,\ \alpha, j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где α – индекс суммирования.

Пусть поступающий поток с одной и той же интенсивностью λ в примитивную одноканальную сеть вызовет при неизменной интенсивности обслуживания такую же загрузку ρ для сети, т.е. величина $\rho\lambda$ инвариантна при переходе от одной системы координат к другой:

$$\rho_i \lambda_i = \rho'_i \lambda'_i \ \ i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где ρ'_i и λ'_i – коэффициент загрузки и интенсивность поступления заявок для примитивной сети соответственно.

Тогда выражение (4) можно представить в тензорном виде:

$$\rho'_j = t_{\alpha j} \cdot \lambda'_\alpha,\ \alpha, j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где α – индекс суммирования.

Аналогично (2) для системы координат примитивной сети, которая определяет систему координат отдельных ветвей, коэффициент загрузки СМО М/М/1 выражается функциональным векторно-матричным уравнением:

$$P' = T' \cdot \Lambda', \tag{6}$$

где P' и Λ' соответственно компоненты ковариантных векторов загрузки и интенсивностей сети в примитивной системе координат, T – компоненты тензора второй валентности, который инвариантен относительно изменения системы координат ветвей сети.

Согласно обобщению Крона [3, 5, 7, 8] уравнение, справедливое для всех координатных систем заданной размерности и определяющее правила координатного преобразования от системы координат отдельных ветвей сети к системе координат исходной сети, будет инвариантно и имеет вид для вектора коэффициента загрузки P:

$$P = S^t \cdot P', \tag{7}$$

где S^t – транспонированная матрица преобразования перехода от примитивной системы координат к исходной, $P' = \begin{pmatrix}\rho'_1 & \rho'_2 & \ldots & \rho'_n\end{pmatrix}^t$ – ковариантный вектор загрузки в примитивной системе координат.

Аналогично (7) запишем закон преобразования для вектора интенсивности поступления заявок Λ:

$$\Lambda = S^t \cdot \Lambda', \tag{8}$$

где S^t – транспонированная матрица преобразования перехода от примитивной системы координат к исходной, $\Lambda' = \begin{pmatrix}\lambda'_1 & \lambda'_2 & \ldots & \lambda'_n\end{pmatrix}^t$ – ковариантный вектор интенсивности поступления заявок в примитивной системе координат.

Для тензора T, проекции которого в каждой системе координат имеют вид матрицы $n \times n$, при изменении координатной системы изменяются как [3,5]:

$$T = S^t \cdot T' \cdot S, \tag{9}$$

где S^t – транспонированная матрица преобразования перехода от одной системы координат к другой, T' – матрица длительностей обслуживания в примитивной сети, а S - матрица преобразования перехода от одной системы координат к другой.

Рассмотрим применение изложенной методики для исследования качественных характеристик исходной структуры СеМО, которая состоит из n = 7 одноканальных СМО М/М/1. Топологическая модель сети показана на рис. 1. Для рассмотрения сети введем четыре замкнутых контура $K_1, K_2, K_3,\ K_4$ и произвольно зададим направления контурных интенсивностей $\lambda_{к1},\ \lambda_{к2}$, $\lambda_{к3},\ \lambda_{к4}$.

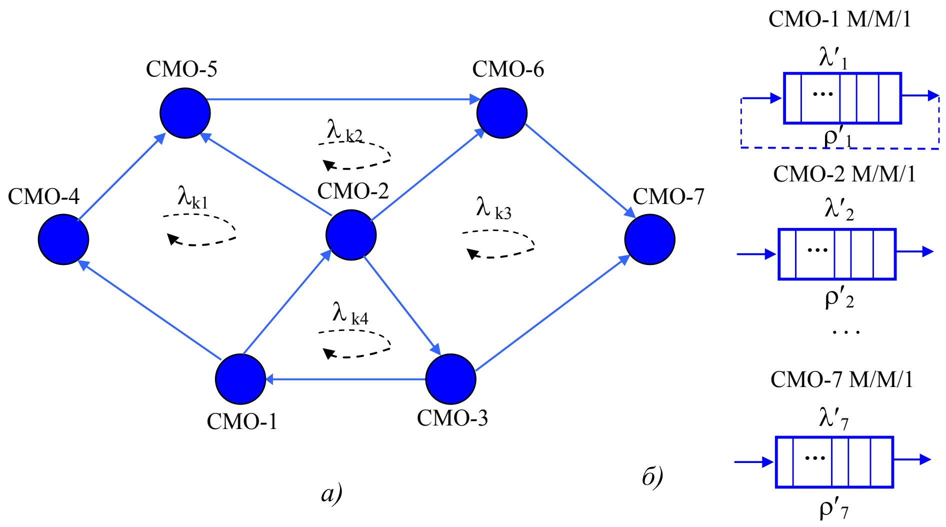

Рис. 1 – Структурная модель
а) исходной (соединенной) СеМО и б) примитивной (разомкнутой) СМО

Структурная модель рассматриваемой сети массового обслуживания может быть представлена матрицей связности S, которая задает соответствие между интенсивностями в примитивной сети и контурными интенсивностями исходной сети. Матрица S перехода от одной системы координат к другой, которая записывается в виде:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Для определения характеристик исходной СеМО, предполагаются известными параметры примитивной сети СМО. Длительности обслуживания примитивной сети заданы с помощью матрицы T', которая представляет собой тензор второй валентности, инвариантный относительно изменения системы координат. Значения коэффициентов загрузки в примитивной сети заданы ковариантным вектором P'.

$$T' = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}01 \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Для систем координат независимых контуров $K_1, K_2, K_3,\ K_4$ сети определим значения коэффициентов загрузки $P_к = (\rho_{к1} \quad \rho_{к2} \quad \rho_{к3} \quad \rho_{к4})^t$, где $\rho_{к1}$ и $\rho_{к2}$, $\rho_{к3}$, $\rho_{к4}$- коэффициенты загрузки контуров $K_1, K_2, K_3,\ K_4$ соответственно.

Определим коэффициенты загрузки $\mathrm{P}_к$ контуров $K_1, K_2, K_3,\ K_4$ согласно (7):

$$\mathrm{P}_{\kappa} = S^t \cdot \mathrm{P}' \approx \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Находим тензор длительностей обслуживания $T_{\text{к}}$ в контурах $K_1, K_2, K_3,\ K_4$ исходя из формул (9) и (10) и (11):

$$T_{\text{к}} \approx \begin{pmatrix} 0,05 & 0,01 & 0,01 & -0,02 \\ 0,01 & 0,05 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 & 0,06 & -0,03 \\ -0,02 & 0,01 & -0,03 & 0,04 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Определим значения интенсивностей поступления заявок $\Lambda_{\text{к}} = (\lambda_{\text{к}1} \quad \lambda_{\text{к}2} \quad \lambda_{\text{к}3} \quad \lambda_{\text{к}4})^t$, где $\lambda_{\text{к}1}$, $\lambda_{\text{к}2}$, $\lambda_{\text{к}3}$ и $\lambda_{\text{к}4}$ – интенсивности поступления заявок в контурах $K_1, K_2, K_3,\ K_4$ соответственно. Для этого выполним следующие преобразования. Загрузка в контурах согласно (2) выражается формулой:

$$P_{\text{к}} = T_{\text{к}} \cdot \Lambda_{\text{к}}. \qquad (14)$$

Используя полученные значения $P_{\text{к}}$ и $T_{\text{к}}$, определим интенсивности поступления заявок $\Lambda_{\text{к}}$. Для этого умножим обе части равенства на $[T_{\text{к}}]^{-1}$ слева, где $[T_{\text{к}}]^{-1}$ – обратная матрица к матрице $T_{\text{к}}$. Тогда

$$[T_{\text{к}}]^{-1} P_{\text{к}} = [T_{\text{к}}]^{-1} \cdot T_{\text{к}} \cdot \Lambda_{\text{к}}. \qquad (15)$$

Интенсивности поступления заявок $\Lambda_{\text{к}}$ контуров определяются как

$$\Lambda_{\text{к}} = [T_{\text{к}}]^{-1} \mathrm{P}_{\text{к}}, \text{ т.е.} \qquad (16)$$

$$\Lambda_{\text{к}} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,01 & 0,01 & -0,02 \\ 0,01 & 0,05 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 & 0,06 & -0,03 \\ -0,02 & 0,01 & -0,03 & 0,04 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6,03 \\ 20,22 \\ 28,94 \\ 29,67 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Для систем координат исходной структуры СеМО необходимо найти значения интенсивности поступления заявок заданной сети $\Lambda = (\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad ..., \quad \lambda_7)^t$, где λ_1, λ_2, $\ldots, \lambda_7$ – интенсивности поступления заявок СМО 1-7 соответственно. Соответственно получив решение (17), возможно определить интенсивности поступления заявок Λ для исходной сети:

$$\Lambda^t = \Lambda_{\text{к}}{}^t \cdot S^t. \qquad (18)$$

$$\Lambda \approx (23,63 \quad 14,91 \quad 0,726 \quad 6,03 \quad 26,26 \quad 49,16 \quad 28,94). \qquad (19)$$

Определим значения коэффициентов загрузки заданной исходной структуры сети, используя формулу:

$$\mathrm{P}^t = \Lambda_{\text{к}}{}^t \cdot S^t \cdot T, \qquad (20)$$

$$\mathrm{P} \approx (0,236 \quad 0,149 \quad 0,015 \quad 0,060 \quad 0,525 \quad 0,983 \quad 0,289). \qquad (21)$$

Полученные результаты коэффициентов загрузки исходной сети, определяют вероятность занятости системы и характеризуют время занятости канала СМО M/M/1 и дают возможность определить следующие характеристики функционирования СМО [2]: среднее количество заявок в СМО, находящихся на обслуживании и в очереди $N = \frac{\rho}{1-\rho}$, среднюю длину очереди L, определяющуюся количеством заявок, ожидающих обслуживания $L = \frac{\rho^2}{1-\rho}$, среднее время ожидания в очереди, которое определяется задержкой заявки в очереди и зависит от количества заявок в очереди.

Можно сделать следующие выводы:

1. Предложено построение тензорной модели телекоммуникационной сети, представленной СеМО, и показано, что применение тензорных методов позволяет получить в аналитическом виде результаты оценки качественных характеристик сети.

2. Получена методика эффективных решений оценки характеристик сети при одновременном анализе структурных параметров и функциональных свойств сетей и систем массового обслуживания различных архитектур и размерностей.

3. Использование тензорной модели СеМО, представленной системами массового обслуживания М/М/1, позволяет решать задачи оценки качества обслуживания при изменении параметров сети, при переходе от одной топологии к другой, прогнозирования состояния сети с учетом топологии и особенностей технологического построения коммутационных узлов.

Литература

1. Сети следующего поколения NGN / [А.В. Росляков, С.В. Ваняшин, М.Ю. Самсонов и др.]; под редакцией А.В. Рослякова. – М.: Эко-Трендз, 2008. – 424 с.
2. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания; пер. с англ./ И.И. Грушко. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям – диакоптика / Крон Г.. – М.: Наука, 1972. – 542 с.
4. *Петров А.Е.* Тензорная методология в теории систем / Петров А.Е. – М.: Радио и связь, 1985. – 152 с.
5. Математичні основи теорії телекомунікаційних систем / [Поповський В.В., Сабурова С.О., Олійник В.Ф. та ін.]; за заг. ред. В.В. Поповського. – Харків: Тов. «Компанія СМІТ», 2006. – 564 с.
6. *Поповский В.В.* Тензорный анализ в задачах системного исследования телекоммуникационных систем / В.В.Поповский, А.В. Лемешко // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2002. – Вып. 125. – С. 156-164.
7. *Лемешко А. В.* Адаптация тензорных решений задачи многопутевой маршрутизации к дейтаграммным сетям / А. В. Лемешко, Т. И. Григорьева // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2003. – № 1. – С. 72-76.
8. *Стрелковская И.В.* Применение теории моделей и тензорного анализа при моделировании телекоммуникационных систем / И.В. Стрелковская, Т.И. Григорьева // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2007. – Вып. 148. – С. 102-106.
9. *Стрелковская И.В* Решение нелинейных задач с помощью тензорних методов / И.В. Стрелковская Т.И. Григорьева, И.Н. Соловская // Зв'язок. – 2009. – № 4 (88). – С. 69-72.
10. *Стрелковская И.В.* Использование тензорного метода при расчетах узловой сети пакетной коммутации / И.В. Стрелковская, И.Н. Соловская // ІІІ Міжнародний науково-технічний симпозіум «Нові технології в телекомуникаціях», 2-5 лютого, 2010 р. – ДУІКТ-Карпати, Вишків, 2010. – С. 159-161.