

**СИНТЕЗ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕЛЕКТИВНЫХ СИГНАЛОВ
С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАРАМЕТРОВ**

**СИНТЕЗ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ СЕЛЕКТИВНИХ СИГНАЛІВ
З ДОВІЛЬНОЮ КІЛЬКІСТЮ ПАРАМЕТРІВ**

**SYNTHESIS OF MULTIPARAMETRIC SELECTIVE SIGNALS
WITH RANDOM NUMBER OF PARAMETERS**

Аннотация. Предложен метод построения многопараметрических селективных сигналов, позволяющий использовать единое аналитическое выражение при произвольном количестве параметров, и исследованы свойства таких сигналов.

Анотація. Запропоновано метод побудови багатопараметричних селективних сигналів, який дозволяє використовувати єдиний аналітичний вираз за довільної кількості параметрів, та досліджені властивості таких сигналів.

Summary. Method of constructing the multiparametric selective signals was suggested. Obtained signals allow using common formula for random number of parameters. Some properties of these signals were researched.

Современные цифровые системы передачи информации развиваются по пути решения проблемы увеличения пропускной способности каналов связи и внедрения новых видов услуг. При этом все большая часть трафика передается по радиоканалам мобильным абонентам, что приводит к необходимости экономить радиочастотный ресурс. Экономия достигается либо спектрально эффективными методами модуляции, либо использованием сигналов с ограниченным спектром. В настоящее время в цифровых системах связи получили широкое распространение сигналы с финитным спектром, удовлетворяющие первому критерию Найквиста [1], которые получили название селективных сигналов. Использование этих сигналов позволяет полностью избавиться от межсимвольной интерференции (МСИ). Синтезу различных селективных сигналов и анализу их свойств посвящено довольно много работ, например [1...6]. Рассмотренные в этих работах способы аппроксимации спектральной плотности в переходной области дают возможность оптимизировать форму сигнальных функций по тем или иным критериям, однако предложенные ранее сигнальные функции предусматривают лишь ограниченное число параметров без существенного изменения соответствующего аналитического выражения.

Целью данной статьи является решение задачи синтеза селективного сигнала с произвольным числом параметров, обладающего единой аналитической формой записи.

Известно [7], что использование сплайнов значительно повышает точность аппроксимации функций и при этом упрощает математические вычисления. Сплайны с успехом используются для аппроксимации сигнальных функций во временной и частотной областях, при этом исследуемый сигнал может быть описан с высокой степенью точности без ухудшения спектральных характеристик или расширения сигнала во времени. Описывая переходную область сплайн-функцией, имеющей несколько параметров, можно получать различные многопараметрические селективные сигналы. Увеличивая количество узлов сплайна в переходной области, можно получать формы спектра, недоступные для описания другими средствами. При этом переход от частотной к временной области также не вызывает затруднений – ведь на каждом интервале между узловыми точками функция представляет собой многочлен невысокой степени.

К настоящему времени с помощью сплайн-аппроксимации спектра селективного сигнала в переходной области были получены различные двух- и трехпараметрические сигналы [4...6] и исследованы их свойства. Однако предложенные ранее способы введения дополнительных параметров в аналитическое описание сигнальных функций, а также отсутствие общности в соответствующих выражениях не позволяют утверждать, что полученные оптимальные характеристики селективных сигналов не могут быть улучшены с использованием других сигналов, с другим способом аппроксимации спектра. Эта задача может быть решена при помощи многопараметрического сигнала, где число параметров достаточно велико и в принципе может стремиться к бесконечности.

Напомним, что спектральную плотность произвольного селективного сигнала можно записать в следующем виде [2]:

$$|S(j\omega)| = S(\omega) = \begin{cases} UT, & |\omega| < \omega_A; \\ S_{\Delta 1}(\omega), & \omega_A \leq |\omega| \leq \omega_C; \\ S_{\Delta 2}(\omega), & \omega_C \leq |\omega| \leq \omega_B; \\ 0, & |\omega| > \omega_B. \end{cases} \quad (1)$$

Отрезок $[\omega_A; \omega_B]$ называется переходной областью спектра, а точка ω_C делит этот отрезок пополам. При этом отношение

$$\alpha = \frac{\omega_C - \omega_A}{\omega_C} = \frac{\omega_B - \omega_C}{\omega_C} \quad (2)$$

называется коэффициентом скругления спектра ($0 \leq \alpha \leq 1$).

Выражение (1) указывает на финитность спектра селективных сигналов, поскольку $S(\omega) = 0$ при $|\omega| \geq \omega_B$.

Первый критерий Найквиста требует, чтобы в переходной области спектральная функция обладала нечетной симметрией относительно точки $C(\omega_C; S_0)$, что может быть выражено соотношением

$$S_{\Delta 1}(\omega) = UT - S_{\Delta 2}(2\omega_C - \omega). \quad (3)$$

Следовательно, определив вид функции $S_{\Delta 2}(\omega)$, мы тем самым полностью определяем форму спектра селективного сигнала.

Рассмотрим точки $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1}$, разбивающие отрезок $[\omega_C; \omega_B]$ на равные части, и значения спектральной функции в этих точках: $S_1 = S(\omega_1), S_2 = S(\omega_2), \dots, S_{N-1} = S(\omega_{N-1})$, (рис. 1).

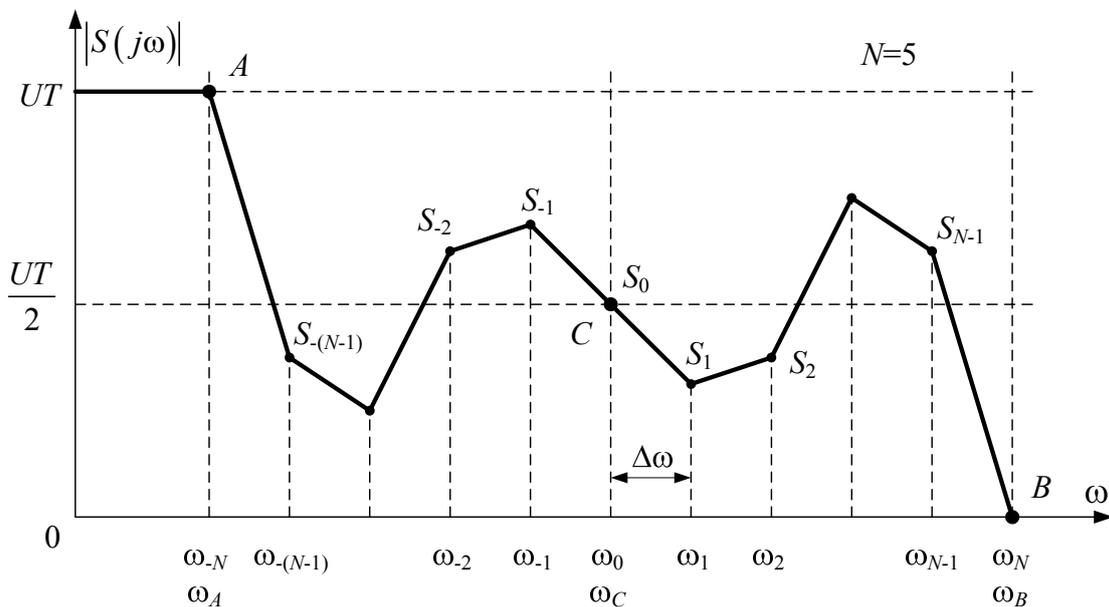


Рисунок 1 – Представление спектральной плотности селективного сигнала сплайном первой степени

Величины S_1, S_2, \dots, S_{N-1} будем рассматривать в качестве параметров сигнала. При этом в точке $\omega = \omega_0 = \omega_C$ значение спектральной функции всегда фиксировано, и не может быть параметром:

$S_0 = S(\omega_0) = S(\omega_C) = \frac{UT}{2}$. В то же время при $\omega = \omega_B$ спектральная функция может иметь разрыв,

т.е. $S_N = S(\omega_N) = S(\omega_B)$ также является параметром селективного сигнала.

Вычисляя (8), и подставляя результат в (6), получим окончательно:

$$s(t) = U \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \left\{ 1 - \frac{2}{UT} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Delta S_k \cos(2k+1)\psi \left(\frac{\sin \psi}{\psi} - \cos \psi \right) + (S_k + S_{k+1}) \sin \psi \sin(2k+1)\psi \right] \right\}, \quad (9)$$

где $\psi = \frac{\Delta \omega t}{2}$.

Селективные сигналы с линейным, кусочно-линейным или ступенчатым срезом спектра являются частными случаями сигнала (9), в чем несложно убедиться, подставляя соответствующие значения S_k и $\Delta \omega$.

На рис. 2 показаны спектральная плотность и временная реализация некоторого 5-параметрического селективного сигнала, рассчитанного по формуле (9).

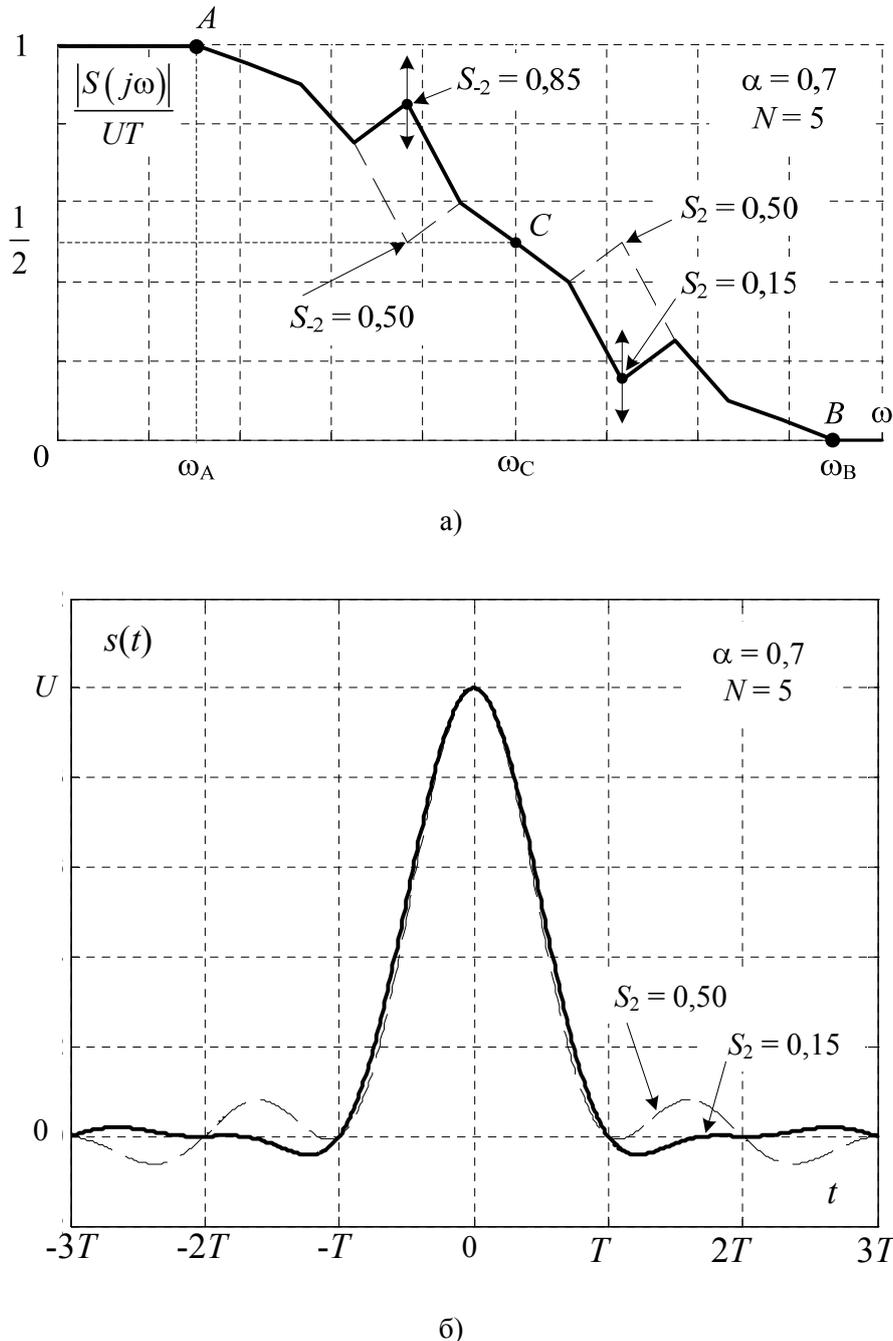


Рисунок 2 – Спектральная плотность 5-параметрического селективного сигнала (а) и его временная реализация (б)

В качестве примера использования синтезированного сигнала рассмотрим такую задачу. Необходимо синтезировать селективный сигнал с финитным спектром, обладающий минимальной энергией боковых лепестков временной функции. Доля энергии сигнала, содержащаяся в боковых лепестках, может быть определена из очевидного соотношения

$$\eta = \frac{E_{\text{бок}}}{E_{\text{полн}}}, \quad (10)$$

где $E_{\text{бок}}$ – энергия боковых лепестков; $E_{\text{полн}}$ – полная энергия селективного сигнала. Согласно равенству Парсеваля [1, 8],

$$E_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (11)$$

Предположив, что фазовый спектр сигнала равен нулю, найдем энергию главного лепестка:

$$E_{\text{глав}} = 2 \int_0^T s^2(t) dt. \quad (12)$$

Таким образом, энергия боковых лепестков может быть вычислена по формуле:

$$E_{\text{бок}} = E_{\text{полн}} - E_{\text{глав}}. \quad (13)$$

Используя (11) и учитывая четную симметрию и ограниченность амплитудного спектра, можно записать:

$$E_{\text{полн}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_B} S^2(\omega) d\omega. \quad (14)$$

Подставляя (1) в (14), можно получить общее аналитическое выражение для энергии N -параметрического селективного сигнала:

$$E_{\text{полн}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_A} (UT)^2 d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_A}^{\omega_C} S_{\Delta 1}^2(\varpi) d\varpi + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_C}^{\omega_B} S_{\Delta 2}^2(\omega) d\omega. \quad (15)$$

Вычисление первого интеграла из (15) не вызывает трудностей:

$$\int_0^{\omega_A} (UT)^2 d\omega = U^2 T \pi (1 - \alpha). \quad (16)$$

Для вычисления третьего интеграла необходимо подставить (5) в (15). Получим:

$$\int_{\omega_C}^{\omega_B} S_{\Delta 2}^2(\omega) d\omega = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} (a_k \omega + b_k)^2 d\omega. \quad (17)$$

Чтобы вычислить второй интеграл, необходимо воспользоваться свойством нечетной симметрии спектральной плотности селективного сигнала в переходной области (3). Подставляя (4) в (3), получим выражение для спектральной плотности сигнала на отрезке $[\omega_{-(k+1)}; \omega_{-k}]$:

$$S_{\Delta 1}(\varpi) = a_k \varpi + c_k, \quad (18)$$

где $c_k = UT - 2a_k \omega_C - b_k$; $\omega_{-(k+1)} = \omega_C - (k+1)\Delta\omega$; $\omega_{-k} = \omega_C - k\Delta\omega$.

Подставляя (18) в (15), получим второй интеграл в виде

$$\int_{\omega_A}^{\omega_C} S_{\Delta 1}^2(\varpi) d\varpi = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\omega_{-(k+1)}}^{\omega_{-k}} (a_k \varpi + c_k)^2 d\varpi. \quad (19)$$

Подставляя (16), (17) и (19) в (15) и проводя преобразования, можно получить:

$$E = U^2 T \left[1 - \alpha + \frac{\alpha}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2}{3} (S_k^2 + S_k S_{k+1} + S_{k+1}^2) - S_k - S_{k+1} + 1 \right) \right]. \quad (20)$$

В выражении (20) значения спектральной плотности S_k сигнала в узловых точках нормированы относительно UT : $0 \leq S_k \leq 1$.

В [9] было показано, что энергия E любого селективного сигнала должна находиться в пределах:

$$U^2 T \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq E \leq U^2 T.$$

Покажем, что выражение (20) удовлетворяет этим ограничениям. Рассмотрим верхнюю границу значений энергии:

$$E \leq U^2 T, \text{ или } \frac{E}{U^2 T} \leq 1. \quad (21)$$

Подставляя (20) в (21), получим:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2}{3} (S_k^2 + S_k S_{k+1} + S_{k+1}^2) - S_k - S_{k+1} + 1 \right] \leq N. \quad (22)$$

Если каждое слагаемое суммы окажется не больше 1, то неравенство (21) будет справедливо. Следовательно, необходимо доказать справедливость неравенства

$$\frac{2}{3} (S_k^2 + S_k S_{k+1} + S_{k+1}^2) - S_k - S_{k+1} + 1 \leq 1$$

или

$$2S_k^2 + 2S_k S_{k+1} + 2S_{k+1}^2 - 3S_k - 3S_{k+1} \leq 0. \quad (23)$$

Решением этого неравенства является область на плоскости S_k, S_{k+1} , ограниченная эллипсом с центром в точке $O_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и осями, лежащими на прямых $S_{k+1} = S_k$ и $S_{k+1} = -S_k + 1$, (рис. 3). Вер-

шины эллипса расположены в точках $O(0;0)$, $B(1;1)$, $E\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ и $H\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

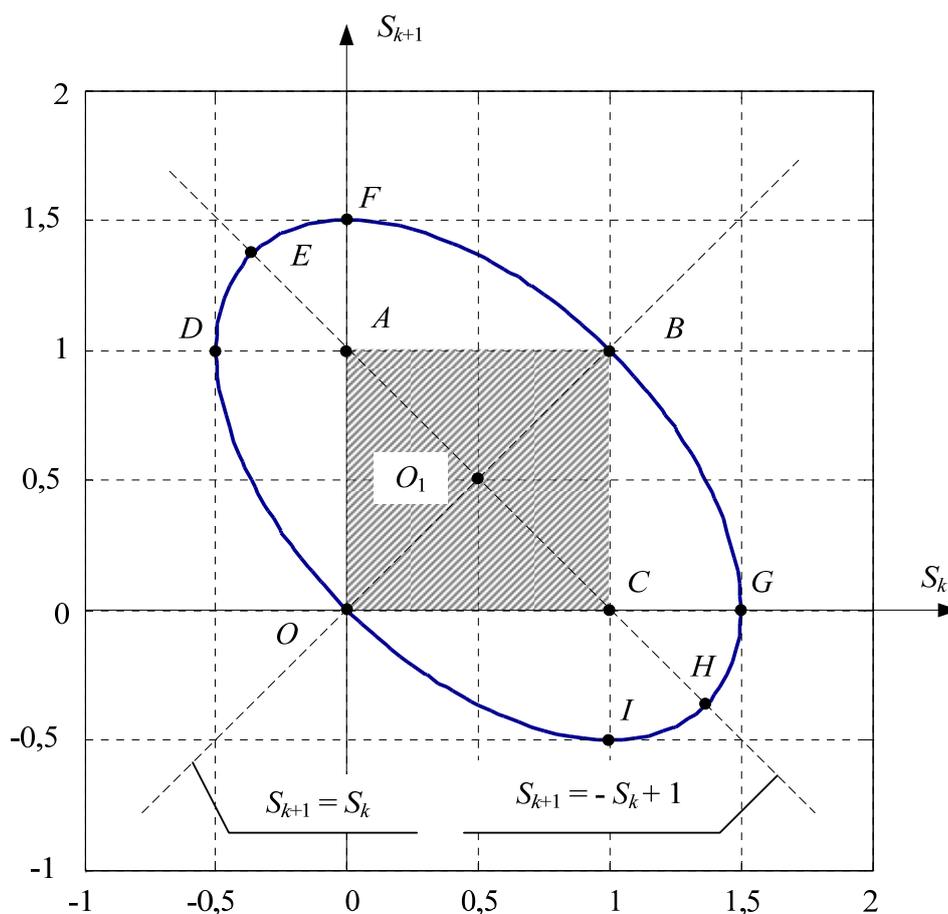


Рисунок 3 – К решению неравенства (23)

Нетрудно убедиться в том, что внутри и на границе эллипса неравенство (23) соблюдается. Область допустимых значений S_k и S_{k+1} представляет собой квадрат $OABC$ на рис. 3 ($S_k \in [0;1]$; $S_{k+1} \in [0;1]$). Этот квадрат полностью лежит внутри эллипса, и лишь две его точки лежат на границе эллипса. Следовательно, неравенство (22) доказано для любых допустимых значений S_k и S_{k+1} .

Проведя аналогичные рассуждения, можно показать, что и второе неравенство, ограничивающее значения энергии селективных сигналов снизу, соблюдается при любых значениях параметров:

$$E \geq U^2 T \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right).$$

В этом случае эллипс, ограничивающий область на плоскости S_k, S_{k+1} , где не содержатся решения неравенства, вырождается в точку $O_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$, и неравенство соблюдается на всей плоскости S_k, S_{k+1} .

Таким образом, для решения задачи синтеза селективного сигнала с минимальной энергией боковых лепестков воспользуемся целевой функцией (10), в которой $E_{бок}$ будем рассчитывать согласно (12)...(13) численным методом по формуле Симпсона, а $E_{полн}$ определяется выражением (20). Для нахождения минимума целевой функции можно воспользоваться любым из известных алгоритмов оптимизации многомерных функций при наличии ограничений на значения аргументов: метод множителей Лагранжа, метод Хука-Дживса, комплексный метод Нелдера-Мида и др. [10].

Рис. 4 иллюстрирует полученную оптимальную форму спектра селективных сигналов при различной ширине переходной области, а в табл. 1 приведены соответствующие нормированные значения параметров этих сигналов.

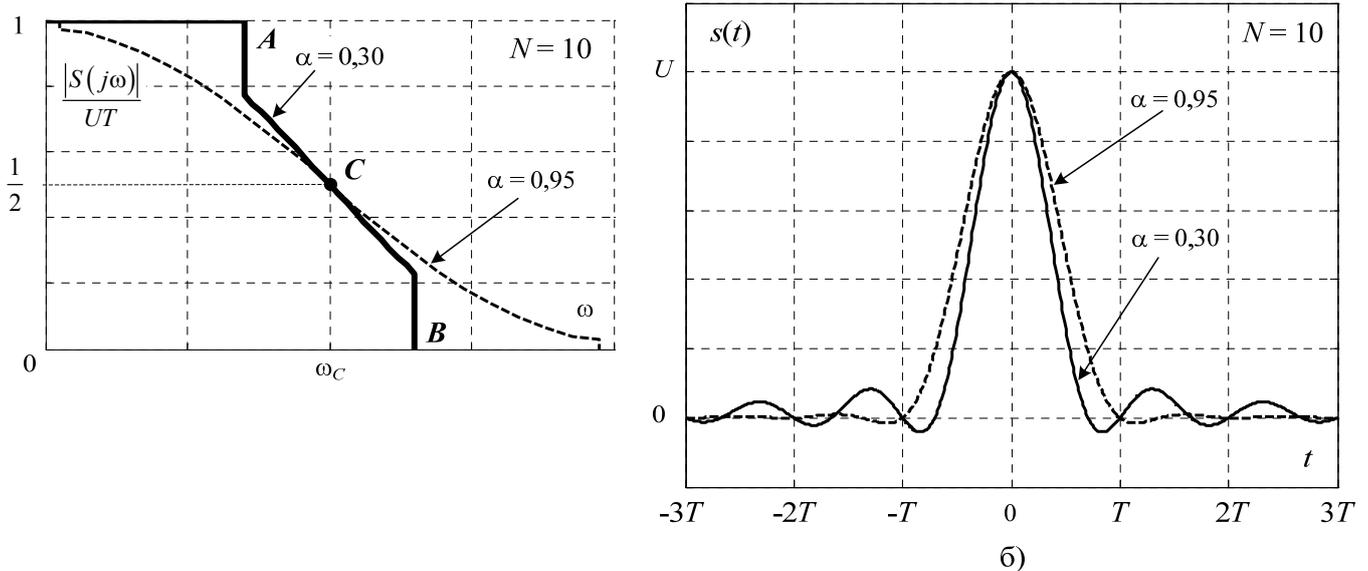


Рисунок 4 – Оптимальные формы селективного сигнала по критерию минимума энергии боковых лепестков при $\alpha = 0,3$ и при $\alpha = 0,95$: а) в частотной области; б) во временной области

Таблица 1 – Нормированные значения параметров оптимизированных селективных сигнальных функций

α	Нормированные значения параметров сигнальных функций									
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
0,30	0,472	0,445	0,414	0,390	0,359	0,333	0,306	0,282	0,253	0,231
0,95	0,428	0,363	0,300	0,244	0,188	0,143	0,098	0,066	0,046	0,019

Энергия боковых лепестков рассматриваемых сигналов составляет 1,86 % от полной энергии сигнала при $\alpha = 0,30$ и 0,027 % при $\alpha = 0,95$. Для сравнения, энергия боковых лепестков хорошо известного сигнала со спектром типа «приподнятый косинус» [1, 8] составляет 4,20 % при $\alpha = 0,30$ и 0,085 % при $\alpha = 0,95$ – т.е. в 2-3 раза больше, в зависимости от коэффициента скругления спектра α .

Таким образом, предложенный метод синтеза селективных сигналов позволяет получать аналитические выражения для сигналов во временной области, содержащие произвольное количество параметров. В сочетании с методами оптимизации многомерных функций, он дает возможность получать формы сигнальных функций, недоступные для описания другими известными способами, и оптимизировать их. В качестве критериев оптимизации могут быть выбраны не только энергетические характеристики сигналов, а и раскрыты глаз-диаграммы, скорость убывания боковых лепестков временной функции, D или E критерий, максимальный выигрыш в отношении сигнал/шум при использовании предсказаний и т.д.

В заключение отметим, что предложенный метод синтеза селективных сигналов с произвольным числом параметров позволяет получать компактные выражения для таких сигналов во временной области. Кроме этого, получено общее выражение для полной энергии таких сигналов. В качестве примера рассмотрена задача нахождения селективного сигнала с минимальной энергией боковых лепестков.

В дальнейших исследованиях представляет интерес рассмотреть аппроксимацию спектральной функции сплайном третьего порядка, а также провести исследование зависимости оптимальной формы спектра от различных критериев оптимизации.

Литература

1. Кисель В. А. Синтез гармонических корректоров для высокоскоростных систем связи / Кисель В. А. – М. : Связь, 1979. – 232 с.
2. Сукачев Э. А. Определение формы сигнала, удовлетворяющего первому критерию Найквиста / Э. А. Сукачев // Радиоэлектроника (известия вузов). – 2001. – № 12. – С. 65–69.
3. Сукачев Э. А. Синтез селективных сигналов на основе сплайн-функций / Э. А. Сукачев // Зв'язок. – 1999. – № 2. – С. 35–38.
4. Стрелковская И. В. Исследование на экстремум полной энергии многопараметрических селективных сигналов, построенных на основе кубических сплайнов / И. В. Стрелковская // Радіоелектроніка та телекомунікації: Вісник національного університету «Львівська політехніка». – 2009. – № 645. – С. 259–265.
5. Стрелковская И. В. Сравнительный анализ селективных сигнальных функций, построенных на основе кубических сплайнов и кубических В-сплайнов / И. В. Стрелковская, Д. Ю. Бухан // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – № 4/7(10). – С. 65–69.
6. Сукачев Э. А. Синтез многопараметрических селективных сигналов, построенных на основе кубических сплайнов / Э. А. Сукачев, И. В. Стрелковская // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2004. – Вып. 138. – С. 209–213.
7. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
8. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Скляр Б. – [2-е изд.] ; пер с англ. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
9. Бухан Д. Ю. Визначення граничних значень енергії багатопараметричних селективних сигналів / Д. Ю. Бухан // Науково-методична конференція «Сучасні проблеми телекомунікацій і підготовка фахівців в галузі телекомунікацій», 28-30 жовтня 2009 р. : тези допов. – Львів, 2009. – С. 7–10.
10. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Банди Б. ; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.