УДК 621.372:621.371

Дмитриева И.Ю.
Дмитрієва І.Ю.
Dmitrieva I.Yu.

РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

ON THE SOLUTION OF THE GENERAL WAVE EQUATION

Аннотация. Предложено явное решение обобщенного волнового дифференциального уравнения в случае возбужденной изотропной среды. Ход рассуждений и сам результат получены безотносительно постановки исходной краевой задачи, что является существенным отличием от известных классических подходов. Кроме того, данное уравнение не является частным случаем ни одного из ранее рассмотренных и, насколько известно, не совпадает ни с одним из них.

Анотація. Запропоновано явне розв'язання узагальненого хвильового диференційного рівняння у випадку збудженого ізотропного середовища. Хід міркування та сам результат одержані безвідносно постановки вихідної крайової задачі, що є суттєвою відміною порівняно з відомими класичними підходами. Крім цього, дане рівняння не являється частковим випадком ні одного із раніш розглянутих та, оскільки відомо, не співпадає ні з одним із них.

Summary. The given paper proposes the explicit solution of the general differential wave equation in the case of the disturbed isotropic medium. Solution process and final result are obtained irrespectively of the initial boundary problem statement. The last fact is the considerable distinction in comparison with the well-known classical approaches. Moreover, the present equation is not the particular case of all others that were studied earlier and as far as it is known coincides with not one.

Важной проблемой современной электродинамики и ее приложений является изучение полевых характеристик при экспофункциональных воздействиях. Данное направление, как известно, является наиболее востребованным в теории многомерных электрических цепей. Изучение именно таких задач начато в статье А.М. Иваницкого [1], где, основываясь на вышеуказанной теории, получена разрешимость классической векторной дифференциальной системы Максвелла с минимальным числом уравнений. С математической точки зрения вопрос минимизации числа уравнений такой системы был полностью решен тем же автором в работе [2], а в [3] упомянутые уравнения представлены в случае экспофункциональных воздействий.

Параллельно с этими результатами А.М. Иваницким введены дуальные операции классической теории поля в электродинамике, позволившие при этом получить симметричные представления обобщенных максвелловских уравнений [4]. Далеко идущее как инженерно-прикладное, так и теоретическое обобщение идей и методов того же автора нашло отражение в его учебном пособии [5], посвященном теории многомерных цепей и экспофункциональных воздействий.

Тем не менее, во всех перечисленных основных работах [1…5] не было получено конструктивное решение «минимизированной» векторной системы дифференциальных уравнений Максвелла. Эта проблема решена на начальном этапе в [6] на уровне ее (системы) диагонализации, т.е. получения эквивалентной совокупности скалярных уравнений, каждое из которых зависело только от одной компоненты искомых вектор-функций напряженности электрического и магнитного полей.

Обобщение результатов [6] нашло отражение в статье [7], где предложенный в [6] принцип диагонализации применен к так называемой «симметричной» максвелловской системе, по отношению к которой рассмотренная в [6] была частным случаем.

Итогом проведенных в [7] исследований явилось обобщенное волновое скалярное уравнение, объединившее в себе все искомые компоненты вектор функций напряженностей электромагнитного поля. При этом, хотя конструктивная разрешимость исходной максвелловской системы на уровне ее диагонализации была получена в [7], явный окончательный результат предъявлен не был. Это связано с тем, что вопрос об изучении единого волнового скалярного уравнения на том этапе исследований даже не поднимался.

Поэтому целью настоящей статьи является решение указанного, и, как оказалось, не исследованного ранее другими авторами, обобщенного волнового уравнения. Одновременно это означает и завершение проблемы конструктивной разрешимости минимизированной обобщенной дифференциальной системы Максвелла, названной в [7] «симметричной».

1. Математическая постановка задачи и обоснование плана решения. Основываясь на прежних позициях [6, 7] независимости хода рассуждений от краевой постановки задачи, автор настоящей статьи предлагает явное решение вышеупомянутого единого скалярного обобщенного волнового уравнения применением интегральных преобразований по пространственным переменным. Такой подход, сохраняющий главный аргумент времени t, не зависит ни от исходной пространственной системы координат, ни от начальных и граничных условий и, насколько известно, ранее именно в таком виде не применялся [8…11].

Действительно, в работе [7] как было упомянуто ранее, реализована диагонализация так называемой «симметричной» системы дифференциальных уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} rot\,\vec{H} = (\sigma \pm \lambda\varepsilon_0)\vec{E} + \varepsilon_a \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\,CT} \\ -rot\,\vec{E} = (r \pm \lambda\mu_a)\vec{H} + \mu_a \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{e}^{\,CT}. \end{cases} \tag{1}$$

В (1) искомые вектор функции $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t)$, $\vec{H} = \vec{H}(x,y,z,t)$ со скалярными компонентами $E_k = E_k(x,y,z,t)$, $H_k = H_k(x,y,z,t)$ $(k = \overline{1,3})$ описывали напряженность электрического и магнитного полей соответственно; положительные постоянные σ, μ_a, ε_a обозначали удельную проводимость, абсолютную магнитную и диэлектрическую проницаемость среды, а вектор функции $\vec{j}^{\,CT} = \vec{j}^{\,CT}(x,y,z,t)$, $\vec{e}^{\,CT} = \vec{e}^{\,CT}(x,y,z,t)$ со скалярными компонентами $j_k^{CT} = j_k^{CT}(x,y,z,t)$, $e_k^{CT} = e_k^{CT}(x,y,z,t)$ $(k = \overline{1,3})$ предполагались известными и характеризовали сторонние токи и напряжения. Система названа авторами «симметричной» на основании структуры ее правых частей, где λ означал параметр воздействующего на среду сигнала, а r – некоторая теоретическая константа, существование которой на текущем этапе исследований [7] можно было только предполагать. Насколько известно, диагонализация а, значит, и итоговое конструктивное решение именно такой общей системы (1), рассматривались впервые.

В результате вышеупомянутой диагонализации в [7] получено единое скалярное уравнение относительно всех искомых компонент E_k, H_k $(k = \overline{1,3})$ вектор функций $\vec{E}$, $\vec{H}$ напряженности электрического и магнитного полей соответственно:

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta)F_{ik} = (\partial_k^2 - \tilde{\partial}_0^2)\varphi_{ik} + \partial_k(\partial_\nu\varphi_{i\nu} + \partial_l\varphi_{il}),\ \nu \neq l, k \neq \nu, k \neq l \quad (k,\nu,l = \overline{1,3};\ i = 1,2). \tag{2}$$

В уравнении (2):

$$\begin{gathered} F_{1k} = E_k, \quad F_{2k} = H_k \quad (k = \overline{1,3}); \\ \vec{\varphi}_1 = \mathrm{rot}\,\vec{e}^{\,CT} + (r + \mu_a\partial_0^*)\vec{j}^{\,CT}, \\ \vec{\varphi}_2 = (\sigma + \varepsilon_a\partial_0^*)\vec{e}^{\,CT} - \mathrm{rot}\,\vec{j}^{\,CT}, \end{gathered} \tag{3}$$

а скалярные функции φ_{ik}, φ_{il}, $\varphi_{i\nu}$, $(i = 1,2)$ – это соответствующие компоненты φ_k, φ_l, φ_ν $(k,l,\nu = \overline{1,3})$ вектор функций $\vec{\varphi}_1$ и $\vec{\varphi}_2$ из (3).

Кроме того, в (2) для удобства введены специальные обозначения для операторов дифференцирования в частных производных:

$$\begin{gathered} \partial_0^* = \partial_0 \pm \lambda, \quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}; \quad \Delta = \sum_{k=1}^{3}\partial_k^2, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}; \\ \tilde{\partial}_0^2 = \mu_a\varepsilon_a\partial_0^{*2} + (\sigma\mu_a + r\varepsilon_a)\partial_0^* + r\sigma. \end{gathered} \tag{4}$$

Далее будет показано, каким образом (2) можно свести к эквивалентному уравнению гиперболического типа. Казалось бы, на этом моменте можно остановиться, поскольку результаты по решению таких уравнений хорошо известны [9…11] и опираются на фундаментальные классические формулы Кирхгофа [12] и Пуассона [13].

В действительности, во всех вышеупомянутых работах [9…11] решение гиперболического уравнения строилось с точки зрения либо задачи Коши, либо смешанной краевой задачи. Кроме того, в [10] поиск искомого решения базируется на функции Римана, что для неспециалиста представляет препятствие не столько теоретического, сколько прикладного характера. В фундаментальной монографии [9] формула Кирхгофа [12] выражает неизвестную волновую функцию через запаздывающий объемный потенциал, но этот последний результат получен для более частного случая в сравнении с изучаемым уравнением (2).

По мнению автора, возможно, и субъективному, наибольший интерес для инженерных приложений имеет работа [11], исследования которой опять-таки полностью привязаны к конкретной постановке краевой задачи, в данном случае – смешанной. Тем не менее, предложенные аппроксимационные подходы при соответствующих граничных и начальных условиях обеспечивают наиболее быструю сходимость процесса к искомому решению. Все реализованные в [11] методы относятся к хорошо известным классическим, как-то: метод Фурье (разделения переменных), метод конечных разностей, преобразование Лапласа по временнóй переменной t и аналитическая аппроксимация (Шаудера).

Однако, насколько известно, несмотря на обширный спектр блестящих результатов [9…11], настоящее уравнение (2) даже после сведéния его к гиперболическому, не является частным случаем ни одного из решенных в явном виде уравнений такого типа. Т.е., оно, хоть и является волновым по своей природе, но стоит как бы «особняком» по отношению ко всем известным рассмотренным [8…11]. Кроме того, в предлагаемой статье конструктивное решение (2) будет получено безотносительно граничных и начальных условий. Иными словами, в отличие от вышеупомянутых работ, конкретизация краевой задачи для получения общего решения (2) не требуется.

Очевидно, что математически изучаемое уравнение (2) можно записать в общем виде

$$\widetilde{\partial}_0^2(\widetilde{\partial}_0^2 - \Delta)F = f\,. \tag{5}$$

Здесь $F = F(x,y,z,t)$, $f = f(x,y,z,t)$ – искомая и известная скалярные функции соответственно, принадлежащие одному и тому же классу непрерывно дифференцируемых необходимое число раз, а $\widetilde{\partial}_0^2$ и Δ – операторный многочлен и оператор Лапласа из формул (4).

Введением в (5) новой неизвестной функции

$$\widetilde{\partial}_0^2 F = \Phi \tag{6}$$

исходное уравнение сводится к эквивалентному, более простому по структуре, но уже в терминах (6):

$$(\widetilde{\partial}_0^2 - \Delta)\Phi = f\,. \tag{7}$$

Очевидно, что в классической максвелловской теории поля основной переменной является аргумент времени t, поскольку все остальные пространственные переменные по своей как физической, так и математической природе, вне конкретизации поставленной краевой задачи, являются равноправными в выбранной координатной системе. В связи с вышесказанным, предлагаемый метод решения не зависит от того, в какой пространственной системе координат (прямоугольной, цилиндрической и т.д.) рассматривается то или иное дифференциальное уравнение в частных производных и, в частности, (7).

Применением соответствующих интегральных преобразований либо по каждой из пространственных переменных (для (7) – (x, y, z)), либо воздействием единого многомерного для всех одновременно [14], что зависит от характера рассматриваемой пространственной области, уравнение в частных производных, а значит, и (7), может быть сведено к обыкновенному дифференциальному по аргументу времени t, но уже в терминах трансформант исходных функций. При этом для каждой конкретной краевой задачи интегральные преобразования по всем пространственным координатам выбираются, исходя как из физической, так и математической постановки проблемы. Последний момент является абсолютно естественным и незатруднительным прикладным классическим подходом [15], доступным даже для нематематиков. При правильном вышеуказанном выборе, что диктуется характером рассматриваемой пространственной области, нарушения физической постановки задачи не происходит.

После эффективного решения упомянутого обыкновенного дифференциального уравнения по t, как правило, упрощенного, применяя соответствующие обратные интегральные преобразования к полученной трансформанте искомой функции, приходим к ее изначальному требуемому оригиналу, что и завершает процесс решения.

Таким образом, изучаемое уравнение (7) может быть преобразовано к своему аналогу в терминах трансформант $\Phi_{\text{тр}}(t, p) = \Phi_{\text{тр}}$, $f_{\text{тр}}(t, p) = f_{\text{тр}}$ искомой и заданной исходных функций Φ, f, где p – множество параметров примененных интегральных преобразований по (x, y, z). Решению такого, уже обыкновенного дифференциального уравнения, и посвящен следующий параграф.

2. Решение (7) в трансформантах. Итак, в терминах трансформант уравнение (7) выглядит следующим образом

$$(\widetilde{\mu}_a\widetilde{\varepsilon}_a(\frac{d}{dt} \pm \widetilde{\lambda})^2 + (\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu}_a + \widetilde{r}\widetilde{\varepsilon}_a)(\frac{d}{dt} \pm \widetilde{\lambda}) + \widetilde{r}\widetilde{\sigma} - \Delta_{\text{тр}})\Phi_{\text{тр}} = f_{\text{тр}}\,, \tag{8}$$

где нижние индексы «mp» и верхние «тильды» обозначают трансформанты соответствующих объектов, а «квадрат» дифференциального оператора как ранее, так и всюду в дальнейшем означает его (оператора) последовательно-повторное применение. В развернутом, более удобном для дальнейшего решения виде, (8) может быть записано так:

$$(\tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \frac{d^2}{dt^2} + (\tilde{\sigma}\tilde{\mu}_a + \tilde{r}\tilde{\varepsilon}_a \pm 2\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a)\frac{d}{dt} + \tilde{\lambda}^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a \pm \tilde{\lambda}(\tilde{\sigma}\tilde{\mu}_a + \tilde{r}\tilde{\varepsilon}_a) + \tilde{r}\tilde{\sigma} - \Delta_{\text{тр}})\Phi_{\text{тр}} = f_{\text{тр}} \qquad (9)$$

и является неоднородным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка по переменной t, которое решается хорошо известным методом вариации произвольных постоянных [16].

Действительно, соответствующее характеристическое уравнение для (9) порождено операторным полиномом из его левой части:

$$\tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \omega^2 + (\tilde{\sigma}\tilde{\mu}_a + \tilde{r}\tilde{\varepsilon}_a \pm 2\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a)\omega + (\tilde{\lambda}^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a \pm \tilde{\lambda}(\tilde{\sigma}\tilde{\mu}_a + \tilde{r}\tilde{\varepsilon}_a) + \tilde{r}\tilde{\sigma} - \Delta_{\text{тр}}) = 0 \qquad (10)$$

и имеет два различных корня, вообще говоря, комплексных

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a}(-((\tilde{\sigma}\tilde{\mu}_a + \tilde{r}\tilde{\varepsilon}_a) \pm 2\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a) \pm \sqrt{(\tilde{\sigma}\tilde{\mu}_a - \tilde{r}\tilde{\varepsilon}_a)^2 + 4\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\Delta_{\text{тр}}}). \qquad (11)$$

Таким образом, искомая фундаментальная система решений для однородного уравнения относительно (9) такова

$$\{\chi_m = \chi_m(t,p) = e^{\gamma_m t}(\cos\kappa_m t + i\sin\kappa_m t),\ m = 1,2\},\ \ \gamma_m = \operatorname{Re}\omega_m,\ \ \kappa_m = \operatorname{Im}\omega_m\ (m = 1,2). \qquad (12)$$

Само́ же общее решение неоднородного уравнения (8) ищется в виде

$$\Phi_{\text{тр}} = \sum_{m=1}^{2} C_m \chi_m, \qquad (13)$$

где неизвестные функции $C_m = C_m(t,p)$ $(m = 1,2)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'\chi_1 + C_2'\chi_2 = 0 \\ C_1'\chi_1' + C_2'\chi_2' = f_{тр} \end{cases} \qquad (14)$$

и $C_m' = \frac{d}{dt}C_m$, $\chi_m' = \frac{d}{dt}\chi_m$ $(m = 1,2)$, поскольку p – ранее введенное множество параметров интегральных преобразований.

Система (14) естественным образом упрощается, если воспользоваться легко проверяемой формулой

$$\chi_m' = (\gamma_m + i\kappa_m)\chi_m \quad (m = 1,2), \qquad (15)$$

благодаря которой можно ввести новые неизвестные функции

$$\psi_m = C_m'\chi_m \quad (m = 1,2) \qquad (16)$$

и переписать (14) в эквивалентной форме

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 = 0 \\ (\gamma_1 + i\kappa_1)\psi_1 + (\gamma_2 + i\kappa_2)\psi_2 = f_{тр}. \end{cases} \qquad (17)$$

Очевидно, что решение (17) таково

$$\psi_{1,2} = \pm\frac{f_{тр}}{(\gamma_1 - \gamma_2) + i(\kappa_1 - \kappa_2)}, \qquad (18)$$

откуда неизвестные функции C_m $(m = 1,2)$ определяются с учетом выражения (16)

$$C_m = \int \frac{\psi_m}{\chi_m}dt \quad (m = 1,2). \qquad (19)$$

Подставив в (19) формулы (18), (12), получим

$$C_{1,2} = \pm\frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2) + i(\kappa_1 - \kappa_2)}\int \frac{f_{тр}}{e^{\gamma_{1,2}t}(\cos\kappa_{1,2}t + i\sin\kappa_{1,2}t)}dt. \qquad (20)$$

Возвращаясь далее к прежнему обозначению (11) для $\omega_{1,2}$, записываем искомое решение (9) согласно формул (13), (20)

$$\Phi_{тр} = \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2) + i(\kappa_1 - \kappa_2)}(e^{\omega_1 t}\int e^{-\omega_1 t} f_{тр}dt - e^{\omega_2 t}\int e^{-\omega_2 t} f_{тр}dt). \qquad (21)$$

Таким образом, задача, поставленная в данном разделе, выполнена.

Для достижения цели настоящей работы осталось решить уравнение (6), что и будет проделано ниже.

3. Решение (6) на уровне трансформант. Очевидно, что (6) является частным случаем (7), когда в левой части отсутствует оператор Лапласа, т.е. последнее слагаемое под знаком радикала в (11) – тождественный ноль, что приводит к следующим локальным значениям для $\omega_{1,2}$:

$$\omega_{1,2}^{*} = -(\frac{\widetilde{r}}{\widetilde{\mu}_a} \pm \widetilde{\lambda}). \qquad (22)$$

Таким образом, структура искомой функции из (6) в терминах трансформант аналогична соответствующим выражениям (13), (12), (20), (21) из предыдущего п. 2. Различие лишь в том, что вместо известной функции $f_{\text{тр}}$ участвует уже найденная ранее функция $\Phi_{\text{тр}}$ из (21), а ω_m, γ_m, κ_m $(m = 1{,}2)$ заменяются на ω_m^* $(m = 1{,}2)$ из (22) и $\gamma_m^* = \mathrm{Re}\,\omega_m^*$, $\kappa_m^* = \mathrm{Im}\,\omega_m^*$ $(m = 1{,}2)$ соответственно.

В итоге искомая трансформанта исходной функции F найдена явно и имеет вид следующей суперпозиции

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{(\gamma_1^* - \gamma_2^*) + i(\kappa_1^* - \kappa_2^*)} (e^{\omega_1^* t} \int e^{-\omega_1^* t} \Phi_{\text{тр}} dt - e^{\omega_2^* t} \int e^{-\omega_2^* t} \Phi_{\text{тр}} dt), \qquad (23)$$

где $\Phi_{\text{тр}}$ задается формулой (21).

Непосредственной проверкой несложно убедиться, что функции (23) и (21) действительно являются общими решениями уравнений в трансформантах, порожденными (6) и (7) соответственно.

Применяя далее требуемые обратные интегральные преобразования относительно исходных к функции (23), получаем изначально искомое решение первоначального уравнения (5). Таким образом, поставленная задача полностью решена и цель данной работы достигнута.

В заключение следует еще раз обратить внимание на то, что весь ход предложенного решения, как и окончательный результат, действительно не зависят от конкретной постановки краевой задачи, т.е. данный алгоритм инвариантен относительно как начальных так и граничных условий, а соответствующее единое скалярное обобщенное волновое уравнение (2) решено в явном виде, что и требовалось получить в данной работе.

Литература

1. *Иваницкий А.М.* Свойства дифференциальных операторов многомерных электрических цепей / А.М. Иваницкий // Информатика и связь: сб. научных трудов УГАС им. А.С. Попова. – Одесса, 1998. – С. 37-41.
2. *Иваницкий А.М.* Зависимость третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух уравнений при произвольном возбуждении электромагнитного поля / А.М. Иваницкий // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – №2. – С.3-7.
3. *Иваницкий А.М.* Электрический заряд и магнитный поток экспофункционального поля / А.М. Иваницкий // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – №1. – С.3-8.
4. *Иваницкий А.М.* Принцип дуальности в электродинамике / А.М. Иваницкий // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2000. – №3. – С.29-35.
5. *Иваницкий А.М.* Основы теории многомерных аналоговых и дискретных цепей / Иваницкий А.М. – Одесса: ОНАС, 2003. – 38с.
6. *Иваницкий А.М.* Сведение классической системы уравнений Максвелла к скалярным уравнениям относительно компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева, М.В. Рожновский // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2006. – №1. – С.37-47.
7. *Иваницкий А.М.* Диагонализация «симметричной» системы дифференциальных уравнений Максвелла / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2007. – №1. – С.15-24.
8. *Вольман В.И.* Техническая электродинамика / В.И. Вольман, Ю.В. Пименов. – М.: Связь, 1971. – 487с.
9. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
10. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики / Бицадзе А.В. – М.: Наука, 1976. – 320с.
11. *Ладыженская О.А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения / Ладыженская О.А. – М.: Гос. изд. техн.-теор. литер., 1953. – 279 с.
12. *Математическая энциклопедия;* под ред. И.М. Виноградова. – Т.2 – М.: Советская энциклопедия, 1979. – С.860-862.
13. *Математическая энциклопедия;* под ред. И.М. Виноградова. – Т.4 – М.: Советская энциклопедия, 1984. – С.754-756.
14. *Математическая энциклопедия;* под ред. И.М. Виноградова. – Т.2 – М.: Советская энциклопедия, 1979. – С.589-590.
15. *Трантер К.Дж.* Интегральные преобразования в математической физике / Трантер К.Дж. – М.: ИЛ, 1956. – 403 с.
16. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Камке Э. – М.: Наука, 1976. – 576 с.