УДК 621.371:621.372

Иваницкий А.М., Дмитриева И.Ю.
Іваницький А.М., Дмитрієва І.Ю.
Ivanitckiy A.M., Dmitrieva I. Yu.

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

ОСНОВНІ НАПРЯМКИ ПРИ РОЗВ′ЯЗАННІ УЗАГАЛЬНЕНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА У ВЕКТОРНІЙ ФОРМІ

MAIN APPROACHES OF THE GENERALIZED MAXWELL SYSTRM'S SOLUTION IN VECTOR FORM

Аннотация. Обобщенная система дифференциальных уравнений Максвелла в случае произвольно возбужденной анизотропной среды решается на уровне диагонализации в векторной форме. Итоговый результат при определенных ограничениях согласуется с другими, ранее проведенными исследованиями данной системы.

Анотація. Узагальнена система диференційних рівнянь Максвелла у випадку довільно збудженого анізотропного середовища розв′язується на рівні диагоналізації у векторній формі. Підсумковий результат за певних обмежень погоджується з іншими, раніш проведеними дослідженнями даної системи.

Summary. Generalized system of the differential Maxwell equations is solved in the case of arbitrary disturbed anisotropic medium. The present solution is done in terms of the aforesaid system's diagonalization in vector form. The final result under certain restrictions is in conformity with other former investigations of the studied Maxwell system.

Одной из наиболее востребованных проблем на современном этапе является изучение развития теории многомерных электрических цепей [1], математический аппарат которой имеет много общего с математическим аппаратом технической электродинамики. Максимальный интерес здесь в основном связан с экспофункциональными воздействиями в случае многомерных аналоговых цепей.

Основываясь на данной теории, был поставлен вопрос о минимизации системы дифференциальных уравнений Максвелла, разрешенный в работе [2].

Сведение указанной системы из [2] к эквивалентной совокупности скалярных уравнений относительно компонент вектор функций электромагнитного поля было осуществлено в [3]. Конструктивная диагонализация обобщенной по отношению к [2], [3] системе дифференциальных максвелловских уравнений рассмотрена в статье [4].

Распространение же полученных в [3], [4] результатов нашло отражение в работе [5], где математическое обоснование вышеупомянутой процедуры диагонализации конечномерной системы произвольных дифференциальных операторных уравнений в частных производных представлено как аналог алгебраического метода Гаусса.

Предложенный и, по существу, единообразный вышеуказанный операторный алгоритм диагонализации [3] … [5] не требовал конструктивного построения обратных операторов, не зависел от краевых и начальных условий исходной задачи, а также мог применяться к матрице любой структуры. Последний факт означал прохождение упомянутого процесса «насквозь» от внешних матричных блоков ко всем внутренним, останавливаясь именно на том шаге, который являлся наиболее востребованным на данном конкретном этапе инженерных либо математических исследований. Единственными требованиями, предъявляемыми к исходным операторным матричным элементам, были их попарная коммутативность и обратимость.

Таким образом, вышеописанная простая, но математически строго обоснованная диагонализационная процедура являлась достаточно доступной для понимания и применения инженерами и другими прикладниками, не являющимися специалистами в области как фундаментальной, так и прикладной математики.

Тем не менее, задача изучения обобщенной максвелловской системы [4] не могла считаться завершенной до тех пор, пока не будет предложено явное аналитическое либо, по крайней мере, численное решение соответствующих скалярных уравнений, содержащих ровно одну компоненту искомой конечномерной вектор-функции.

Так, в статье [6] аналитически решены соответствующие единые волновые скалярные уравнения для вакуума и невозмущенной анизотропной среды. В работе [7] предложенные подход и техника [6] распространялись на случай обобщенного волнового скалярного уравнения для произвольно возбужденной анизотропной среды. Неизвестные скалярные функции в [6], [7] определялись единообразно как для магнитной, так и для электрической векторных составляющих напряженности электромагнитного поля, которое рассматривалось в классическом пространстве (x, y, z, t).

Продолжая тенденцию работ [3] … [5], решения в [6], [7] получены без построения либо непосредственного применения обратных операторов, а также безотносительно краевых и начальных условий исходной постановки задачи.

Однако в конкретных прикладных вопросах часто возникает необходимость изучения дифференциальных уравнений Максвелла в векторной форме. В связи с этим цель настоящей работы предложить несколько иной подход при исследовании вышеупомянутой обобщенной дифференциальной максвелловской системы для произвольно возбужденной анизотропной среды.

1. Постановка задачи. Рассматривается обобщенная система дифференциальных уравнений Максвелла [4]:

$$\begin{cases} rot\,\vec{H} = (\sigma \pm \lambda\varepsilon_a)\vec{E} + \varepsilon_a \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\,CT} \\ -rot\,\vec{E} = (r \pm \lambda\mu_a)\vec{H} + \mu_a \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{e}^{\,CT}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь: искомые вектор-функции $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ со скалярными компонентами $E_к = E_к(x, y, z, t)$, $H_к = H_к(x, y, z, t)$ $(к = \overline{1,3})$ обозначают напряженности электрического и магнитного поля; положительные постоянные $\sigma, \mu_a, \varepsilon_a$ представляют удельную проводимость, а также абсолютную магнитную и диэлектрическую проницаемости среды соответственно; λ – параметр воздействующего на среду сигнала, а r – некоторая теоретическая константа, существование которой на текущем этапе исследований можно лишь только предполагать. Наконец, вектор-функции $\vec{j}^{\,CT} = \vec{j}^{\,CT}(x, y, z, t)$ и $\vec{e}^{\,CT} = \vec{e}^{\,CT}(x, y, z, t)$ из (1) со скалярными компонентами $j_k^{CT} = j_k^{CT}(x, y, z, t)$, $e_k^{CT} = e_k^{CT}(x, y, z, t)$ $(i = \overline{1,3})$ считаются известными и описывают сторонние токи и напряжения.

Задача состоит в получении эквивалентного (1) единого «скалярного» уравнения относительно искомых вектор-функций $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Иными словами, в данном случае диагонализация матрицы из (1) «останавливается» на внешнем блочном уровне по отношению к неизвестным вектор-функциям $\vec{E}$, $\vec{H}$ и без перехода к их скалярным компонентам $E_к, H_к (к = \overline{1,3})$, как было проделано в [4].

Кроме того, требуется изучить полученное единое «векторно-скалярное» уравнение и сравнить итоговые результаты с другими, ранее проведенными исследованиями [7].

2. Решение максвелловской системы (1) на уровне диагонализации в векторной форме. Для решения задачи, поставленной в предыдущем п. 1, обращаемся к работе [4], итоговые уравнения которой для искомых вектор-функций магнитной и электрической напряженностей поля после несложных преобразований выглядят таким образом:

$$\begin{gathered} \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta)\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \tilde{\partial}_0^2 \begin{bmatrix} \partial_2 j_3^{CT} - \partial_3 j_2^{CT} \\ \partial_3 j_1^{CT} - \partial_1 j_3^{CT} \\ \partial_1 j_2^{CT} - \partial_2 j_1^{CT} \end{bmatrix} + (\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*) \begin{bmatrix} ((\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2)e_1^{CT} + \partial_1(\partial_2 e_2^{CT} + \partial_3 e_3^{CT})) \\ ((\partial_2^2 - \tilde{\partial}_0^2)e_2^{CT} + \partial_2(\partial_1 e_1^{CT} + \partial_3 e_3^{CT})) \\ ((\partial_3^2 - \tilde{\partial}_0^2)e_3^{CT} + \partial_3(\partial_1 e_1^{CT} + \partial_2 e_2^{CT})) \end{bmatrix}, \\ \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta)\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \tilde{\partial}_0^2 \begin{bmatrix} \partial_3 e_2^{CT} - \partial_2 e_3^{CT} \\ \partial_1 e_3^{CT} - \partial_3 e_1^{CT} \\ \partial_2 e_1^{CT} - \partial_1 e_2^{CT} \end{bmatrix} + (r + \mu_a \partial_0^*) \begin{bmatrix} ((\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2) j_1^{CT} + \partial_1(\partial_2 j_2^{CT} + \partial_3 j_3^{CT})) \\ ((\partial_2^2 - \tilde{\partial}_0^2) j_2^{CT} + \partial_2(\partial_1 j_1^{CT} + \partial_3 j_3^{CT})) \\ ((\partial_3^2 - \tilde{\partial}_0^2) j_3^{CT} + \partial_3(\partial_1 j_1^{CT} + \partial_2 j_2^{CT})) \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{2}$$

Записывая первое из уравнений (2) в более удобной матричной форме

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)\begin{bmatrix}H_1\\H_2\\H_3\end{bmatrix}=\tilde{\partial}_0^2\begin{bmatrix}0&-\partial_3&\partial_2\\\partial_3&0&-\partial_1\\-\partial_2&\partial_1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j_1^{CT}\\j_2^{CT}\\j_3^{CT}\end{bmatrix}+(\sigma+\varepsilon_a\partial_0^*)(-\tilde{\partial}_0^2\begin{bmatrix}e_1^{CT}\\e_2^{CT}\\e_3^{CT}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\partial_1\\\partial_2\\\partial_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_1&\partial_2&\partial_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1^{CT}\\e_2^{CT}\\e_3^{CT}\end{bmatrix}),$$

приходим к следующему эквивалентному виду последней

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)H=\tilde{\partial}_0^2\partial_+j^{CT}+(\sigma+\varepsilon_a\partial_0^*)(-\tilde{\partial}_0^2I+\partial\partial^T)e^{CT},\tag{3}$$

где:

$$H=\begin{bmatrix}H_1\\H_2\\H_3\end{bmatrix},j^{CT}=\begin{bmatrix}j_1^{CT}\\j_2^{CT}\\j_3^{CT}\end{bmatrix},e^{CT}=\begin{bmatrix}e_1^{CT}\\e_2^{CT}\\e_3^{CT}\end{bmatrix},\partial=\begin{bmatrix}\partial_1\\\partial_2\\\partial_3\end{bmatrix},\partial^T=\begin{bmatrix}\partial_1&\partial_2&\partial_3\end{bmatrix},\partial_+=\begin{bmatrix}0&-\partial_3&\partial_2\\\partial_3&0&-\partial_1\\-\partial_2&\partial_1&0\end{bmatrix},\tag{4}$$

$$\partial_1=\frac{\partial}{\partial x},\partial_2=\frac{\partial}{\partial y},\partial_3=\frac{\partial}{\partial z},I=diag(1,1,1).$$

Кроме того, в (3) используются такие операторные обозначения:

$$\tilde{\partial}_0^2=\mu_a\varepsilon_a(\partial_0^*)^2+(\sigma\mu_a+r\varepsilon_a)\partial_0^*+r\sigma,\ \partial_0^*=\partial_0\pm\lambda,\ \partial_0=\frac{\partial}{\partial t},\ \Delta=\sum_{\text{к}=1}^{3}\partial_\text{к}^2.\tag{5}$$

Остальные функции и константы в (3) первоначально введены при описании системы (1) из предыдущего п. 1.

Нетрудно заметить, что аналогичным образом в матричной форме можно записать и окончательное уравнение вектор-функции электрической напряженности поля [4] (второе из уравнений (2)), применяя принцип дуальности [8]:

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)E=\tilde{\partial}_0^2\partial_-e^{CT}+(r+\mu_a\partial_0^*)(-\tilde{\partial}_0^2I+\partial\partial^T)j^{CT},\tag{6}$$

где

$$E=\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{bmatrix},\ \partial_-=-\partial_+.\tag{7}$$

Остальные обозначения из (6) представлены в (4), (5), а также при описании исходной системы (1) предыдущего п. 1.

Легко проверить, что операторный многочлен $\tilde{\partial}_0^2$ из (5) можно записать в виде

$$\tilde{\partial}_0^2=(\varepsilon_a\partial_0^*+\sigma)(\mu_a\partial_0^*+r).\tag{8}$$

При этом необходимо отметить, что в данной работе всюду произведение операторов рассматривается как их последовательное применение в направлении справа налево, т.е. от внутреннего оператора к внешнему.

Далее, принимая во внимание классические определения операций $rot, grad, div$, а также матричные выражение [9] в (4), (7) и разложение на операторные множители (8), приводим уравнения (3), (6) к эквивалентной векторной форме:

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)\vec{H}=\tilde{\partial}_0^2\,rot_+\vec{j}^{\text{CT}}-\tilde{\partial}_0^2(\sigma+\varepsilon_a\partial_0^*)\vec{e}^{\text{CT}}+(\sigma+\varepsilon_a\partial_0^*)\,grad\ div\,\vec{e}^{\text{CT}},\tag{9}$$

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)\vec{E}=\tilde{\partial}_0^2\,rot_-\vec{e}^{\text{CT}}-\tilde{\partial}_0^2(r+\mu_a\partial_0^*)\vec{j}^{\text{CT}}+(r+\mu_a\partial_0^*)\,grad\ div\,\vec{j}^{CT}.\tag{10}$$

Учитывая формулу (8), уравнения (9), (10) можно представить следующим образом:

$$(r+\mu_a\partial_0^*)(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)\vec{H}=(r+\mu_a\partial_0^*)rot_+\vec{j}^{\text{CT}}-\tilde{\partial}_0^2\vec{e}^{\text{CT}}+grad\ div\,\vec{e}^{\text{CT}},\tag{11}$$

$$(\sigma+\varepsilon_a\partial_0^*)(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)\vec{E}=(\sigma+\varepsilon_a\partial_0^*)\mathrm{rot}_-\vec{e}^{\text{CT}}-\tilde{\partial}_0^2\vec{j}^{CT}+grad\ div\,\vec{j}^{\text{CT}},\tag{12}$$

или

$$(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)\vec{H}=rot_+\vec{j}^{\text{CT}}-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0^*)\vec{e}^{\text{CT}}+(r+\mu_a\partial_0^*)^{-1}grad\ div\,\vec{e}^{\text{CT}},\tag{13}$$

$$(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)\vec{E}=rot_-\vec{e}^{\text{CT}}-(r+\mu_a\partial_0^*)\vec{j}^{\text{CT}}+(\sigma+\varepsilon_a\partial_0^*)^{-1}grad\ div\,\vec{j}^{CT}.\tag{14}$$

Здесь следует отметить, что переход от (9), (10) к (11), (12) и (13), (14) правомерен лишь при выполнении условий [10]

$$\mathrm{Ker}(\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*) = \varnothing, \ \mathrm{Ker}(r + \mu_a \partial_0^*) = \varnothing . \quad (15)$$

Последние означают, что операторы из (8), (15) нигде в ноль не обращаются, независимо от того какая временная область рассматривается в исходной задаче. При этом при переходе от (9), (10) к (11). (12) достаточно выполнения только одного из соответствующих условий (15) для преобразования каждого отдельного уравнения, как в случае $\vec{H}$, так и в случае $\vec{E}$. Именно, первое условие (15) используется при переходе от (9) к (11), второе – от (10) к (12).

Сведение же (11), (12) либо (9), (10) к (13), (14) требует для своей реализации одновременное удовлетворение обоим ограничениям из (15). Последнее условие выдвигается для каждой из вышеупомянутых пар уравнений и в случае $\vec{H}$, и в случае $\vec{E}$. Таким образом, при гарантированных условиях (15) приходим к искомому «скалярному» уравнению, объединяющему в себе оба векторных, – (13) и (14):

$$(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta)\vec{F}_i = \vec{f}_i \quad (i = 1, 2) . \quad (16)$$

В (16):

$$\begin{aligned} &\vec{F}_1 = \vec{H}; \quad \vec{F}_2 = \vec{E}; \quad \vec{f}_1 = rot_+ \vec{j}^{\,\text{CT}} - (\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*)\vec{e}^{\,\text{CT}} + (r + \mu_a \partial_0^*)^{-1} grad\ div\, \vec{e}^{\,\text{CT}}; \\ &\vec{f}_2 = rot\_\vec{e}^{\,\text{CT}} - (r + \mu_a \partial_0^*)\vec{j}^{\,\text{CT}} + (\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*)^{-1} grad\ div\, \vec{j}^{\,\text{CT}}. \end{aligned} \quad (17)$$

В вышеприведенных операторных выражениях для $\vec{f}_{1,2}$ из (17) и формулах (13), (14) правый верхний индекс «–1» означает переход к обратному оператору по отношению к исходному.

Структура и методика решения уравнения (16) согласуются с результатами [7] при необходимом выполнении дополнительных условий (15).

Опираясь на основные выводы текущего п. 2, можно утверждать, что искомое решение обобщенной системы дифференциальных уравнений Максвелла получено на уровне диагонализации в векторной форме и в основном согласуется с ранее проведенными исследованиями [7]. Отличие состоит лишь в том, что в предложенном методе настоящей работы необходимо требуется явное выполнение ограничений (15), а в дальнейшем, – и построение операторов, обратных к $(\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*), (r + \mu_a \partial_0^*)$, где $\partial_0^* = \dfrac{\partial}{\partial t} \pm \lambda$, а остальные параметры – некоторые положительные физические константы.

Таким образом, поставленная в п. 1 исходная задача решена, и цель данной работы достигнута, но лишь на уровне построения диагонализации системы (1) в векторной форме. Остается еще открытым вопрос о решении итогового общего векторного уравнения (16) и сравнении настоящих исследований с ранее полученными результатами [6], [7], чему и посвящен следующий раздел.

3. Решение общего векторного уравнения (16). Продолжая тенденцию работ [3] … [7], конструктивное исследование (16) проводится безотносительно начальных и граничных условий. Предполагается лишь обязательное выполнение ограничений (15) и естественная корректная постановка исходной краевой задачи. Последнее означает естественное допущение о существовании искомой общей вектор-функции $\vec{F}_i = (i = 1,\, 2)$ из (16), (17) как для исходного реального физического процесса, так и для порожденной им правильно построенной математической модели и сформулированной краевой задачи.

Итак, в предположении, что конкретная краевая задача для уравнения (16) корректна, т.е. существование искомой вектор-функции $\vec{F}_i = (i = 1,\, 2)$ гарантировано, как и в [6], [7] применяется требуемое интегральное, но уже векторное (а не скалярное), преобразование по всем пространственным переменным (x, y, z) (см., например [11]). В результате указанной операции приходим к трансформантам [11], [12] неизвестной и заданной вектор-функций из (16), (17) ${}_{TP}\vec{F}_i(t,p) = {}_{TP}\vec{F}_i$ и ${}_{TP}\vec{f}_i(t,p) = {}_{TP}\vec{f}_i$ $(i = 1,\, 2)$ соответственно, где p – множество параметров примененного интегрального преобразования.

Само же исходное дифференциальное уравнение в частных производных (16) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно аргумента времени t и выглядит так:

$$(\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\left(\frac{d}{dt}\pm\tilde{\lambda}\right)^2+(\tilde{\sigma}\tilde{\mu}_a+\tilde{r}\,\tilde{\varepsilon}_a)\left(\frac{d}{dt}\pm\tilde{\lambda}\right)+\tilde{r}\,\tilde{\sigma}-\Delta_{TP})\,{}_{TP}\vec{F}_i={}_{TP}\vec{f}_i\quad(i=1,2), \tag{18}$$

где нижние индексы «тр» и верхние «тильды» обозначают трансформанты соответствующих объектов, а «квадрат» дифференциального оператора, как и ранее означает последовательно-повторное операторное применение.

Сравнивая (18) с единым, но скалярным уравнением в трансформантах, полученным после надлежащей функциональной замены в работе [7], можно отметить идентичность их обыкновенных дифференциальных операторов в левой части. Существенное несовпадение (18) и упомянутого уравнения из [7] состоит в различии их известных правых частей и искомых функций из левой части. Таким образом, если частично (в смысле операторного применения) оба указанных уравнения совпадают некоторым образом по форме, то по своему содержанию они различны. Последний факт, по-видимому, объясняется дополнительными ограничениями (15), введенными в предыдущем п. 2 настоящей статьи.

Тем не менее, поскольку (18) – неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно ${}_{TP}\vec{F}_i\quad(i=1,2)$, и его дифференциальный операторный многочлен из левой части полностью совпадает с аналогичным полиномом в [7], ход решения (18) по своей сути полностью повторяет процедуру из [7]. Следует лишь учесть, что вместо скалярного случая [7] в данном, предлагаемом здесь варианте рассматриваются трансформанты вектор-функций ${}_{TP}\vec{F}_i$ и ${}_{TP}\vec{f}_i\quad(i=1,2)$.

Именно, поскольку характеристический многочлен [13] для (18) такой же, как и в [7], то его корни также остаются прежними

$$\omega_{1,2}=\frac{1}{2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a}(-((\tilde{\sigma}\tilde{\mu}_a+\tilde{r}\tilde{\varepsilon}_a)\pm2\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a)\pm\sqrt{(\tilde{\sigma}\tilde{\mu}-\tilde{r}\tilde{\varepsilon}_a)^2+4\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\Delta_{TP}}\,). \tag{19}$$

Следовательно, и внешняя структура искомой трансформанты ${}_{TP}\vec{F}_i\quad(i=1,2)$ аналогична промежуточному (после введенной функциональной замены) результату (21) раздела 2 статьи [7] с точностью до введения векторных функций вместо скалярных:

$${}_{TP}\vec{F}_i=\frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)+i(\kappa_1-\kappa_2)}(e^{\omega_1 t}\int(e^{-\omega_1 t}\,{}_{TP}\vec{f}_i)dt-e^{\omega_2 t}\int(e^{-\omega_{21} t}\,{}_{TP}\vec{f}_i)dt)\;\;(i=1,2), \tag{20}$$

где: ${}_{TP}\vec{f}_i\quad(i=1,2)$ – трансформанта заданной вектор-функции (17) из изучаемого уравнения (16); $\omega_{1,2}$ описаны в (19), а $\gamma_m=\mathrm{Re}\,\omega_m$ и $\kappa_m=\mathrm{Im}\,\omega_m\quad(m=1,2)$ – их действительная и мнимая части соответственно.

Применяя требуемое обратное преобразование [11], [12] по отношению к исходному векторному интегральному, переходим от полученной трансформанты (20) к ее изначальному искомому оригиналу $\vec{F}_i\quad(i=1,2)$.

Таким образом, уравнение (16) действительно решено в явном виде, и конечная цель данной работы полностью достигнута.

В заключение следует все же отметить, что определенное различие в подынтегральных функциях из (20) и формулы (21) статьи [7] состоит не только в том, что они векторная и скалярная соответственно, но также и в их функциональных выражениях, что опять-таки связано с введенными в предлагаемой работе ограничениями (15).

Литература

1. *Иваницкий А.М.* Основы теории многомерных аналоговых и дискретных цепей / Иваницкий А.М. – Одесса: ОНАС, 2003. – 38 с.
2. *Иваницкий А.М.* Зависимость третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух уравнений при произвольном возбуждении электромагнитного поля / А.М. Иваницкий // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – № 2. – С. 3 - 7.
3. *Иваницкий А.М.* Сведение классической системы уравнений Максвелла к скалярным уравнениям относительно компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева, М.В. Рожновский // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2006. – № 1. – С. 37 - 47.

4. *Иваницкий А.М.* Диагонализация «симметричной» системы дифференциальных уравнений Максвелла / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2007. – № 1. – С. 15 – 24.
5. *Dmitrieva I.Yu.* Diagonalization of the differential operator matrix in the case of the multidimensional circuits / I.Yu. Dmitrieva, A.M. Ivanitckiy // Scient. Works of ONAT after A.S. Popov. – 2009. – № 1. – P. 36 - 51.
6. *Dmitrieva I.* On the solution of some differential equation in the classical Maxwell theory / Dmitrieva I. // Proc. of the Internat. Scient. Conf. on Econophysics, Complexity, etc. (ENEC09). – Bucharest. Hyperion University, Victor Publishing House, 2009. – P. 33 - 46.
7. *Дмитриева И.*Ю. Решение обобщенного волнового уравнения / И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2009. – № 2. – С. 68 - 72.
8. *Иваницкий А.М.* Принцип дуальности в электродинамике / А.М. Иваницкий // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2000. – № 3. – С. 29 - 35.
9. *Иваницкий А.М.* Матрицы в векторном анализе / А.М. Иваницкий// Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2002. – № 1. – С. 19 - 25.
10. *Колмогоров А.*Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
11. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten / J. Radon // Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig. – 1917. – Bande 29. – S. 262 - 277.
12. *Трантер К.Дж.* Интегральные преобразования в математической физике / Трантер К.Дж. – М.: ИЛ, 1956. – 403 с.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Камке Э. – М.: Наука, 1976. – 576 с.