

ТЕНЗОРНАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ ТРАФИКА В СЕТИ ДОСТУПА

ТЕНЗОРНА МОДЕЛЬ ФІЛЬТРАЦІЇ ТРАФІКА В МЕРЕЖІ ДОСТУПУ

THE TENSOR FILTERING MODEL FOR THE ACCESS NETWORK TRAFFIC

Аннотация. Предложена тензорная модель гармонической фильтрации телекоммуникационного трафика на основе принципа комплексного дополнения реальной выборки случайных потоков в маршрутизаторе сети доступа. Данная модель может быть использована в телекоммуникациях при решении задач оптимального управления трафиком.

Анотація. Запропонована тензорна модель гармонічної фільтрації телекомунікаційного трафіка на основі принципу комплексного доповнення реальної вибірки випадкових потоків у маршрутизаторі мережі доступу. Дана модель може бути використана в телекомунікаціях при розв'язанні задач оптимального керування трафіком.

Summary. The harmonic filtering tensor model for the access network traffic is proposed based on the concept of the complex extension of the real stochastic flow pattern. This model could be applied in telecommunications for IP-packet routing.

Технология пакетной коммутации является перспективной платформой для решения актуальной проблемы конвергенции телекоммуникационных сетей. Большое внимание сегодня уделяется методам управления информационными потоками в IP-сетях [1, 2]. Важным функциональным элементом IP-сетей является маршрутизатор сети доступа. Маршрутизатор играет роль системы массового обслуживания (СМО) пакетов, в которой имеют место случайный характер потока заявок, очереди и отказы в обработке пакетов. Теория массового обслуживания (ТМО) опирается на пуассоновскую модель распределения потока заявок, которая описывает стационарный поток без последствия [3]. Пуассоновская модель достаточно хорошо моделирует статистику заявок на установление соединений для небольших интервалов наблюдения (как в телефонии, так и в IP-сетях). Протоколы сигнализации в IP-сетях предусматривают короткие серии служебных пакетов, которыми обмениваются инициатор соединения и вызываемый абонент. Каждую такую серию можно считать отдельным событием (заявкой), не зависящим от предыдущих заявок, а поток таких заявок – дискретным случайным процессом без последствия.

Однако на практике интенсивность поступления заявок на установление телекоммуникационного соединения существенно изменяется в течение времени суток. Эти изменения в первом приближении являются циклическими, повторяющимися. Таким образом, поток заявок на установление соединений по IP-сети можно рассматривать как нестационарный близкий к периодическому случайный процесс. Кроме того, при передаче потоковых пакетных данных по установленному соединению отдельные пакеты одного потока коррелированы между собой. Адекватный учет этих особенностей IP-трафика требует дальнейшего развития теории моделирования потоков в телекоммуникационных сетях. Один из важных аспектов проблемы конвергенции сетей состоит в построении математических методов и алгоритмов фильтрации различных видов трафика в сетях доступа. В литературе эти вопросы исследованы недостаточно полно, в частности, не описаны тензорные модели гармонической фильтрации трафика в сетях доступа.

Целью данной работы является построение тензорной модели гармонической фильтрации трафика в сети доступа для нестационарных близких к периодическим случайных потоков.

Рассмотрим асимптотические формы пуассоновского закона, записанного в форме дискретного распределения вероятностей:

$$P(\lambda, n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \tag{1}$$

где λ – усредненное по множеству реализаций число заявок, поступающих в СМО за время T ; $P(\lambda, n)$ – вероятность того, что за время T в систему поступит n заявок, где n – неотрицательное целое число. При этом λ выражается через среднюю интенсивность потока заявок $\bar{\lambda}$ на данном интервале времени T с помощью формулы $\lambda = \bar{\lambda} T$.

Зададим множество возможных значений λ следующим образом:

$$\lambda \in \left\{ \dots, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1, 2, 3, \dots, N, \dots \right\}, \quad (2)$$

где N – натуральное число.

Величина λ является параметром распределения Пуассона. На рис. 1 показаны графики распределения Пуассона $P_1 \dots P_6$ по формуле (1) соответственно для значений $\lambda = 1/25, 1/4, 1, 4, 9, 25$.

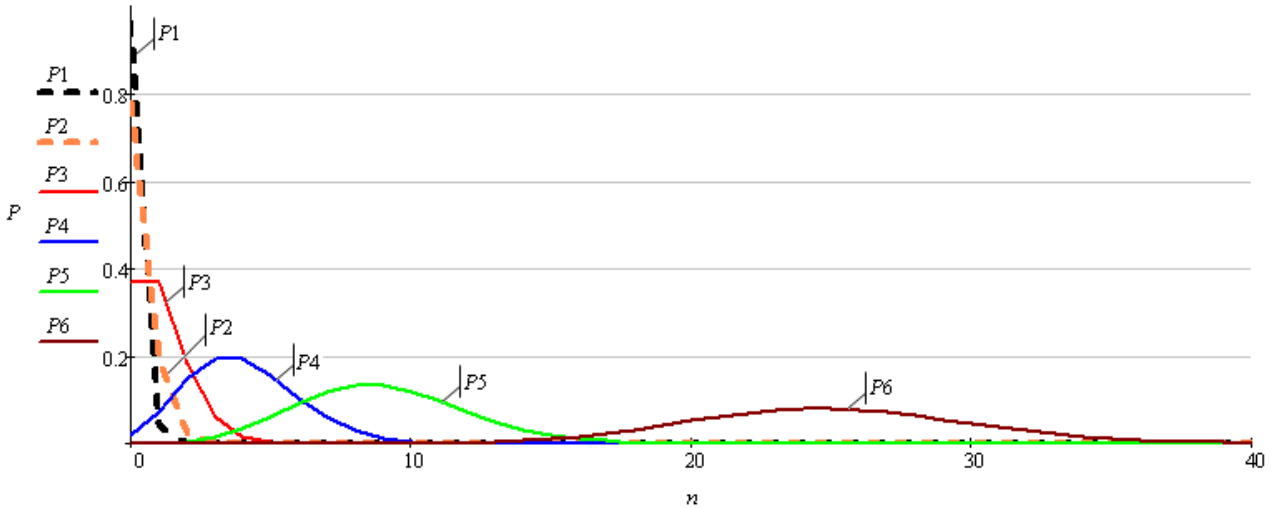


Рисунок 1 – Распределение Пуассона при $\lambda=1/25, 1/4, 1, 4, 9, 25$

Покажем, что имеет место свойство:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P(\lambda, n) = 1, \text{ если } n = 0. \quad (3)$$

Пусть $\lambda > 0$. Тогда для произвольного числа a можно записать

$$\lambda^0 = \lambda^{(a-a)} = \frac{\lambda^a}{\lambda^a} = \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^a = 1^a = 1. \quad (4)$$

Рассмотрим монотонно убывающую последовательность вида:

$$\left\{ \left(\frac{\lambda}{N}\right)^0 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{N}\right)^0 \right\} = 1^0, \left(\frac{1}{2}\right)^0, \dots, \left(\frac{1}{N}\right)^0, \dots \quad (5)$$

Очевидно, что $\lambda_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Последовательность (5) с учетом (4) принимает вид

$$\left\{ \left(\frac{\lambda}{N}\right)^0 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{N}\right)^0 \right\} = 1, 1, \dots, 1, \dots \quad (6)$$

Предел последовательности (6), очевидно, равен 1, т.е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^0 = 1. \quad (7)$$

Учтем также, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-\lambda} = 1$. Кроме того, по определению факториала имеем $0! = 1$. Поэтому, с учетом (7) можно записать предельное соотношение для формулы (1):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P(\lambda, 0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \frac{\lambda^0}{0!} \times e^{-\lambda} \right\} = \frac{1}{1} \times 1 = 1.$$

Из последнего соотношения вытекает свойство (3).

При $n > 0$ имеет место достаточно очевидное свойство:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P(\lambda, n) = 0, \text{ если } n > 0. \quad (8)$$

При $\lambda = 1$ распределение по формуле (1) принимает более простой частный вид

$$P(1, n) = \frac{1}{en!}. \quad (9)$$

В распределении Пуассона (1), как видно из рис. 1, при увеличении λ максимальное значение функции $P(\lambda, n)$ становится малой величиной, а шкала независимой переменной n расширяется. Введем специальное масштабирование функции вероятности P и аргумента n в распределении (1) с помощью масштабирующих коэффициентов $\Delta\eta$ и η , где $\Delta\eta = 1/\sqrt{\lambda}$, $\eta = n\Delta\eta = n/\sqrt{\lambda}$. Из этого следует, что

$$n = \eta / \Delta\eta = \eta \sqrt{\lambda} . \quad (10)$$

Выразим функцию вероятности $P(\lambda, n)$ в формуле (1) через некоторую функцию $p(\lambda, \eta)$ следующим образом:

$$P(\lambda, \eta) = p(\lambda, \eta)\Delta\eta . \quad (11)$$

Подставим (10) и (11) в (1):

$$p(\lambda, \eta)\Delta\eta = \frac{\lambda^{(\eta\sqrt{\lambda})}}{(\eta\sqrt{\lambda})!} e^{-\lambda} . \quad (12)$$

Отсюда получим масштабированное распределение Пуассона, которое эквивалентно формуле (1):

$$p(\lambda, \eta) = \frac{\lambda^{(\frac{1}{2} + \eta\sqrt{\lambda})}}{(\eta\sqrt{\lambda})!} e^{-\lambda} . \quad (13)$$

На рис. 2 показаны графики распределения (13) для тех же шести значений параметра λ , что и на рис. 1. Пунктиром обозначены графики для дробных значений λ : $p1$ – для $\lambda = 1/25$, $p2$ – для $\lambda = 1/4$. Сплошными линиями показаны графики для целых значений λ . График $p3$ соответствует $\lambda = 1$; этот график совпадает с аналогичным графиком на рис. 1 для распределения Пуассона в форме (1).

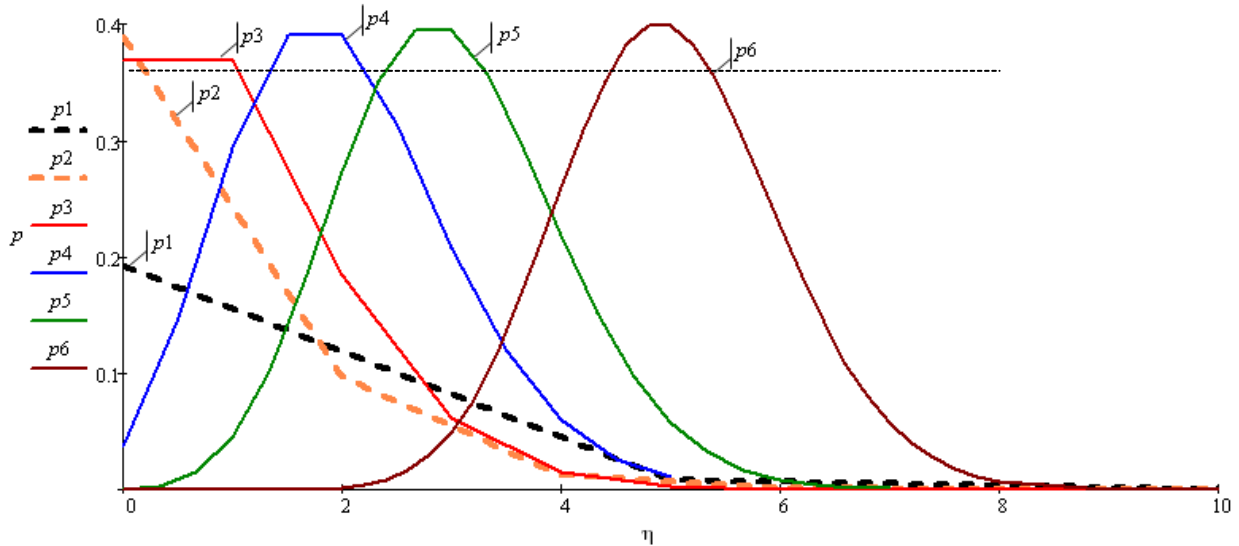


Рисунок 2 – Нормированное распределение Пуассона

Из рис. 2 видно, что при изменении параметра λ от малых значений (близких к нулю) до больших (от 20 и выше) трансформация графиков функции $p(\eta)$ для нормированного закона Пуассона (13) имеет более устойчивый характер по сравнению с аналогичными графиками для формулы (1) на рис. 1.

С помощью численных расчетов на ЭВМ нетрудно убедиться в том, что при $\lambda = 25$ масштабированное распределение (13) с высокой степенью точности описывается гауссовским распределением вида

$$p(\eta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\sigma^2}\right], \quad (14)$$

где σ – стандартное отклонение величины η от среднего значения $\bar{\eta}$; при этом $\sigma = 1$, $\bar{\eta} = \sqrt{\lambda} = 5$. График $p6$ (при $\lambda = 25$) иллюстрирует приближение функции $p(\eta)$ к гауссовскому распределению. Можно высказать гипотезу о том, что при $\lambda \rightarrow \infty$ распределение (13) асимптотически сходится к

гауссовскому распределению плотности вероятностей. Однако доказательство этой гипотезы авторам пока не известно.

В пределе при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место $\Delta\eta \rightarrow 0$, и функция $p(\eta)$ в выражении (13) может быть представлена в виде

$$p(\eta) = d[P(\eta)] / d\eta . \quad (15)$$

Таким образом, при $\lambda \rightarrow \infty$ функция $p(\eta)$ приближается по своему смыслу к понятию «плотность вероятности», хотя и не совпадает с ним, поскольку аргумент η принадлежит множеству

чисел $\left\{ \frac{n}{\sqrt{\lambda}} \right\} = \left\{ \frac{n}{\sqrt{N}} \right\}$, которое является счетным подмножеством подмножества вещественных чисел $[0, \infty) \in R$, имеющего мощность континуума.

По определению, распределение Пуассона (1) при $\lambda > 0$ должно удовлетворять условию нормировки вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\lambda, n) = 1 . \quad (16)$$

С учетом (11) можно записать:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(\lambda, \frac{n}{\sqrt{\lambda}}) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \sum_{\eta=0}^{\infty} p(\lambda, \eta) \Delta \eta = 1 . \quad (17)$$

В выражении (17) переменная η принимает значения $n/\sqrt{\lambda}$, где n – целое число, изменяющееся от 0 до ∞ .

Пусть S_λ – интегральная сумма, в записи которой присутствует параметр λ :

$$S_\lambda = \sum_{\eta=0}^{\infty} p(\lambda, \eta) \Delta \eta . \quad (18)$$

Рассмотрим бесконечную последовательность интегральных сумм вида $\{S_\lambda\}$, где λ принимает натуральные значения $\lambda = 1, 2, 3, \dots$. С учетом (17) эта последовательность равна $\{S_{\lambda(i)}\} = 1, 1, 1, \dots$. Предел этой последовательности при $\lambda \rightarrow \infty$, очевидно, равен 1. С учетом того, что при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место $\Delta\eta \rightarrow 0$, можно записать:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda = \lim_{\Delta \eta \rightarrow 0} \sum_{\eta=0}^{\infty} p(\lambda, \eta) \Delta \eta = 1 . \quad (19)$$

Предел интегральной суммы в выражении (19) запишем в форме интеграла вида

$$\int_0^{\infty} p(\eta) d\eta = 1 . \quad (20)$$

Соотношение (20) выражает условие нормировки функции $p(\eta)$, которое по форме аналогично условию нормировки функции плотности распределения вероятности для непрерывных случайных величин.

Как видно из графиков на рис. 2, при увеличении λ от 1 до 25 значения $p_{\max}(\eta)$ приближаются к величине $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,398$. Это согласуется с гипотезой о предельном переходе распределения (13) в

нормальный закон (14) при $\lambda \rightarrow \infty$. Действительно, подстановка $\sigma = 1, \eta = \bar{\eta}$ в формулу (14) дает вероятность математического ожидания, равную $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Определим условия, при которых поток заявок на установление соединений в IP-сети может приближенно рассматриваться как гауссовский случайный процесс. Рассмотрим структуру IP-трафика в магистральном канале сети доступа. На рис. 3 показан пример суточной реализации интенсивности IP-трафика, характерный для учреждений с дневным режимом работы [5]. Время t выражено в минутах. Максимальная пропускная способность канала доступа в данном примере равна 100 Мбит/с.

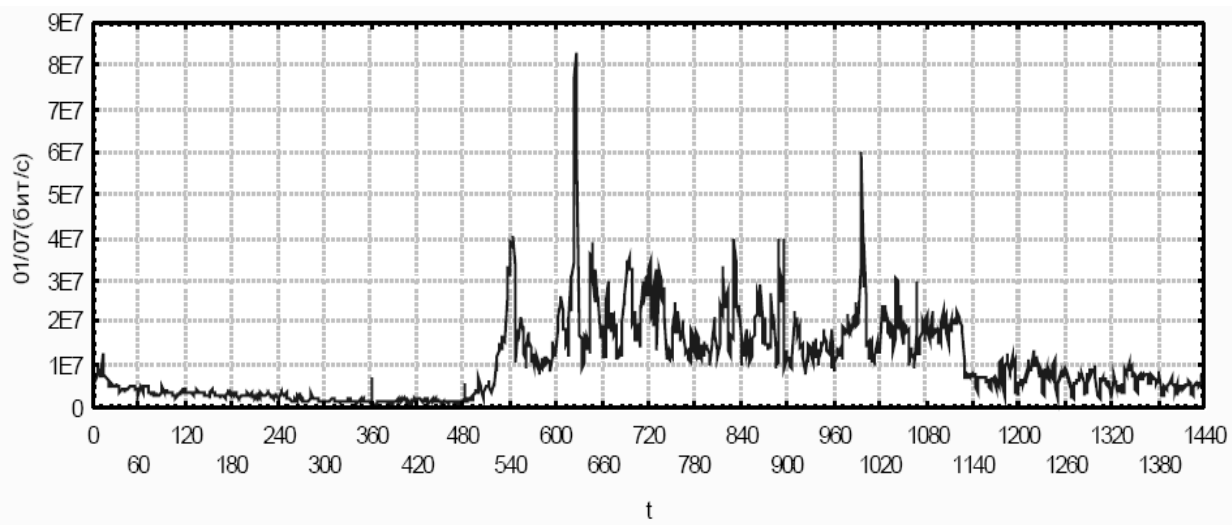


Рисунок 3 – Суточная реализация интенсивности IP-трафика

Проведенные авторами экспериментальные исследования трафика в сети доступа учреждений подтверждают изложенные в работе [5] данные о том, что более 90% трафика в сетях с пакетной коммутацией осуществляется по транспортному протоколу TCP (т.е. в режиме установления логических соединений). При этом среднесуточная интенсивность трафика в сети доступа составляет около 10 % от максимальной пропускной способности канала доступа. Основная загрузка учрежденческой сети доступа приходится на дневное время примерно с 8 до 18 часов. Данный отрезок времени представляет наибольший интерес для анализа критических нагрузок в сети доступа данного типа. Как видно из рис. 3, дневная нагрузка содержит достаточно выраженную трендовую составляющую (примерно на уровне 20 % от пропускной способности канала доступа) и случайную составляющую.

Из теории массового обслуживания известно [3], что потоки заявок на установление соединений достаточно хорошо аппроксимируются распределением Пуассона (1) при небольших значениях λ (обычно $\lambda \leq 10$). При дальнейшем увеличении λ распределение Пуассона (1) вырождается, поскольку вероятность P в (1) становится исчезающе малой величиной. Поэтому при больших λ вместо дискретного распределения Пуассона (1) потоки заявок аппроксимируют непрерывным нормальным распределением. Предложенная в работе схема масштабирования распределения Пуассона с помощью формулы (13) позволяет описывать потоки заявок одинаково при любых значениях λ .

Учтем тот фактор, что в учрежденческой сети доступа с пакетной коммутацией основной трафик передается по логическим соединениям, которые устанавливаются по протоколу TCP. Для клиентов сети доступа важным параметром качества обслуживания является время на установление TCP-соединения T_c . Произведем оценку параметров распределения Пуассона при условии, что время установки TCP-соединения не превышает 1 секунды (что является во многих случаях вполне приемлемым для человека).

Средняя плотность трафика в дневное время по данным выборки на рис. 3 составляет около 20 % пропускной способности канала доступа (т.е. в нашем случае – около 20 Мбит/с). Для типичной сети доступа учреждения примем среднюю величину документа, принимаемого по протоколу TCP в одном сеансе связи, равную 1000 кбайт (или 8000 кбит). Тогда в активное дневное время суток среднее число сеансов связи, при плотности потока в общем канале доступа 20 Мбит/с, составляет примерно $20 \text{ Мбит/с} / 8000 \text{ кбит/с} = 25$ сеансов в секунду. Количество заявок на установление TCP-соединений в первом приближении примем равным числу сеансов связи. Таким образом, получим $\bar{\lambda} = 25$ заявок/с. Выберем время доступа $T_c = 1$ с в качестве времени усреднения T при расчете параметра $\lambda = \bar{\lambda}T$ в распределении Пуассона (1) и (13). Тогда получим $\lambda = 25$ заявок.

Как показано выше, при $\lambda = 25$ закон Пуассона в масштабированной форме (13) близок к нормальному закону (рис. 2). Это значит, что в активное время суток (в т.ч. в часы наибольшей нагрузки) потоки заявок в IP-сети можно приближенно считать гауссовскими случайными

процессами. Для статистических оценок таких процессов целесообразно использовать методы частотной фильтрации [6]. Обычно в теории фильтрации рассматривают центрированные случайные процессы $x(t)$, т.е. процессы, которые имеют нулевое математическое ожидание $M\{x(t)\} = 0$ в любой момент времени t . Если некоторый процесс $\tilde{x}(t)$ не является центрированным, т.е. $M\{\tilde{x}(t)\} = \bar{x} \neq 0$, то вместо $\tilde{x}(t)$ будем рассматривать центрированный процесс $x(t) = \tilde{x}(t) - \bar{x}$.

На основании сказанного примем следующие допущения относительно свойств трафика в предлагаемой модели:

а) на интервалах времени наблюдения от нескольких секунд и более IP-трафик сети доступа является центрированным гауссовским случайным процессом;

б) на интервале 24 часа выборка трафика $x(t)$ в сети доступа является периодической вещественной случайной функцией с нулевым математическим ожиданием, содержащей три аддитивных вещественных составляющих:

$$x(t) = L(t) + q(t) + \zeta(t),$$

где $L(t)$ – детерминированная периодическая составляющая с нулевым средним значением;

$q(t)$ – гауссовский центрированный случайный процесс, который описывает коррелированные потоки пакетов в режиме установленного соединения;

$\zeta(t)$ – случайные слабо коррелированные процессы и ошибки измерения с нулевым математическим ожиданием.

Для построения алгоритма анализа функции $x(t)$ с дискретным временем t , будем использовать метод комплексного дополнения, предложенный в работе [6]. Для этого представим реально наблюдаемый процесс $x(t)$ как вещественную составляющую периодической комплексной случайной функции $z(t)$, квантованной по аргументу времени t :

$$z(t) = x(t) + iy(t). \quad (21)$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$. Если число квантов Δt времени t равно N , то $z(t)$ есть комплексный вектор, состоящий из N комплексных значений z . Наложим следующее ограничение на $z(t)$:

$$|z(t)| = |x(t)|_{\max} = \mathcal{L} = \text{const}, \quad (22)$$

где $|x(t)|_{\max}$ – максимальное возможное по модулю значение функции $x(t)$ для различных реализаций $x(t)$. При этом полная мощность вектора z оказывается всегда равной $N\mathcal{L}^2$. Очевидно, что для любого $|x(t)| \leq \mathcal{L}$ существует такое $y(t)$, при котором условие (22) выполняется. Введем специальное масштабирование значений $z(t)$, чтобы выполнялось условие $\mathcal{L} = \sqrt{N}$, откуда

$$N |z(t)|^2 = N\mathcal{L}^2 = N^2. \quad (23)$$

Величина N^2 представляет собой полную мощность вектора $z(t)$. Эта мощность инвариантна по отношению ко всему множеству возможных реализаций $z(t)$.

Если в процессе преобразований вектора $z(t)$ его полная мощность $N |z(t)|^2$ контролируется (например, сохраняется постоянной, или изменяется по заданному закону), то вектор $z(t)$ можно рассматривать как N -компонентный тензор первого ранга $z(t)$, инвариантом которого является его полная мощность [7]. Физический смысл и способы комплексного дополнения реального процесса $x(t)$ мнимой компонентой $iy(t)$ могут быть различными [6].

Будем искать оценки функций $L(t)$ и $q(t)$ как результат применения некоторых фильтров $\Phi_L(t, \tau)$ и $\Phi_q(t, \tau)$ к тензору $z(t)$. В сокращенной операторной форме запишем это в виде $L = \Phi_L z$, $q = \Phi_q z$. Составляющая $L(t)$ является достаточно консервативной функцией, которая в первом приближении сохраняется на следующие сутки (т.е. является трендом). Составляющая $q(t)$ изменяется более динамически – на интервалах времени, значительно меньше суток. Поэтому для $q(t)$ суточные прогнозы неактуальны. Для построения прогнозов функции $q(t)$ на короткий промежуток времени будем отслеживать текущий трафик $x(t)$ в некотором скользящем окне $\Delta T(t)$, далее производить комплексное дополнение $x(t)$ до тензора $z(t)$. Оценку $q(t)$ для текущего момента времени t определим путем обработки значения тензора $z(t)$ в скользящем окне $\Delta T(t)$. Экстраполяцию функции $q(t)$ на время $t + \Delta t$ будем рассматривать как краткосрочный прогноз поведения случайного процесса $q(t)$.

Произведем гармоническую аппроксимацию тензора $z(t)$, т.е. представим $z(t)$ как суперпозицию комплексных квантованных гармоник разных частот. Для построения дискретного преобразования Фурье (ДПФ) от $z(t)$ введем следующую нормировку переменных времени t и частоты ω . Поскольку $z(t)$ по предположению является периодической квантованной функцией времени, то аргумент t , определенный на периоде T , представим как фазовую переменную на окружности C . При этом точки $t = 0$ и $t = T$ совпадают, рис. 4.

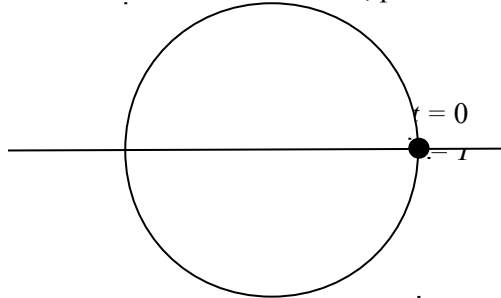


Рисунок 4 – Фазовая окружность для переменных t , ω и $\varphi = \omega t$

Разобьем фазовую окружность C на N равных частей $\Delta t = T/N$. Единицу измерения длины окружности C выберем таким образом, чтобы квадрат длины окружности был равен $2\pi N$, т.е. $C = T = \sqrt{2\pi N}$. Переменные t и ω свяжем соотношением вида

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = \Delta^2 = 2\pi/N. \quad (24)$$

Здесь $\Delta = \sqrt{2\pi / N}$ – нормировочная константа, зависящая от параметра N ; $T = N\Delta$. Прямое и обратное ДПФ будем строить, полагая $\Delta t = \Delta \omega = \Delta = \sqrt{2\pi / N}$.

Выбранные условия нормировки для переменных t и ω означают следующее. Если $\omega = \Delta$, то при изменении t от Δ до $N\Delta$, фаза $\varphi = \omega t$ изменяется от величины $\varphi = \Delta^2$ до $\varphi = N\Delta^2$, т.е. от $2\pi/N$ до 2π (фаза φ совершает один полный оборот на фазовой окружности C). Если же $\omega = N\Delta = \sqrt{2\pi N}$, то при изменении t от Δ до $N\Delta$, фаза φ принимает значения, кратные 2π , т.е. не изменяется и сохраняется равной 0 (поскольку точки 2π и 0 на фазовой окружности совпадают).

Запишем интегральную сумму вычисления прямого и обратного ДПФ для тензора $z(t)$ в комплексной форме:

$$f(k \times \Delta \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N [e^{-i(k \times \Delta \omega)(n \times \Delta t)}] \times z(n \times \Delta t) \times \Delta t. \quad (25)$$

$$z(m \times \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^N [e^{i(k \times \Delta \omega)(m \times \Delta t)}] \times f(k \times \Delta \omega) \times \Delta \omega. \quad (26)$$

Интегральные суммы вида (25) и (26) обладают тем свойством, что в пределе при $\Delta t = \Delta \omega = \Delta = \sqrt{2\pi / N} \rightarrow 0$, они превращаются в интегралы по замкнутому контуру следующего вида:

$$f(\omega) = \oint_C \exp f(i) \cdot \oint_T \exp(i \tau) z(\tau) d\tau, \quad (27)$$

$$z(\tau) = \oint_C \overline{\exp z(i)} \cdot \oint_C \overline{\exp(i \tau)} f(i) di. \quad (28)$$

Здесь $\overline{\exp(i \times \omega t)} = \exp(-i \times \omega t)$. Принятые нами условия нормировки областей определения T и C для аргументов t , τ и ω таковы, что всегда выполняется равенство $T = C = N\Delta$. Таким образом, в записи интегральных сумм (25) и (26) единственным параметром, который определяет пределы как суммирования, так и интегрирования, является число N – количество квантов, на которое разбивается интервал наблюдения T . Такой способ нормировки интегральных сумм позволяет не указывать явно пределы суммирования. Чтобы сделать запись контурных интегральных сумм с комплексными экспонентами более лаконичной и близкой по форме к интегралам по контуру, примем следующие соглашения. Вместо комплексных экспонент вида $\exp(i \times \omega t)$ и $\exp(-i \times \omega t) = \overline{\exp(i \times \omega t)}$ определим функции комплексной экспоненты $jxp(\cdot)$ следующего вида:

$$jxp(\omega t) = \exp(i \times \omega t), \quad (29)$$

$$\overline{jxp(\omega t)} = \exp(-i \times \omega t). \quad (30)$$

Введем специальный знак интегральной суммы по контуру \oint_t , близкий по начертанию и смыслу к знаку контурного интеграла. Вместо явного указания контура T или C , по которому производится операция вычисления интегральной суммы, будем записывать внутри окружности введенного знака \oint_t имя соответствующей независимой переменной t или ω :

$$\oint_t \rightarrow \int_T [\] \cdot dt, \quad (31)$$

$$\oint_\omega \rightarrow \int_C [\] \cdot d\omega. \quad (32)$$

С учетом введенных обозначений (29) ... (32) будем записывать интегральные суммы (25) и (26) в более компактной и симметричной форме

$$f(\omega) = \oint_t jxp(\omega t) z(t), \quad (33)$$

$$z(\tau) = \oint_\omega \overline{jxp(\omega \tau)} f(\omega), \quad (34)$$

где

$$jxp() = e^{-j0}, \quad \overline{jxp()} = e^{+j0}. \quad (35)$$

В пределе при $\Delta t = \Delta \omega = \Delta = \sqrt{2\pi / N} \rightarrow 0$, выражения (33) и (34) близки по смыслу к интегралам по замкнутому контуру. Переменная τ имеет такую же область определения, как и ранее введенные переменные t и ω .

Пусть $z(t)$ – N -компонентный тензор первого ранга, инвариантом которого является его полная мощность N^2 . Вещественная компонента $x(t)$ тензора $z(t)$ есть выборка трафика в сети доступа на интервале 24 часа. Пусть $F_L(\omega)$ – некоторый комплексный частотный фильтр, с помощью которого из тензора $z(t)$ выделяется трендовая составляющая $L(t)$, и пусть $\tilde{L}(\omega)$ – Фурье образ функции $L(t)$. Применим частотный фильтр $F_L(\omega)$ для спектра $f(\omega)$:

$$\tilde{L}(\omega) = F_L(\omega) f(\omega). \quad (36)$$

Применим обратное преобразование Фурье к $\tilde{L}(\omega)$:

$$L(\tau) = \oint_\omega \overline{jxp(\omega \tau)} \tilde{L}(\omega) = \oint_\omega \overline{jxp(\omega \tau)} F_L(\omega) f(\omega). \quad (37)$$

Подставим $f(\omega)$ из (22) в (26):

$$L(\tau) = \oint_\omega \overline{jxp(\omega \tau)} F_L(\omega) \left\{ \oint_t jxp(\omega t) z(t) \right\}. \quad (38)$$

Преобразуем выражение (38). Оператор суммирования \oint_t по t вынесем в левую часть выражения (38), поскольку ни один из элементов выражения (38), стоящих слева от этого оператора, не содержит переменной t :

$$L(\tau) = \oint_t z(t) \oint_\omega \left\{ \overline{jxp(\omega \tau)} jxp(\omega t) F_L(\omega) \right\}. \quad (39)$$

Рассмотрим отдельно ядро F оператора суммирования по t в выражении (39). Поскольку внутри ядра F имеется свертка по переменной ω , то ядро F является функцией двух переменных (t и τ). Это ядро представляет собой временной фильтр $\Phi(\Delta T)$ разностного аргумента $\Delta = t - \tau$:

$$\Phi(\Delta T) = \oint_{\omega} \{jxp(\omega \tau) jxp(\omega t) F_L(\omega)\} = \oint_{\omega} jxp[\omega(\Delta T)] F_L(\omega). \quad (40)$$

Построим временные фильтры $\Phi_L(\Delta T)$ для различных частотных фильтров $F_L(\omega)$. В тривиальном случае (при отсутствии фильтрации) частотный фильтр F_L представляет собой функцию вида $F_L(\omega) = I(\omega) = \text{const} = 1$. Тогда

$$\Phi_L(\Delta T) = \oint_{\omega} jxp[\omega(t - \tau)]. \quad (41)$$

С учетом введенных нормировок переменных, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \oint_{\omega} jxp[\omega(t - \tau)] &= \sqrt{N} \quad \text{при } (t - \tau) = 0, \Delta \cdot N, 2 \cdot \Delta \cdot N, \dots, \\ \oint_{\omega} jxp[\omega(t - \tau)] &= 0 \quad \text{при } (t - \tau) \neq 0, \Delta \cdot N, 2 \cdot \Delta \cdot N, \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Функция двух аргументов t и τ , обладающая свойством (42), представляет собой ядро нейтрального оператора $I(t, \tau)$:

$$\begin{aligned} I(t, \tau) &= \sqrt{N} \quad \text{при } (t - \tau) = 0, \Delta \cdot N, 2 \cdot \Delta \cdot N, \dots, \\ I(t, \tau) &= 0 \quad \text{при } (t - \tau) \neq 0, \Delta \cdot N, 2 \cdot \Delta \cdot N, \dots \end{aligned}$$

При подстановке $\Phi_L(\Delta T) = I(\Delta T)$ в качестве ядра в преобразование (39), мы получим (с учетом, что $\Delta t = \Delta \omega = \Delta = \sqrt{2\pi / N}$):

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \oint_{t} I(\Delta T) z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N I(m \cdot \Delta \tau, n \cdot \Delta t) \cdot z(n \cdot \Delta t) \cdot \Delta t = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{N} \times z(\tau) \times \sqrt{2\pi / N} = z(\tau). \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, для тривиального («прозрачного») частотного фильтра имеет место $L(\tau) = z(\tau)$.

Рассмотрим случай вещественного частотного фильтра $G_L(\omega)$, который воздействует только на амплитуды гармонических составляющих $f(\omega)$ без изменений их фазы. Временной фильтр, который соответствует частотному фильтру $G_L(\omega)$, представляет собой функцию:

$$R_L(\Delta T) = \oint_{\omega} jxp[\omega(\Delta T)] G_L(\omega). \quad (44)$$

В случае, если $G_L(\omega)$ – спектральная функция искомого процесса $L(t)$, то $R_L(\Delta T)$ – это вещественная автокорреляционная функция процесса $L(t)$ [6]. Для выполнения этих условий необходимо (но не достаточно), чтобы $z(t)$ и $L(t)$ были представлены как центрированные процессы. Оценка тренда L в данном случае является процедурой сглаживания выборки $z(t)$ с помощью автокорреляционного фильтра $R_L(\Delta T)$:

$$L(\tau) = \oint_{t} R_L(\tau - t) z(t). \quad (45)$$

В общем случае, комплексный фазосдвигающий временной фильтр $\Phi_L(\Delta T)$ на основе комплексного фазосдвигающего частотного фильтра $F_L(\omega)$ имеет вид

$$\Phi_L(t, \tau) = \oint_{\omega} jxp[\omega(\Delta T)] F_L(\omega). \quad (46)$$

Аналогичным образом могут быть получены различные фильтры для оценки составляющей $q(t)$.

В заключение отметим, что в данной работе предложена тензорная модель гармонической фильтрации трафика в канале связи телекоммуникационной сети. Эта модель может быть

использована для статистической оценки случайных дискретных выборок потоков в маршрутизаторе сети доступа. Модель фильтрации предусматривает выделение двух основных составляющих трафика – суточного тренда и динамической коррелированной компоненты.

Предложенный в работе способ нормализации распределения Пуассона для потока пакетов сети доступа является удобным для расчетов на ЭВМ и визуального отображения. Он позволяет описывать в одинаковой форме как дискретное распределение Пуассона для малых плотностей потока заявок (в режиме установления соединений), так и близкое к непрерывному асимптотическое распределение при больших плотностях потока пакетов (в режиме установленного соединения).

Для прогнозирования трафика в сети доступа на основе анализа дискретных случайных выборок потока пакетов предложена методика комплексного дополнения тензора потоков сети и построения цифровых фильтров на основе гармонической аппроксимации потоков с применением частотно-фазовой коррекции тензора потоков. Введенная нормировка и масштабирование областей значения переменных и индексов тензора потоков позволяет представить спектральные преобразования тензора потоков в обобщенной симметричной форме, которая объединяет в себе ряды Фурье, интегралы Фурье и дискретные преобразования Фурье.

Полученные математические модели могут быть использованы в телекоммуникациях для анализа потоков в IP-сетях, а также в задачах маршрутизации и оптимального управления трафиком.

Литература

1. Requirements for the support of flow-state-aware transport technology in NGN: Y.2121:2008 / ITU-T. – Режим доступа: <http://www.itu.int/en/ITU-T/publications/pages/recs.aspx>.
2. MPLS Architectural Considerations for a Transport Profile / ITU-T - IETF Joint Working Team Dave Ward, Malcolm Betts, ed. – 2008. – Режим доступа: http://www.ietf.org/MPLS-TP_overview-22.pdf.
3. Kleinrock, L. and Gail R. Queueing Systems: Problems and Solutions. – John Wiley & Sons, 1996.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 832 с.
5. Репин Д.С. Анализ и моделирование трафика в корпоративных компьютерных сетях: дис. канд. техн. наук: спец. 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации (промышленность)» / Д.С. Репин. – М., 2008. – 143 с.
6. Tichonov V.I. Umkehraufgaben und Datenbewertung: Bericht Nr. 172 / Berichte der Mathematisch-Statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz. – Graz, 1981. – 106 s.
7. Крон Г. Тензорный анализ сетей, пер. с англ., род ред. Л.Т.Кузина, П.Г.Кузнецова. – М.: Сов. радио, 1978. – 720 с.