УДК 621.372:621.371

Дмитриева И.Ю.
Дмитрієва І.Ю.
Dmitrieva I.Yu.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИАГОНАЛИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ МНОГОМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ДІАГОНАЛІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ БАГАТОМІРНИХ КІЛ

MATHEMATICAL MODEL OF THE DIAGONALIZATION PROBLEM'S NUMERICAL REALIZATION IN THE CASE OF MULTIDIMENSIONAL CIRCUITS

Аннотация. Предложена блок-схема стандартной процедуры – подпрограммы для компьютерной реализации диагонализационного процесса конечномерной системы дифференциальных операторных уравнений в частных производных над произвольным арифметическим пространством также конечной размерности.

Данный алгоритм получения искомых скалярных уравнений является одновременно как следствием, так и математическим аналитически численным методом при решении исходной инженерной задачи, связанной с исследованием в области электродинамики и теории многомерных аналоговых цепей.

Анотація. Запропонована блок-схема стандартної процедури – підпрограми для комп'ютерної реалізації діагоналізаційного процесу кінцевомірної системи диференційних операторних рівнянь у часткових похідних, які розглядаються над довільним арифметичним простором також кінцевої розмірності.

Даний алгоритм одержання шуканих скалярних рівнянь є як наслідком, так і математичним аналітично-чисельним методом при вирішенні вихідної інженерної задачі, яка зв'язана з дослідженням в області електродинаміки та теорії багатовимірних аналогових кіл.

Summary. We propose the flow-chart of the standard procedure – subsystem in the case of computer realization for the diagonalization process that is applied to the finite-dimensional system of differential operator equations. The latter is given over the arbitrary numerical space, whose dimension is finite too.

The latest algorithm of the unknown scalar equations' construction represents simultaneously as the corollary, as mathematical analytic and numerical method when the original industrial problem is solved. The last one is the important part of technical electrodynamics and deals directly with study of the multidimensional analogous circuits.

Очевидно, что решение любой инженерной/прикладной проблемы может быть реализовано различными способами. В том случае, когда исходные подходы изучения задачи носят не экспериментальный, а теоретический характер, процесс исследования имеет следующую алгоритмическую структуру:

1
Построение математической модели исходной прикладной/инженерной постановки задачи

↓ порождает

2
Конструктивное (аналитическое) решение поставленной в 1 задачи (если это представляется возможным)

↓ в любом случае (даже при отсутствии 2) следует

3
Численная (компьютерная) реализация/подтверждение либо аналитического решения 2, либо непосредственно пункта 1

(1)

При этом иногда последний этап 3 позволяет даже построить новый тип процедуры – подпрограммы [1] для прямой компьютерной реализации рассматриваемой задачи. Здесь следует заметить, что указанное выше понятие из [1] не утратило своей актуальности и в настоящее время, поскольку является классически фундаментальным при создании новых пакетов вычислительных программ как для теоретических, так и прикладных исследвоаний на современном этапе развития науки и техники.

Следующий момент является изначально важным при осуществлении стадии 3 в диаграмме (1). Именно, в случае создания вышеупомянутой стандартной процедуры [1] процесс непосредственного составления программы, вообще говоря, не зависит от выбора языка программирования. Основной отправной пункт здесь – это тщательно построенная и выверенная блок-схема [1], которая служит базой при конструировании процедуры-подпрограммы на том языковом уровне, что представляется наиболее предпочтительным для каждой конкретной изучаемой задачи, либо даже целого класса таковых.

Последний факт объясняет причину того, что построение блок-схемы – суть решающая, краеугольная операция третьего заключительного шага приведенной условной схемы исследования (1).

Возможно, при этом может создаться впечатление, что весь вышеописанный процеснсс (1) как будто даже «пренебрегает» своим достаточно важным этапом 2 . Действительно, зачастую эта вторая, промежуточная ступень изучения поставленной прикладной задачи, кажется недостижимой, и только что проанализированный уровень исследований 3 вступает в силу как мгновенное завершение исходного пункта 1 .

Тем не менее, более приоритетными являются именно те результаты, что непосредственно связаны с математическим решением исходной задачи в аналитическом виде. Именно поэтому в общем случае, как правило, приветствуется наличие шага 2 в диаграмме (1). Причем, это пожелание остается существенным даже сейчас, во время высоко скоростных возможностей компьютерных вычислений.

Таким образом, конкретизируя схему (1) для предлагаемой здесь инженерной задачи, приходим к вопросу, связанному с исследованием в области электродинамики и теории многомерных аналоговых цепей [2]. Последний порождает поиск эффективной диагонализации описывающей такую цепь системы дифференциальных операторных уравнений в частных производных [3]. Данный аспект представляет собой как математическую постановку исходной прикладной задачи, так и ее аналитическое следствие.

Здесь следует напомнить, что под диагонализацией, как обычно, понимается построение системы, эквивалентной исходной и содержащей только скалярные уравнения. Смысл последних состоит в том, что в качестве неизвестной эти уравнения содержат ровно одну компоненту искомый вектор-функции, описывающей многомерную цепь. Получение такого результата диагонализации позволяет решить исходную инженерную задачу конструктивно и, даже можно сказать, кардинально.

Обращаясь вновь к работе [2], необходимо отметить ее неоспоримую пользу в применении к исследованию многомерных цепей, а значит, и тесную связь с диагонализацией соответствующих систем дифференциальных операторных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами [3]. Потребность в развитии направления [2] была активизирована появлением многомерных волновых цифровых фильтров [4], синтез которых осуществляется посредством многомерных аналоговых цепей [2]. Кроме того, теория последних породила весомые результаты [5] и в классической электродинамике [6]. В этом случае обычная максвелловская система дифференциальных уравнений сводилась к двум определяющим аксиоматическим [5], исследование различных форм которых отражено в работах [7 … 9].

При этом, как итоги диагонализации [7 … 9], так и их обобщение [3] на случай конечномерной системы дифференциальных операторных уравнений в частных производных над конечномерным действительным пространством, являются новыми как с математической, так и с инженерной точек зрения. Действительно, в первом случае не требуется построение обратных операторов, что значительно упрощает исследования. Во втором – появляется возможность решить ненайденную до настоящего времени задачу эффективной диагонализации многомерной цепи в общем виде.

Принимая во внимание все вышесказанное, можно утверждать, что первые две стадии из (1) при изучении указанной инженерной задачи, успешно преодолены.

Однако окончательное исследование поставленной задачи не завершено, поскольку остается открытым вопрос о реализации последнего шага 3 схемы (1). Поэтому целью данной работы является построение соответствующей блок-схемы, которая заключает процесс решения инженерных вопросов, поднятых в работах [2, 3, 7 … 9].

1. Математическая постановка задачи и план ее аналитического решения (этапы 1 , 2 в (1)). Предваряя процедуру построения искомой блок-схемы, следует напомнить основные моменты выполнения в данном конкретном случае пунктов 1 , 2, представленных в схеме (1).

Фактически, в статье [3] предложена диагонализация системы n-го порядка произвольных дифференциальных операторных уравнений над пространством $\boldsymbol{R}_{m+1}$:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} F_i = f_j \quad (j=\overline{1,n}), \tag{2}$$

где $\vec{F} = \vec{F}(x,t)$ и $\vec{f} = \vec{f}(x,t)$ – n-мерные искомые и известные вектор функции соответственно, $n \cdot \widetilde{\ell}$ - непрерывно дифференцируемые в некоторой области пространства $\boldsymbol{R}_{m+1}$; $\boldsymbol{(}x,t\boldsymbol{)} \in \boldsymbol{R}_{m+1}$, а $x=(x_1,...,x_m), t$ координаты пространства и времени. Величина $\widetilde{\ell}$ определяется максимальным порядком старшей производной операторов A_{ji} по всем $j,i=\overline{1,n}$, а сами эти дифференциальные операторы, действующие над пространством $\boldsymbol{R}_{m+1}$, произвольны, что подразумевает, вообще говоря, даже их нелинейность.

Тем не менее, для эффективного решения задачи диагонализации (2) $A_{ji}(j,i=\overline{1,n})$ должны удовлетворять двум обязательным условиям, первым из которых является попарная коммутативность. А именно,

$$A_{ji} A_{kl} = A_{kl} A_{ji} (j,i,k,l=\overline{1,n}), \tag{3}$$

где «умножение» операторов понимается как их обычное последовательное применение в направлении справа налево, от «внутреннего» к «внешнему».

Вторым обязательным требованием, которое не фигурировало в [3] в силу заведомо предполагаемой операторной линейности, является обратимость, что естественным образом следует из вышеприведенного нового допущения о нелинейности. Как известно [10], оператор A – обратим, если для любого $y \in \operatorname{Im} A$ уравнение

$$Ax = y \tag{4}$$

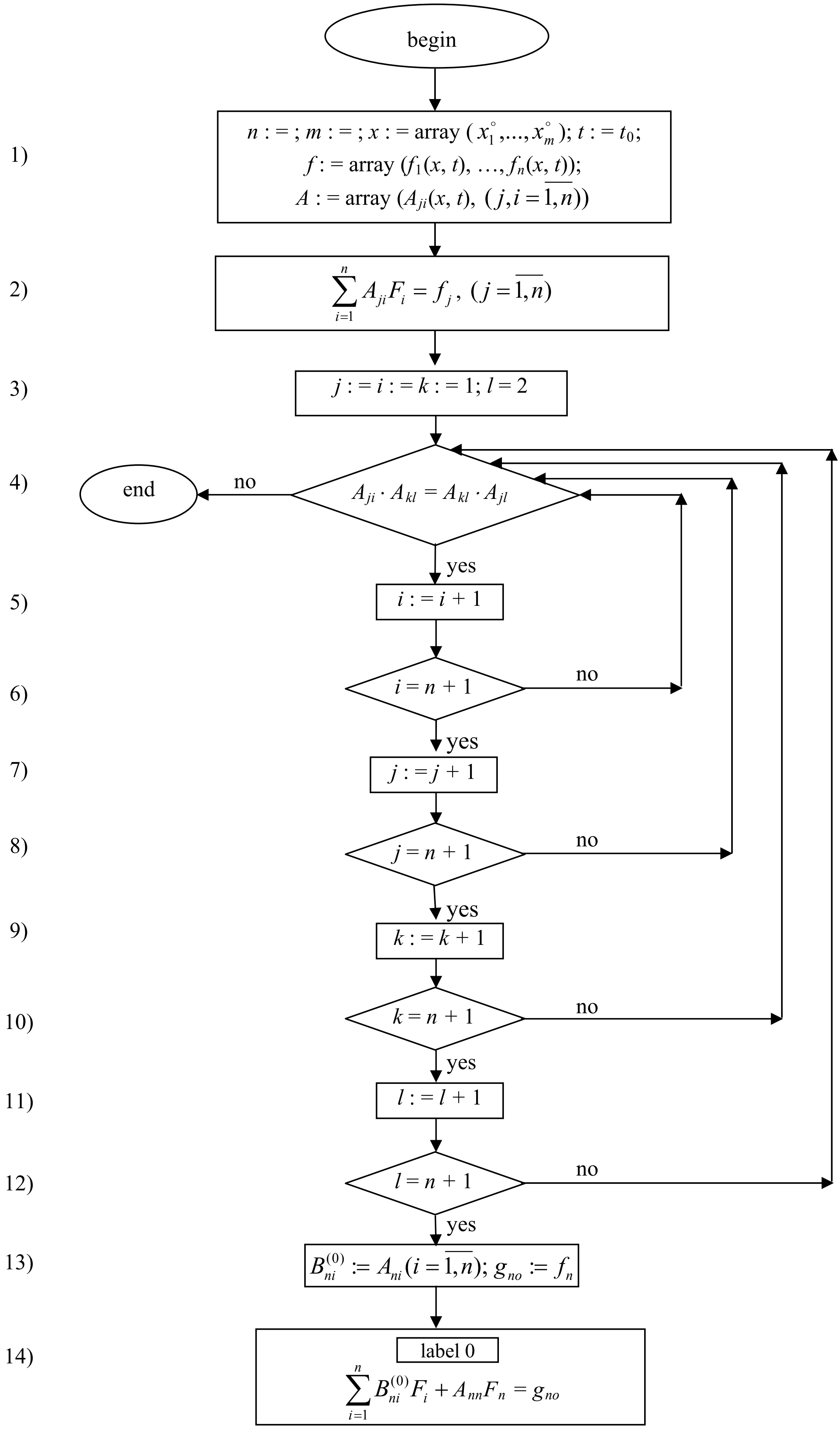
имеет единственное решение. Здесь оператор A, действующий из некоторого пространства E в некоторое пространство E_1, имеет своей областью определения множество $D_A \subseteq E$, а $\operatorname{Im} A \subseteq E_1$ – образ этого оператора.

Далее, поскольку понятия диагонализации и скалярного уравнения были раскрыты ранее, во введении, можно непосредственно приступить к краткому описанию алгоритма, изложенного в [3]. Искомая диагонализация (2) получена последовательным применением соответствующих дифференциальных операторов (известных элементов A_{ji} $(j,i=\overline{1,n})$ матрицы в (2)) к исходным уравнениям этой же системы (2). Процедура осуществлена в два этапа: 1) сведение первого уравнения исходной системы к скалярному (диагонализация «снизу вверх»); 2) получение скалярных уравнений относительно остальных искомых компонент $F_i(i=\overline{1,n})$ (диагонализация «сверху вниз»).

Отразим теперь упомянутые вкратце основные результаты [3] при конструировании искомой блок-схемы, представленной в следующем разделе.

Здесь следует заметить, что предлагаемые построения проводятся в предположении заведомой обратимости всех операторов A_{ji} $(j, i = \overline{1,n})$ системы (2).

2. Блок-схема алгоритма диагонализации системы (2) (этап 3 в (1)).



15) $$\sum_{i=1}^{n-1} A_{ji}F_i + A_{jn}F_n = f_j \ (\, j = \overline{1, n-1}\,)$$

16) $$k := 1$$

17) $$B_{ji}^{(k)} := A_{nn}A_{ji} - A_{jn}B_{ni}^{(0)};$$
$$g_{jk} := A_{nn}f_j - A_{jn}g_{no}(j, i = \overline{1, n-1})$$

18) $$\boxed{\text{label } 1}$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} B_{ni}^{(0)}F_i + B_{nn}F_n = g_{no}$$

19) $$\sum_{i=1}^{n-1} B_{ji}^{(k)}F_i = g_{jk} \ (\, j = \overline{1, n-1}\,)$$

20) $$k := k + 1$$

21) $$B_{ji}^{(k)} := B_{n-k+1,n-k+1}^{(k-1)}B_{ji}^{(k-1)} - B_{j,n-k+1}^{(k-1)}B_{n-k+1,i}^{(k-1)};$$
$$g_{jk} := B_{n-k+1,n-k+1}^{(k-1)}g_{j,k-1} - B_{j,n-k+1}^{(k-1)}g_{n-k+1,k-1}(j, i = \overline{1, n-k})$$

22) $$\boxed{\text{label } k}$$
$$\sum_{i=1}^{n-k} B_{n-k+1}^{(k-1)}F_i + B_{n-k+1,n-k+1}^{(k-1)}F_{n-k+1} = g_{n-k+1,k-1}(k = \overline{1, n-1})$$

23) $$\sum_{i=1}^{n-k} B_{ji}^{(k)}F_i = g_{jk} \ (\, j = \overline{1, n-k}\,)$$

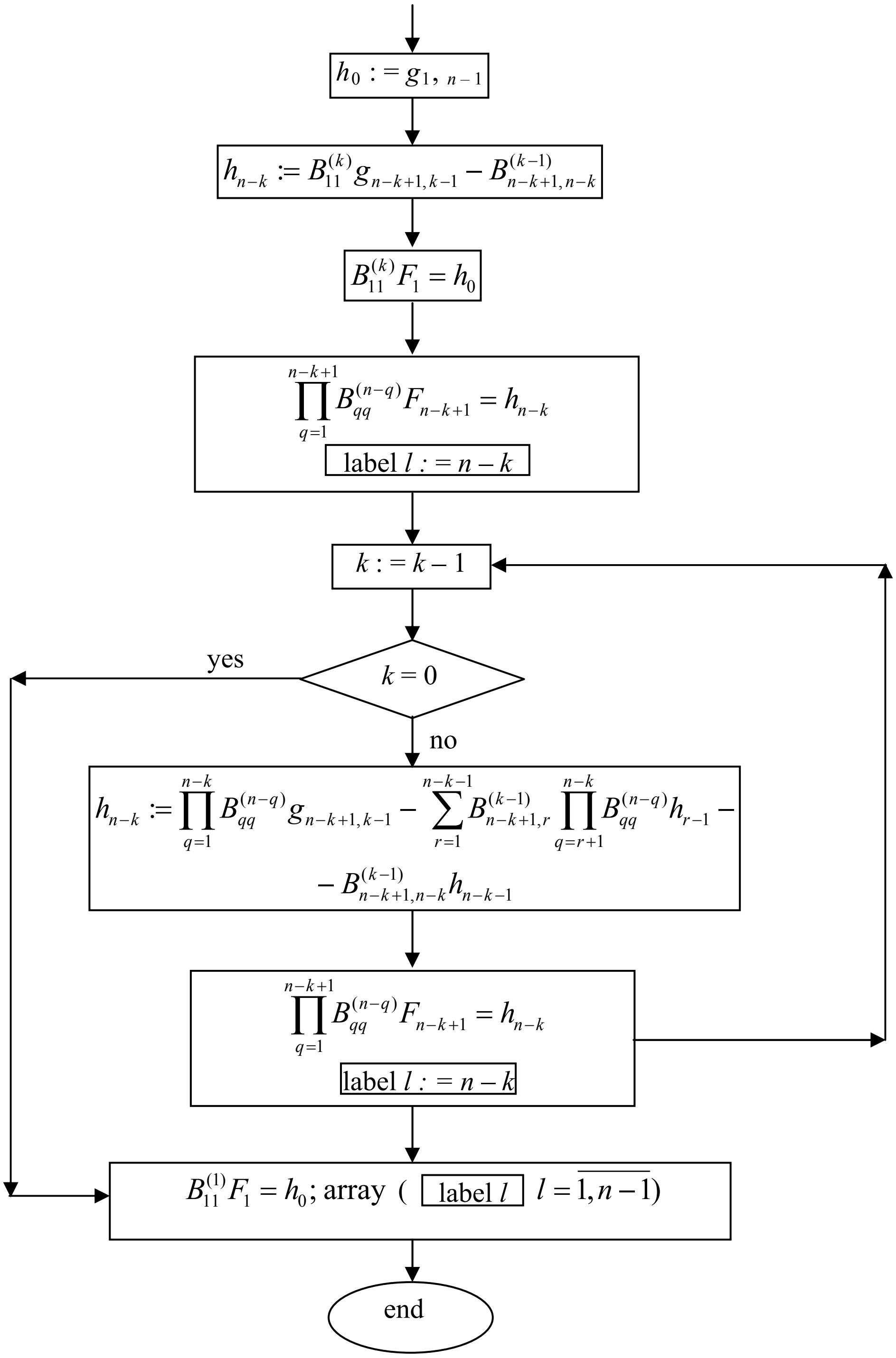
24) $$k = n - 1$$

no → 20)

yes

25) $$B_{11}^{(n-1)}F_1 = g_{1,n-1}$$
$$\sum_{i=1}^{n-k} B_{n-k+1,i}^{(k-1)}F_i + B_{n-k+1,n-k+1}^{(k-1)}F_{n-k+1} = g_{n-k+1,k-1}(k = \overline{1, n-1})$$
$$\Updownarrow$$
$$B_{11}^{(k-1)}F_1 = g_{1k}; \text{ array } \left(\boxed{\text{label } k} \quad k = \overline{1, n-1}\right);$$

26) $$k := n - 1$$



Согласуем теперь функции операторов представленной блок-схемы с алгоритмом диагонализации, рассмотренным в [3] и вкратце изложенным в предыдущем разделе 1 настоящей работы.

Блок 1) задает исходные данные, а именно: размерность системы уравнений (2) – (n), пространства – (m), пространственные (x) и временную (t) координаты, известные функции из правой части системы (2) – (f) и матрицу операторов (2) – (A).

Блок 2) задает исходную систему (2).

Блоки 3) – 12) проверяют операторы системы (2) на попарную коммутативность (3).

13) – 25) описывают первый этап диагонализации (2) в направлении «снизу вверх», в результате чего получено первое искомое скалярное уравнение относительно компоненты F_1 вектор-функции $\vec{F}(x,t)$. При этом блоки 13) – 15) относятся к «нулевому» предварительному шагу данного этапа диагонализации, а 16) – 19), 20) – 24) и 25) – к ее первому, общему k-му и завершающему n-му шагам соответственно.

Блоки с 26) по 35) отражают второй и последний этап диагонализации в направлении «сверху вниз». Здесь 26) – 30) – первый шаг упомянутой процедуры, а 31) – 34) и 35) – ее общий l-й и заключительный (n – 1)-й шаги соответственно. Результатом действия 26) – 35) является получение всех остальных искомых скалярных уравнений относительно компонент $F_i(i = 2,n)$ вектор функции $\vec{F}(x,t)$. Блок 35) представляет окончательный итог диагонализационного процесса, упомянутого в предыдущем разделе 1 и аналитически обоснованного в работе [3].

Кроме того, анализируя алгоритм корректности выполнения операций данной блок-схемы, получаем следующие легко проверяемые подтверждения. Именно, на первом этапе диагонализации системы (2) результаты действия блоков 13) – 15), 16 – 19), 20) – 24) и 25) отвечают нулевому, первому, k-му и n-му шагам соответственно диагонализации «снизу вверх» и полностью согласуются с аналогичными теоретическими выводами работы [3]. Непосредственной проверкой также несложно убедиться, что блоки 26) – 30), 31) – 34) и 35) действительно описывают функции первой, общей l-й и заключительной (n-1)-й ступеней второй стадии диагонализации процесса «сверху вниз» из [3].

Таким образом, реализация пункта 3 из схемы (1) при изучении исходной инженерной задачи в области электродинамики и теории многомерных аналоговых цепей полностью завершена, требуемая блок-схема для компьютерных вычислений, подтверждающих аналитические математические результаты [3], построена, и цель настоящей работы достигнута.

В заключение автор выражает глубокую признательность доктору технических наук, профессору Иваницкому А.М., инициировавшему исследование задач, рассмотренных в совместных работах [3, 7 … 9].

Литература

1. *Ющенко Е.Л.* Фортран / Е.Л. Ющенко – К.: Вища школа, 1980. – 400 с.
2. *Иваницкий А.М.* Основы теории многомерных аналоговых и дискретных цепей / А.М. Иваницкий – Одесса: ОНАС, 2003. – 38 с.
3. *Dmitrieva I.Yu.* Diagonalizatioin of the differential operator matrix in the case of the multidimensional circuits / I.Yu. Dmitrieva, A.M. Ivanitckiy // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2009. – №1. – С. 36-51.
4. *Fettweis A.* Multidimensional wave digital filters / A. Fettweis // Proc. of Eur. Conf on Circuit Theory and Design (Geneva, Italy, Sept. 1976). – V.2 – P. 409-416.
5. *Иваницкий А.М.* Зависимость третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух уравнений при произвольном возбуждении электромагнитного поля / А.М. Иваницкий // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – №2. – С. 3-7.
6. *Пименов Ю.В.* Техническая электродинамика / Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. – М.: Радио и связь, 2002. – 536 с.
7. *Иваницкий А.М.* Сведение классической системы уравнений Максвелла к скалярным уравнениям относительно компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ / А.М. Иваницикий, И.Ю. Дмитриева, М.В. Рожновский // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2006. – № 1. – С. 37-47.
8. *Иваницикий А.М.* Сведение “полной” системы дифференциальных уравнений Максвелла к шести скалярным уравнениям относительно компонент вектор-функции $\vec{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{F}_i\}_{i=1}^{6}$ / А.М. Иваницикий, И.Ю. Дмитриева, М.В. Рожновский // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2006. – № 2. – С. 11-23.
9. *Иваницикий А.М.* Диагонализация «симметричной» системы дифференциальных уравнений Максвелла / А.М. Иваницикий, И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2007. – № 1. – С. 15-24.
10. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин – М.: Наука, 1976. – 544 с.

УДК 621.372:621.371
Дмитриева И.Ю. Математическая модель численной реализации диагонализационной задачи в случае многомерных цепей // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2010. – №1. – С. . Библиогр.: 10 назв. – рус.

Предложена блок-схема стандартной процедуры – подпрограммы для компьютерной реализации диагонализационного процесса конечномерной системы дифференциальных операторных уравнений в частных производных над произвольным арифметическим пространством также конечной размерности.

Данный алгоритм получения искомых скалярных уравнений является одновременно как следствием, так и математическим аналитически численным методом при решении исходной инженерной задачи в области электродинамики, связанной с исследованием многомерных аналоговых цепей.

Ключевые слова: блок-схема, диагонализация, дифференциальные операторы, численная реализация, многомерная цепь.

УДК 621.372:621.371
Дмитрієва І.Ю. Математична модель чисельної реалізації діагоналізаційної задачі у випадку багатомірних кіл // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2010. – №1. – С. . Бібліогр.: 10 назв. – рос.

Запропонована блок-схема стандартної процедури – підпрограми для комп'ютерної реалізації діагоналізаційного процесу кінцевомірної системи диференціальних операторних рівнянь у часткових похідних, які розглядаються над свавільним арифметичним простіром також кінцевої розмірності.

Даний алгоритм одержання шуканих скалярних рівнянь являється як наслідком, так і математичним аналітично-чисельним методом при вирішенні вихідної інженерної задачі в області електродинаміки, яка зв'язана з дослідженням багатомірних аналогових кіл.

Ключові слова: блок-схема, діагоналізація, диференціальні оператори, чисельна реалізація, багатомірне коло.

UDK 621.372:621.371
Dmitrieva I.Yu. Mathematical model of the diagonalization problem's numerical realization in the case of multidimensional circuits // Scient. works of ONAT after A.S. Popov. – 2010. – № 1. – P . Bibl.: 10 items. – rus.

We propose the flow-chart of the standard procedure – subsystem in the case of computer realization for the diagonalization process that is applied to the finite-dimensional system of differential operator equations. The latter is given over the arbitrary numerical space, whose dimension is finite too.

The latest algorithm of the unknown scalar equations' construction represents simultaneously as the corollary, as mathematical analytic and numerical method when the original industrial problem is solved. The last one is the important part of technical electrodynamics and deals directly with study of the multidimensional analogous circuits.

Key words and phrases: flow-chart, diagonalization, differential operators, numerical realization, multidimensional circuit.