УДК 621.39

Тихонов В.И.
Тіхонов В.І.
Tikhonov V.I.

ФРАКТАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОТКРЫТОЙ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ

ФРАКТАЛЬНА ТОПОЛОГІЧНА МОДЕЛЬ ВІДКРИТОЇ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ

FRACTAL TOPOLOGICAL MODEL FOR OPEN TELECOMMUNICATION NETWORK

***Аннотация**. Обоснованы принципы построения топологических моделей открытых телекоммуникационных сетей на основе теоретико-множественной концепции иерархических классов. Сформулированы аксиомы топологического пространства для типового фрактального сегмента открытой сети.*

***Анотація**. Обґрунтовано принципи побудови топологічних моделей відкритих телекомунікаційних мереж відповідно концепції теорії множин ієрархічних класів. Сформульовані аксіоми топологічного простору для типового фрактального сегмента відкритої мережі.*

***Summary.** The topological model concept for open telecommunication networks are defined on the basis of the multi class set theory approach. The axioms of topological space are formulated for a typical open network fractal.*

Конвергенция телекоммуникационных сетей и дальнейшее повышение качества сетевого информационного сервиса выдвигают проблему выбора адекватной модели сети и метода управления сетевыми ресурсами в условиях критических нагрузок. Эта проблема становится особенно актуальной при разработке информационных сетевых технологий будущего поколения, поскольку существующие технологии на основе стека протоколов TCP\IP уже почти исчерпали свой потенциал и нуждаются в глубоких структурных инновациях ([1-2]).

В области исследования телекоммуникационных сетей применяются такие математические методы, как теория систем массового обслуживания ([3]), теория графов ([4-5]), аппарат сетей Петри ([6]). В последнее время значительное внимание уделяется использованию нечетких множеств и многозначной логики ([7]), а также теории фракталов. ([8]). Плодотворным подходом к решению такого рода задач является дальнейшее развитие аппарата тензорного анализа (традиционно используемого в математической физике) применительно к моделированию телекоммуникационных сетей. В этом направлении уже достигнуты определенные результаты ([13-14]). Известные тензорные модели замкнутых телекоммуникационных сетей являются достаточно эффективным инструментом управления ресурсами в сетях ограниченного масштаба с небольшим числом разных типов сервиса (что характерно для современных сетей TCP\IP).

Однако в литературе отсутствует логическое обоснование топологической модели открытых телекоммуникационных сетей. Такого рода модели необходимы для совместного описания как собственных, так и транзитных информационных потоков сети произвольного масштаба и сложности. Для того, чтобы обеспечить объединение отдельных частей целого в тензорной модели сети, необходимо помимо собственно тензорной модели, построить также топологическую модель тензорного пространства открытой сети. Данная область исследования в телекоммуникациях в настоящее время только зарождается. Поэтому современный тензорный анализ телекоммуникационных сетей в известной мере представляет собой общую концептуальную идею, которая допускает широкий диапазон ее реализации.

Целью данной работы является обоснование фрактальной топологической модели открытого структурного сегмента сети - фрактала, с помощью которого можно рекурсивно описать динамику произвольной открытой мультисервисной сети, объединяющей ее множество фракталов.

Выделим из общей инфраструктуры глобальной сети *открытую интеллектуальную подсистему* ***OIS*** (Open Intelligent Subsystem). Будем считать, что OIS содержит открытую подсеть телекоммуникаций как *объект* контроля, и открытую подсистему управления данным объектом, которую мы назовем «*субъект*». Предположим, что субъект планирует и реализует свои отношения с объектом, исходя из имеющейся у него *динамической ситуативной модели* взаимодействия ***DSM***

(Dynamic Situate Model) и некоторого *критерия оптимальности* ***OC*** (Optimization Criterion). Считаем, что субъект обладает свойством *самообучения и адаптации.* Такой субъект формализует понятие распределенного коллективного интеллекта открытой сети, в которой каждая подсистема OIS является звеном некоторого уровня *l* общесистемной иерархии. Открытость подсети, как объекта управления, будем понимать в смысле возможности расширения зоны контроля субъектом своего окружения. В свою очередь, открытость подсистемы контроля, как субъекта, подразумевает его способность обмениваться знаниями и вырабатывать согласованные коллективные решения совместно с другими субъектами общей сети.

В основу адаптации субъекта положим систематический *анализ* процессов, протекающих в его подсети в обычном рабочем режиме, а также активные зондирующие воздействия субъекта на объект. Такая адаптация затрагивает не только параметры системы, но и ее структуру. Управление сетью понимается как решение взаимосвязанных *задач анализа и синтеза* модели системы, а также самой сети как объекта управления (по критериям оптимальности субъекта).

Примем концепцию глобальной сети *фрактального типа с многоуровневой иерархией.* Представим сеть как открытое множество узлов, каждый из которых является рядовым элементом некоторого фрактала, и одновременно может выступать главным элементом другого (подчиненного) фрактала ([3]). Пропускную способность узла (его *абстрактную мощность*) определим как главный инвариант тензора узла в виде таблицы распределения мощности узла между направлениями и каналами коммуникаций с ближайшим сетевым окружением.

Формализуем понятие «фрактал» с помощью *графа открытого сегмента сети.* Для этого сформулируем систему дополнительных аксиом топологического пространства. В рамках этой системы аксиом любая подсеть или объединение подсетей должна сохранять общую топологическую структуру связности пространства по всем уровням иерархии, но в то же время может иметь локально особенную топологию горизонтальных связей в пределах выделенного фрактального сегмента сети. Топология фрактала в нашем понимании может отражать как реальную структуру линий и каналов телекоммуникаций (т.е. пропускную способность, или «проводимость» сети), так и абстрактную систему отношений информационного взаимодействия логических узлов (т.е. реальные потоки). Такого рода фрактал сети может описывать связи и потоки двух различных типов:

а) горизонтальные (между собственными узлами фрактала на одном уровне иерархии);

б) вертикальные (между собственными узлами и одним выделенным несобственным узлом – вершиной фрактала). В качестве простейшей двузначной метрики топологического пространства фрактала сети могут быть использованы отношения смежности на графе сети.

Известной широко используемой моделью телекоммуникационной сети является <u>*граф*</u> - абстрактный математический объект, имеющий разные формы выражения: рисованный граф, табличный граф (например, матрица смежности, матрица инцидентности), алгебраическая система отношений (список вершин с указанием смежных с ними вершин, список пар отношений) и др.[8]. Простой граф не имеет ориентации ребер (т.е. отношения связности любой пары вершин коммутативны) и не различает ребра по их длине (т.е. все ребра считаются одинаковой длины). Пример простого рисованного графа сети из шести узлов показан на рис. 1.

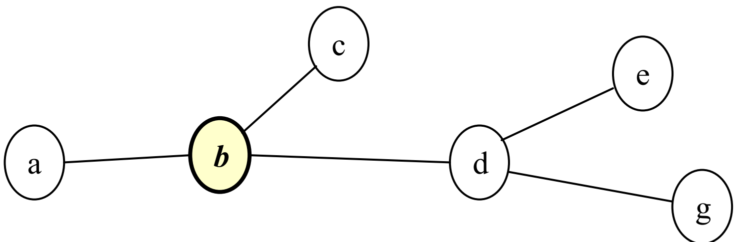

Рисунок1 – Рисованный граф сети

Матрица смежности для данного графа показана на рис.2. Отношения смежности в этой матрице принимают два возможных значения. Если два узла являются смежными или совпадают, то их отношение смежности принимается равным 1; если узлы не смежные, то их отношение смежности принимается равным символу «пробел» (□). Матрица смежности для рассматриваемой сети симметрична относительно главной диагонали. Узел ***b*** выделен в качестве маршрутизатора, относительно которого далее рассмотрены некоторые свойства сети. Одна и та же сеть по-разному воспринимается маршрутизаторами. Например, для маршрутизатора в узле ***b*** количество ребер на пути к самым удаленным узлам ***e*** или ***g*** равно 2 (что соответствует наличию одного транзитного узла на пути к ним).

	a	***b***	c	d	e	g
a	1	1				
b	1	1	1	1		
c		1	1			
d		1		1	1	1
e				1	1	
g				1		1

Рисунок 2 – Матрица смежности сети

Для маршрутизаторов в узлах ***a, c, e, g*** это число равно трем ребрам (два транзитных узла). Простой граф, независимо от формы своего представления, отражает наиболее общие структурные свойства сети, а именно - *структуру связности* узлов. Такого рода свойства также исследуются методами математической топологии, основными объектами которой являются *топологические пространства* [20].

Топологические пространства (ТП) представляют собой важный класс моделей, в т.ч. и моделей сетевого типа. Однако применительно к телекоммуникационной сети понятие «топологическое пространство сети» требует своего уточнения. Рассмотрим типичное определение топологического пространства (приведенное в справочнике по математике для научных работников и инженеров [21]) с точки зрения моделирования сети.

«Множество X объектов (точек, элементов) x€X называется <u>топологическим пространством</u>, если оно может быть представлено как объединение некоторого семейства своих подмножеств $\Omega=\{\Omega_i\}$, которое содержит:

а) пересечение любой пары своих подмножеств: $\Omega_i \cap \Omega_k$ € Ω;

б) объединение любого количества своих подмножеств: $U\{\Omega_i\}_k$ € Ω;

Члены семейства Ω_i и пустое подмножество (Ø) называются <u>открытыми подмножествами</u> пространства X, а семейство открытых подмножеств - <u>топологией</u> пространства X. Некоторое семейство открытых подмножеств $Y=\{Y_i\}$ называется <u>базой</u> топологии Ω, если каждое подмножество Ω_i есть объединение некоторого числа подмножеств семейства Y. Некоторое семейство $Z=\{Z_i\}$ открытых подмножеств называется <u>предбазой</u>, если это семейство становится базой при его дополнении некоторыми пересечениями подмножеств из Z. Элементы x являются <u>точками</u> топологического пространства X.

Это определение, также как и аналогичные ему определения ТП в других источниках, является весьма широким. В частности, данное определение содержит <u>условие представительности</u> множества *X* семейством *Ω* (фраза «<u>если оно может быть представлено</u>»). Это условие оставляет свободным принятие решения о возможности или невозможности представления множества *X* с помощью семейства открытых подмножеств *Ω*, формально удовлетворяющих условиям замкнутости *Ω* по операциям пересечения и объединения подмножеств Ω_i. Иными словами, выполнение условия представительности лежит за пределами формализма самого определения топологического пространства.

В связи с таким достаточно широким определением топологического пространства (ТП), при построении конкретных топологических моделей обычно вводятся дополнительные аксиомы, сужающие и уточняющие общее понятие ТП. Примерами сужений понятия ТП являются известные *аксиомы отделимости* ([22]):

– аксиома Колмогорова T_0 (для двух различных точек ТП, по крайней мере, для одной из них существует окрестность, не содержащая другую точку);

– аксиома Рисса T_1 (для двух различных точек ТП для каждой из них существует окрестность, не содержащая другую точку);

– аксиома Хаусдорфа T_2 (две различные точки ТП можно отделить непересекающимися окрестностями) и др.

Из общего определения топологического пространства (ТП) следует, что, если для множества *X,* на котором строится топологическое пространство, не ввести никакие априорные ограничения, то любое семейство подмножеств из *X*, удовлетворяющее условиям «а» (о пересечении подмножеств) и «б» (об объединении подмножеств) формально соответствует определению ТП. Иными словами, без дополнительных ограничений на множество *X,* условие представительности в определении ТП перестает быть необходимым, хотя на самом деле оно играет существенную роль в данном определении. В связи с этим, при построении топологического пространства на множестве X, примем следующую дополнительную аксиому:

Аксиома структуры. *Множество X, на котором определяется топологическое пространство сети, априорно наделено некоторой структурой связности всех узлов сети (например, в форме простого графа сети). Обозначим эту аксиому* $\boldsymbol{S_1}$.

В частности, для графа сети на рис. 1, можно построить следующее семейство подмножеств:

$$\Omega = \{(b), (b, a, c, d), (b, a, c, d, e, g)\}. \tag{1}$$

Нетрудно проверить, что семейство (1) удовлетворяет аксиомам «а» и «б» определения ТП. Вопрос о том, можно ли представить граф сети на рис.1 семейством (1), (а если можно, то в каком смысле), требует уточнения. Сравнивая граф сети на рис. 1 и семейство подмножеств (1), можно заметить, что эти два формализма не являются эквивалентными. Семейство (1) возможно построить на основе графа сети, однако обратное утверждение неверно. Семейство (1) не позволяет в точности восстановить структуру связности узлов на графе.

Таким образом, в смысле взаимной однозначности представления, граф сети на рис.1 нельзя представить в виде семейства (1). Вместе с тем, существует вполне актуальный аспект интерпретации семейства (1) как системы окрестностей для маршрутизатора, находящегося в узле «***b***». А именно, для узла ***b*** , очевидно, существуют три вложенные друг в друга окрестности:

– окрестность, содержащая только сам узел ***b*** – подмножество (b);
– окрестность, содержащая узлы, расположенные относительно ***b*** на расстоянии не более одного шага – подмножество (b, a, c, d);
– окрестность, содержащая узлы, расположенные относительно ***b*** на расстоянии не более двух шагов – подмножество (b, a, c, d, e, g).

Эта система окрестностей позволяет маршрутизатору классифицировать все узлы сети по степени удаленности от него, что весьма полезно с точки зрения маршрутизации пакетов в сети. Данную систему окрестностей можно рассматривать как упрощенную (по сравнению с графом) модель сети с точки зрения маршрутизатора ***b***. В этом смысле можно признать, что граф сети представим (упрощенно) семейством подмножеств вида (1), т.е. считать, что семейство (1) является топологией рассматриваемой сети, а сама сеть – топологическим пространством с топологией (1).

В дальнейшем будем полагать, что, если некоторое семейство подмножеств Ω узлов конкретной сети (формально удовлетворяющее аксиомам «а» и «б» определения ТП) имеет практическую пользу для решения какой-либо задачи по отношению к данной сети, то такое семейство является топологией на сети, а сеть с данной топологией - топологическим пространством на сети. Одна и та же сеть, представленная графом сети, допускает в общем случае различные топологии. Например, система окрестностей маршрутизатора в узле ***a*** имеет вид:

$$\Omega =\{(a), (a, b), (a, b, c, d), (a, b, c, d, e, g)\}. \tag{2}$$

Количество членов семейства (2) на единицу больше, чем в семействе (1).

Среди всех возможных топологий для сети на рис.1 существуют и такие, которые исчерпывающим образом описывают эту сеть (т.е. являются эквивалентными формами представления по отношению к графу сети), например:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(b), (b, a, c, d), (b, d, e), (b, a, c, d, e)\ (b, d, g), (b, a, c, d, g),\\ &(b, d, e, g),\ \ (b, a, c, d, e, g)\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Более компактным описанием топологического пространства является *база* этого пространства ([21]). Для графа сети на рис.1. база относительно узла ***b*** имеет вид:

$$Y = \{(b), (b, a), (b, c), (b, d), (d, e), (d, g)\}. \tag{4}$$

Согласно определению базы, любое подмножество семейства (3) можно получить объединением некоторых подмножеств базы (4).

Рассмотренная выше сеть на рис. 1 обладает тем свойством, что в ней нет ни одного изолированного узла и ни одного контура. Иными словами, все узлы сети на рис. 1, так или иначе, связаны между собой с помощью минимального числа ребер. Сеть с такой структурой называется древовидной или *односвязной*. Количество ребер в односвязной сети всегда на единицу меньше числа узлов. Сеть с одним контуром является *двусвязной* и т.д.

Если в некоторой сети есть хотя бы один изолированный узел, то построение топологического пространства на основании приведенного ранее формального определения ТП требует введения т.н. *пустого элемента* Ø множества X, который интерпретируется как особый, выделенный узел сети. На рис. 3 представлен граф сети, который отличается от рассмотренного ранее графа на рис.1 тем, что в нем два узла (c и g) являются изолированными. При этом введен пустой узел сети Ø, который по определению имеет связь со всеми остальными узлами сети. База такой сети имеет вид:

$$Y = \{(\varnothing), (\varnothing, c), (\varnothing, g), (a, b), (b, d), (d, e)\}. \quad (5)$$

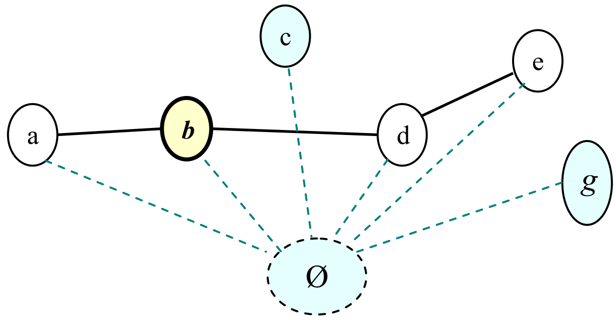

Рисунок 3 – Граф сети с изолированными узлами

Так же как и база (4), база (5) имеет число подмножеств, равное числу основных узлов сети. Однако в сети с изолированными узлами система окрестностей может быть построена только относительно особого узла (пустого элемента Ø).

Если в некоторой сети все узлы изолированы, то на этой сети можно построить только одну топологию, которая в данном случае называется *сильнейшей* или *дискретной*. Дискретное топологическое пространство из шести узлов задается семейством вида:

$$\Omega = \{(\varnothing), (\varnothing, a), (\varnothing, b), (\varnothing, c), (\varnothing, d), (\varnothing, e), (\varnothing, g)\},(\varnothing, a, b, c, d, e, g)\}. \quad (6)$$

База дискретной топологии (6) имеет вид:

$$Y = \{(\varnothing), (\varnothing, a), (\varnothing, b), (\varnothing, c), (\varnothing, d), (\varnothing, e), (\varnothing, g)\}. \quad (7)$$

Однако на основе дискретной базы можно построить полное семейство подмножеств, удовлетворяющее двум формальным условиям определения ТП (замкнутость по операциям пересечения и объединения подмножеств). Это полное семейство подмножеств, очевидно, будет содержать любую другую базу и любое другое семейство, формально возможное на множестве элементов X. Как уже было отмечено выше, признавать ли эти формально допустимые конструкции топологиями на множестве X или не признавать – требует дополнительного аксиоматического соглашения. В рамках принятой нами аксиомы структуры все эти конструкции (кроме дискретной топологии) не являются топологическими пространствами на множестве несвязных узлов сети.

Полной противоположностью сети с дискретной топологией является сеть, в которой все узлы считаются стянутыми в одну точку, т.е. неразличимы между собой. На такой сети также можно построить всего одну топологию вида (8), которая называется *слабейшей* или *тривиальной*.

$$\Omega = \{(\varnothing), (\varnothing, a, b, c, d, e, g)\}. \quad (8)$$

В определении ТП нет категоричного требования об обязательном присутствии пустого элемента Ø во множестве X. В связной сети, в которой нет изолированных узлов, можно строить ТП без использования Ø. В то же время, элемент Ø (особый узел сети) можно формально вводить при построении ТП на любой сети, в т.ч. и на древовидной сети. Семейства подмножеств (1) - (4) не изменят своей сути, если в каждое подмножество этих семейств добавить пустой элемент, а в каждое семейство – подмножество *(Ø)* из пустого элемента. Например, семейство вида (9) эквивалентно семейству (1).

$$\Omega = \{(\varnothing), (\varnothing, b), (\varnothing, b, a, c, d), (\varnothing, b, a, c, d, e, g)\}. \quad (9)$$

Аналогично, база вида (10) эквивалентна базе (4):

$$Y = \{(\varnothing), (b), (b, a), (b, c), (b, d), (d, e), (d, g)\}. \quad (10)$$

Использование особого, несуществующего узла сети (или абстрактного пустого элемента Ø множества узлов *X*) при построении топологического пространства сети, на первый взгляд, может выглядеть как чисто формальный прием, не имеющий реальной содержательной интерпретации. Для одноранговых сетей, в которых все узлы находятся в одном уровне иерархии (т.е. принадлежат одному множеству узлов), это действительно так. Однако ситуация принципиально меняется, если рассмотреть сеть с многоуровневой иерархической структурой, узлы которой находятся в разных уровнях (т.е. принадлежат различным множествам узлов).

Большинство современных сетей имеют иерархическую организацию. Например, типичная локальная сеть имеет двойное назначение: а) быстрый обмен информацией внутри сети; б) взаимодействие узлов сети с внешней сетью (Интернет). Механизмы и скорости внутреннего и внешнего обмена принципиально различны. Внутренний обмен выполняется скоростными коммутаторами, а внешний обмен - с помощью выделенного маршрутизатора локальной сети, который добавляет локальной сети функцию доступа к внешней сети, и, как правило, имеет меньшее быстродействие. Маршрутизатор доступа в определенном смысле является особым, несобственным узлом сети. Для замкнутой сети он вообще не нужен. Однако, если строить открытую сеть, то этот маршрутизатор играет роль пустого (открытого) элемента множества. Он по определению имеет связь с каждым из узлов сети, т.е. превращает любое подмножество узлов сети в открытое подмножество, способное взаимодействовать с внешней сетью. Этот маршрутизатор не предназначен для внутреннего обмена между узлами, но в случае, если какой-то узел сети является изолированным (по внутренней скоростной связи локальной сети) от других узлов, то маршрутизатор может принять на себя несвойственную ему функцию внутренней связи между узлами. При этом скорость такой связи будет намного меньше, чем по внутренней локальной сети.

Конечно, описанная выше модель взаимодействия узлов локальной сети между собой и с внешней сетью несколько идеализирована с точки зрения существующих сетевых технологий и архитектур. Однако при построении сети со строгой многоуровневой иерархией по технологии ***UA-ITT*** (как это предложено в работе [4]), такая модель является вполне реальной. Структура сколь угодно большой и сложной открытой сети UA-ITT строится как объединение типовых сегментов (***фракталов** сети)* на разных уровнях иерархии, рис.4. Каждый фрактал содержит множество *X* из *N* узлов горизонтальной плоскости и один *несобственный узел* Ø (который мы назовем пустым элементом множества *X* - выделен голубым цветом). Узел Ø находится на один уровень иерархии выше, чем горизонтальная плоскость фрактала. Узел Ø имеет обязательные вертикальные связи с каждым из узлов фрактала. Иными словами, наличие узла Ø и его связей со всеми остальными узлами фрактала обеспечивает фракталу минимальную связность, присущую дискретному топологическому пространству. Кроме того, фрактал может иметь произвольную структуру горизонтальных связей, т.е. обладать любой топологией - от дискретной (несвязной) до тривиальной (полно-связной). Очевидно, что общей базой для всех топологий фрактала является дискретная база.

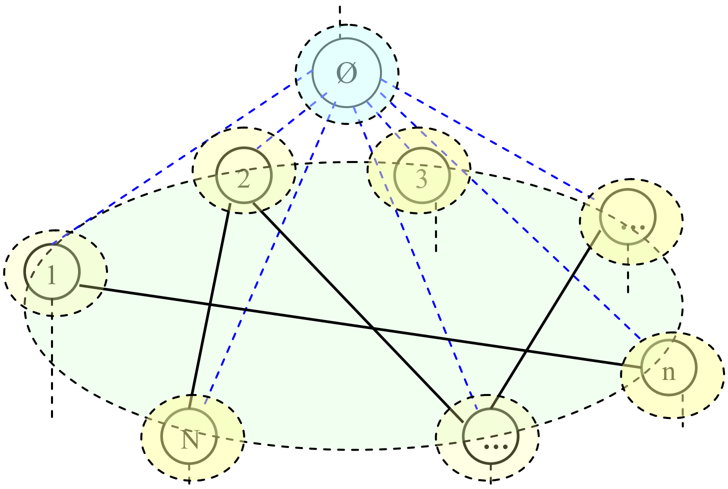

Рисунок 4 – Фрактал сети

Каждый элемент фрактала (т.е. узел сети) может иметь собственную окрестность, в которой находятся *конечные абоненты* сети (*end points **EP***). Иными словами, элементы фрактала (узлы сети) являются *точками доступа* для абонентов (*Access Points **AP***). Абоненты сети, в отличие от узлов сети, не могут иметь горизонтальных логических связей между собой, они связаны только через посредство того узла, в окрестности которого они находятся. Узлы всех фракталов общей сети образуют *инфраструктуру сети*. Таким образом, любой узел сети, с одной стороны, является элементом общей инфраструктуры, а с другой – *точкой доступа* для своей сети доступа.

Поскольку фрактал является связной системой элементов (вне зависимости от наличия и характера горизонтальных связей элементов), всякому фракталу сети можно поставить в соответствие одну или несколько различных топологий, удовлетворяющих четырем рассмотренным выше аксиомам: T_0, T_1, T_2, S_1.

Пусть f_i – произвольный фрактал сети, $F = \{f_i\}$ – некоторое множество фракталов. Элемент f_i множества F, в свою очередь, может быть особым элементом подчиненного фрактала. Иерархию понятий «множество узлов» применительно к фракталу сети, можно продолжать неограниченно в двух противоположных смыслах: а) как объединение нескольких отдельных фракталов путем присоединения их вершин к узлу более высокого уровня иерархии; б) как присоединение нескольких отдельных фракталов своими вершинами к узлам горизонтальной плоскости существующего фрактала. В связи с этим целесообразно ввести компактную целочисленную характеристику n для различных уровней иерархии фракталов F^n. Назовем эту характеристику *порядком фрактала*. Будем считать, что фрактал f является множеством нулевого порядка F^0. Фрактал первого порядка будем обозначать иногда без явного указания его индекса, если его порядок ясен из контекста. Фрактал F^n- это элемент фрактала F^{n+1}. Поскольку фрактал содержит только один особый элемент, и его связи со всеми остальными элементами всегда одинаковы, этот элемент и его связи можно подразумевать по умолчанию и не указывать в явном виде на графе фрактала, т.е. граф фрактала можно считать *одноцветным* (*не раскрашенным*).

Пустой элемент Ø множества F – это некоторый непустой элемент множества, старшего на единицу порядка, т.е. $Ø = Ø^1 = f^2_i \in F^2$. Точно так же, непустой элемент $f_i \in F$ (если он не является конечным узлом сети, а есть вершина подчиненного фрактала) может рассматриваться как пустой элемент соответствующего данному подчиненному фракталу множества порядка $n = -1$, т.е. $f_i = Ø^{-1}$. Таким образом, всякий элемент любого множества теоретически может рассматриваться как пустой или непустой элемент по отношению к множествам различного порядка. Нулевой порядок сети, очевидно, можно выбирать условно (примерно так же, как условным является нулевой потенциал земли). При этом узлы и сети, расположенные ниже условно выбранного нулевого порядка, имеют отрицательные значения n.

В реальности иерархия любой конкретной сети в заданный момент времени имеет нижнюю и верхнюю границу, и на любом уровне иерархии могут быть узлы сети, не имеющие под собой дальнейшего разветвления сети вниз по иерархии. Эти узлы содержат только локальные окрестности конечных абонентов сети. Такие узлы не являются пустыми элементами никакого множества в заданной сети. При такой системе обозначений, *иерархическая сеть образуется совокупностью пустых и непустых элементов разных порядков.* Пустые элементы сети являются вершинами фракталов сети, а непустые – конечными узлами сети.

Назовем совокупность всех пустых элементов разных порядков в произвольной сети *нулями сети*, а совокупность всех узлов сети вместе с нулями - *классом элементов* (точек, узлов). Класс – это особый тип множества, который не сводится ни к одному из определенных выше понятий «*множество n-го порядка*» (фракталов). Класс элементов можно представить двухцветным графом (нулевые и ненулевые узлы), в котором любой узел графа имеет целочисленный порядок n (рис. 5). Элементами класса являются множества различных порядков, причем для каждого из них аксиомы отделимости T_0, T_1, T_2 не выполняются. На элементах класса можно построить различные топологии с использованием аксиомы структуры S_1.

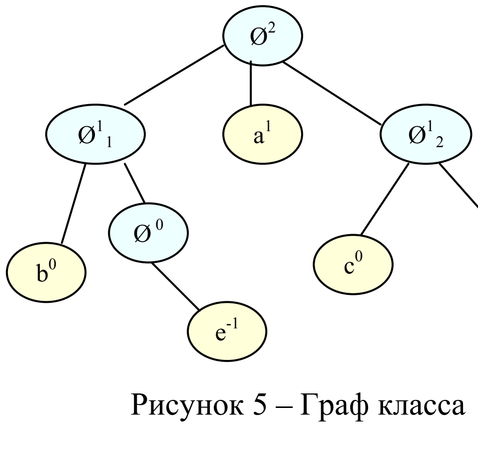

Рисунок 5 – Граф класса

База сети на рис. 5 имеет вид:

$$Y = \{(Ø^2), (Ø^2, Ø^1_1), (Ø^2, a^1), (Ø^2, Ø^1_2), (Ø^1_1, b^0), (Ø^1_1, Ø^0), (Ø^1_2, c^0), (Ø^1_2, d^0), (Ø^0, e^{-1})\}. \quad (11)$$

Введем понятие *базиса топологии* применительно к топологическому пространству фрактала сети по аналогии с понятием «*базис линейной системы*». Термин «базис» в топологии иногда используют как синоним термина «база» ([21]). На наш взгляд, целесообразнее использовать понятие базиса максимально близко по смыслу к общепринятому понятию «базис линейной системы» (или базис линейного пространства).

Условимся, что в топологии фрактала вертикальные связи узлов сети горизонтальной плоскости с выделенным узлом Ø подразумеваются по умолчанию; эти связи не будем указывать явно ни в описании топологии фрактала, ни в описании базы этой топологии. Тогда база дискретной топологии на некотором множестве из шести узлов *{a, b, c, d, e, g }* принимает более простой вид:

$$Y = \{(a), (b), (c), (d), (e), (g)\}. \tag{12}$$

Далее, в определении топологии фрактала примем еще одно дополнительное условие – т.н. *аксиому базы*: <u>*Аксиома базы (**S_2**)*</u>: *база топологии фрактала взаимно однозначно задается графом фрактала*.

Один из способов удовлетворить аксиоме базы - перечислить в семействе подмножеств базы все бинарные отношения между узлами сети (в горизонтальной плоскости). Другой эквивалентный способ - задать предбазу в виде упорядоченного по узлам сети семейства подмножеств, каждое из которых содержит список смежных узлов. Предбаза позволяет использовать для построения топологического пространства не только объединения любых подмножеств, но и пересечения любой пары подмножеств предбазы. Например, для графа на рис. 1 предбаза имеет вид:

$$C = \{(b)_a, (a, c, d)_b, (b)_c, (b, e, g)_d, (d)_e, (d)_g\}. \tag{13}$$

Количество подмножеств предбазы вида (13) всегда равно числу узлов фрактала сети (в горизонтальной плоскости). Пересечение всех подмножеств предбазы (13) по умолчанию есть открытое подмножество *(*Ø). Назовем каждое подмножество предбазы такого типа *топологическим вектором* фрактала сети. Обозначим эти векторы ***a, b, c, d, e, g.*** Для рассмотренного нами примера можно записать:

$$\boldsymbol{a} = (b), \boldsymbol{b} = (a, c, d), \boldsymbol{c} = (b), \boldsymbol{d} = (b, e, f), \boldsymbol{e} = (d), \boldsymbol{g} = (d). \tag{14}$$

Систему топологических векторов фрактала сети назовем *топологическим базисом фрактала сети* (обозначим его ***B***). Рассмотренная ранее на рис. 1 матрица смежности является одной из удобных эквивалентных форм выражения топологического базиса. Каждая строка этой матрицы является топологическим вектором. Каждый элемент строки – это абстрактная координата вектора. Координаты принимают два возможных значения: {1. □} . Эти значения можно интерпретировать как абстрактные расстояния. В этом случае между ними устанавливается отношение порядка вида 1 < □ . Также эти значения можно интерпретировать как меру близости узлов к другу, их абстрактной связности. Тогда значения координат должны иметь отношения обратного порядка: 1 > □. Значение координаты 1 соответствует максимальной связности или минимальному расстоянию между узлами. Значение □ соответствует минимальной связности между узлами или максимальному расстоянию между ними.

Принятие аксиом T_0, T_1, T_2, S_1, S_2 по отношению к фракталу сети позволяет сузить понятие топологического пространства сети. В частности, аксиома базы S_2 устанавливает взаимнооднозначное отношение между графом сети и базисом сети *B*. Однако по-прежнему между графом сети и топологическим пространством (ТП) сети нет взаимнооднозначного соответствия. В одном и том же базисе *B* можно построить разные ТП и разные вторичные базисы, а для одного ТП в общем случае могут существовать несколько различных базисов. Например, в дискретном базисе можно построить любые другие возможные базы, базисы и ТП. Однако для дискретного ТП единственным возможным базисом является дискретный базис. В то же время тривиальная топология может иметь любой из возможных базисов, в т.ч. и дискретный.

Введем понятие абстрактной мощности вектора и базиса для фрактала сети. *Мощностью вектора* назовем величину *ρ,* равную количеству единиц в соответствующей строке матрицы смежности. Для фрактала из *N* узлов мощность вектора изменяется в диапазоне от *1* до *N*. *Мощность P базиса B* определим как сумму мощностей всех векторов базиса. Эта мощность изменяется в диапазоне от *N* (для дискретного базиса) до N^2 (полно-связного базиса).

Введем понятие *собственного базиса* $\boldsymbol{Z}$ топологии. Пусть задана некоторая топология Ω. Среди всех возможных базисов данной топологии существует по крайней мере один такой базис Z, который имеет минимальную мощность. Этот базис назовем собственным базисом топологии. Пару векторов, имеющих пустое пересечение, назовем взаимно *ортогональными*. Базис, в котором любая пара векторов имеет пустое пересечение, назовем *ортогональным базисом*.

Аксиома полноты (S3). Среди всех топологических пространств, которые можно построить в некотором базисе B, существует одно такое, которое содержит полный набор всех возможных объединений и пересечений подмножеств базиса B. Это пространство назовем полным в базисе B. Количество подмножеств полного топологического пространства назовем силой базиса.

Формализуем понятие «*сила топологии*». Назовем *силой топологии* силу ее собственного базиса. Сильнейшей является, очевидно, дискретная топология и дискретный базис. Слабейшей является тривиальная топология, собственный базис которой содержит всего один абстрактный вектор $\boldsymbol{z}$. Для сети на рис. 1 этот вектор равен:

$$\boldsymbol{z} = (a, b, c, d, e, g). \tag{15}$$

Определение: Полное пространство в топологическом базисе *B,* заданном простым графом горизонтальной плоскости фрактала сети, назовем *топологическим пространством фрактала*. Тем самым, мы устанавливаем взаимнооднозначное соответствие (отношение эквивалентности) между двумя понятиями: «граф фрактала сети» и «топологическое пространство фрактала сети». Напомним, что простой граф не имеет ориентации ребер, и все ребра считаются одинаковой длины. В частности, если устремить длину ребра на графе фрактала к нулю, то при этом топология фрактала полносвязной сети устремится к тривиальной топологии.

Таким образом, предложенная в работе теоретико-множественная фрактальная модель сети позволяет представить открытую телекоммуникационную сеть как обобщенное топологическое пространство. Такое представление является необходимым условием для построения более детальной тензорной модели сети, в которой роль топологической точки тензорного пространства играет открытая сеть, вне зависимости от масштабов этой сети (от одного узла коммутации до объединения многих подсетей). Координатами топологического пространства сети могут быть не только время, но и дискретные аргументы связности сети со своим окружением. В свою очередь, эти аргументы являются идентификаторами многопродуктовых потоков, или же типов информационной проводимости сети относительно различных видов трафика и классов сервиса.

В заключение также отметим, что фрактальная топологическая сетевая модель создает основу для постановки и решения задачи синтеза тензорной модели сети, получаемой объединением отдельных составляющих ее подсетей. Данный подход согласуется с общесистемной методологией анализа и синтеза сложных объектов по частям (т.е. принципом диакоптики Г.Крона).

Литература

1. *Соколов Н.* Процессы конвергенции, интеграции и консолидации в современной телекоммуникационной системе / *Н. Соколов* // Connect! Мир связи. – 2007. – № 10. – С.1-7.
2. *Макаренко С.И.* Анализ математического аппарата расчета качества обслуживания информационно-вычислительной сети на сетевом уровне эталонной модели взаимодействия открытых систем [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.sbras.ru/ws/YM2006/10566/article.htm.
3. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями / *Клейнрок Л.* . – М.: Мир, 1979. – 600 с.
4. *Графы, сети и алгоритмы* / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
5. Методы анализа сетей: пер. с англ. / Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас. – М.: Мир, 1984. – 496 с.: ил.
6. *Зайцев Д.А.* Синтез моделей Петри телекоммуникационных протоколов: зб. «Наукові праці ОНАЗ ім. О.С.Попова». – Одесса: Изд. центр ОНАС им. А.С.Попова, 2005. – №2. – С.36-42.
7. *Полукаров Д.Ю.* Методы IP-маршрутизации на основе алгоритмов с использованием нечетких множеств: дис. … канд. техн. наук: 05.13.13 / Д.Ю.Полукаров.– Самара, 2007. – 121 с.
8. *Фрактальный анализ и процессы в компьютерных сетях* : учеб. пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, О.Г. Иванова и др. – [2-е изд., стереотип.] – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 108 с.
9. *Поповский В.В., Лемешко А.В.* Тензорный анализ в задачах системного исследования телекоммуникационных систем / *В.В. Поповский, А.В. Лемешко*// Радиотехника. – 2002. – Вып. 125. – С. 156-164.

10. *Лемешко А.В.* Теоретические основы управления сетевыми ресурсами с использованием тензорных математических моделей телекоммуникационных систем: дис. … д-ра техн. наук: 05.12.02 / Александр Витальевич Лемешко.– Х., 2005. – 347л.
11. *Пасечников И.И.* Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей / *Пасечников И.И.* – М.: «Машиностроение-1», 2004. – 216 с.
12. *Дробот О.А.* Моделі забезпечення гарантованої якості обслуговування інформаційного трафіка у мультисервісних телекомунікаційних мережах: дис. … канд. техн.наук: 05.12.02 / Ольга Аанатоліївна Дробот. – Харків, 2007. – 18 с.
13. *ДавиденкоИ.Н.* Распределенное управление трафиком в мобильных сетях: УДК 004.724.4(045) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nbuv.gov.ua/portal/natural/Akpa/2008_12/10.pdf.
14. *Воробієнко П.П., Тіхонов В.І.* Відкрита система гнучкої адресації вузлів мережі: свідоцтво про реєстрацію авторського права на винахід № 29473 від 15.07.2009 р.
15. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию / *Александров П.С.* – М.: Наука, 1977. – 368 с.
16. *Корн Г.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г.Корн, Т.Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
17. Аксиомы отделимости [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.kantiana.ru/mathematics/umk/topology06.pdf.
18. Пат. 46761 Україна; МПК H04L 12/28. / Спосіб адаптивної пакетної комутації в телекомунікаційних мережах. – Воробієнко П.П., Тіхонов В.І.; заявники та власники патенту Воробієнко П.П., Тіхонов В.І. – u 2009 05192; заявл. 25.05.2009; опубл. 11.01.2010. Бюл. № 1.
19. Пат. 46188 Україна; МПК H04L 12/28. / Спосіб розподіленої інкапсуляції пакетів у телекомунікаційних мережах. – Воробієнко П.П., Тіхонов В.І.; заявник та власник патенту Одеська нац. Академія зв’язку ім. О.С.Попова. – u 2009 06517; заявл. 22.06.2009; опубл. 10.12.2009. Бюл. № 23.