УДК 621.396.67

Проценко М.Б., Мамедов Н.И.
Проценко М.Б., Мамедов Н.І.
Protsenko M.B., Mamedov N.I.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВОЗБУЖДЕНИЯ ТОНКОПРОВОЛОЧНЫХ АНТЕНН

АНАЛІЗ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЗАДАЧАХ ЗБУДЖЕННЯ ТОНКОДРОТОВИХ АНТЕН

ANALYSIS OF INTEGRAL EQUATIONS DECISION METHODS IN THE PROBLEMS OF THIN-WIRE ANTENNAS EXCITATION

Аннотация. В статье представлены результаты анализа методов решения интегральных уравнений применительно для вычисления амплитудно-фазового распределения тока вдоль криволинейных излучающих структур. Показано, что классическая формулировка метода наводимых ЭДС (обобщенного метода наводимых ЭДС), основанная на теореме Пойнтинга, теореме взаимности, эквивалентна методу моментов, реализованного с применением метода Галеркина при кусочно-синусоидальных базисных функциях.

Анотація. У статті надані результати аналізу методів розв'язання інтегральних рівнянь стосовно до завдань розрахунку амплітудно-фазового розподілу струму уздовж криволінійних випромінюючих структур. Показано, що класичне формулювання методу наведених ЕРС (узагальненого методу наведених ЕРС), що засноване на теоремі Пойнтінга, теоремі взаємності, еквівалентне методу моментів, який реалізовано із застосуванням методу Галеркіну при кусочно-синусоїдальних базисних функціях.

Summary. The results of analysis of integral equalizations decision methods for the calculation tasks of the current amplitude-phase distributing along curvilinear radiative structuresare presented in the article. It is rotined that classic formulation of induced EMF method (generalized induced EMF method) based on the Poynting theorem, theorem of reciprocity, equivalent the method of moments realized with the use of Galerkin method at piece-sinewave base functions.

Антенны и антенные системы являются неотъемлемой и, в значительной мере, определяющей частью любых радиотехнических систем, использующих фундаментальное свойство электромагнитных волн — перенос энергии и информации в физическом пространстве. Современные тенденции, связанные с увеличением роли и существенным расширением круга задач, решаемых радиосистемами различного назначения, с их функциональным и конструктивным усложнением, увеличение значимости современных информационных технологий при их проектировании, неизбежно приводят к проблеме интенсивного развития теории и практики построения разнообразных антенн.

Одними из основополагающих в антенной технике являются «тонкопроволочные» излучающие структуры и составленные из них антенные решетки. Это связано с широким их распространением во всем освоенном диапазоне радиочастот и имеющимися возможностями их моделирования, в том числе с учетом геометрической формы и электрических свойств объекта-носителя, что особенно важно для радиосистем подвижных объектов. Вместе с тем необходимость в более полном использовании потенциальных свойств антенн, новый этап в развитии вычислительной электродинамики, обусловленный развитием вычислительной техники и информационных технологий, постоянно порождают новые задачи.

В научной литературе описано достаточно большое количество методов решения задач возбуждения проволочных антенн. При этом под решением задачи возбуждения понимается определение функции амплитудно-фазового распределения тока вдоль излучающих проводников.

Из всевозможных методов решения интегральных уравнений выделим лишь наиболее используемые в задачах возбуждения антенн, применительно к криволинейным проволочным излучателям. Это метод моментов, вариационные методы, итерационные методы. Традиционным методом решения интегральных уравнений является метод моментов (см., например, [1]). В настоящее время известны и достаточно хорошо разработаны, особенно с точки зрения общих положений, два подхода к решению интегрального уравнения на основе метода моментов. Первый подход заключается в сведении интегрального уравнения с известной правой частью, зависящей от функции амплитудно-фазового распределения возбуждающих воздействий, к системе линейных алгебраических уравнений. Вид этой функции выбирается в зависимости от физической и математической моделей элементов возбуждения системы излучающих проводников. Это направление развивается рядом зарубежных и отечественных авторов [2 … 5]. Второй подход предполагает сведение интегрального уравнения к характеристическому, на основании которого определяются так называемые собственные (характеристические) функции распределения токов в системе проводников, зависящие лишь от их геометрической конфигурации и не зависящие от возбуждающих воздействий. Решение этого уравнения позволяет далее для любого распределения возбуждающих воздействий найти функцию амплитудно-фазового распределения тока как разложения его в ряд. Данный подход эквивалентен аналитическому методу разделения переменных [6] для идеально проводящих излучателей, граница которых совпадает с одной из координатных поверхностей (например, для сферы). Этот путь решения задачи развивается в работах [1, 7, 8]. Оба подхода к решению задач возбуждения проволочных антенн, в некоторой степени, однотипны. Однако при всей своей привлекательности, учитывая, что составляющие собственного тока ортогональны (мощность, излучаемая одной из составляющих, не зависит от наличия других составляющих собственного тока [8]), разложение в ряд по составляющим собственного тока нашло меньшее распространение, в связи со сложностью и их громоздкостью при организации вычислительного процесса. Кроме того, одной из задач современной теории и техники антенн является пересмотр существующих методов решения интегральных уравнений в задачах анализа и синтеза проволочных антенн и создание соответствующих математических моделей, что и явилось целью данной статьи.

Алгоритм решения задачи рассмотрим на основе первого подхода. В соответствии с [9] интегральное уравнение будет иметь вид

$$\int\limits_s \dot{I}(s')\left[k^2\dot{G}(R)\left(\vec{s}_0\vec{s}_0^{\,'}\right)-\frac{\partial^2\dot{G}(R)}{\partial s\,\partial s'}\right]\mathrm{d}s'=-\mathrm{j}\frac{4\pi k}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}\dot{E}_{\text{ст}}, \tag{1}$$

где $\dot{I}(s')$ – искомая функция распределения комплексного значения тока вдоль излучающего проводника s'; $k=2\pi/\lambda$ – волновое число свободного пространства; λ – длина волны электромагнитного колебания; $\dot{G}(R)=\exp(-\mathrm{j}kR)/R$ – функция Грина свободного пространства; R – расстояние между точками наблюдения и интегрирования s, s'; $\vec{s}_0$, $\vec{s}_0^{\,'}$ – единичные орты в направлении оси проводника в точках наблюдения и интегрирования s, s' соответственно; $\dot{E}_{\text{ст}}$ – тангенциальная составляющая электрического поля, возбуждаемого источником, расположенным либо на поверхности излучающего проводника, либо вблизи его; ε, μ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

В операторной форме (1) может быть представлено в виде

$$L_{\text{оп}}\left(I(s)\right)=E_{\text{ст}} \quad \text{или} \quad I(s)=L_{\text{оп}}^{-1}\left(E_{\text{ст}}\right), \tag{2}$$

$L_{\text{оп}}^{-1}$ – интегральный оператор, обратный оператору $L_{\text{оп}}$, определенному на множестве точек, принадлежащих поверхности излучающего проводника.

Решение интегрального уравнения методом моментов может быть получено при выполнении следующих операций:

1) Разложение искомой функции $I(s)$ в ряд по базисным функциям I_n в области определения оператора $L_{\text{оп}}$.

2) Установка системы весовых функций и сведение интегрального оператора к матричному уравнению.

3) Решение матричного уравнения.

В связи с тем, что излучающие проводники (система излучающих проводников) могут быть представлены как совокупность излучающих сегментов, некоторым образом расположенных в пространстве, в качестве базисных удобнее всего применять функции подобластей Δs.

Наиболее простым базисом подобласти является базис вида [1]

$$I_n(s')=\begin{cases} I_n, & s'\in\Delta s;\\ 0, & s'\notin\Delta s.\end{cases} \tag{3}$$

При всей своей простоте и универсальности данный кусочно-постоянный базис (3) не позволяет решать интегральное уравнение для излучающих проводников произвольных размеров. Совместно с данным базисом часто используют в качестве весовых функций – δ -функции. Использование системы δ -функций позволяет требовать выполнение граничных условий только в определенной совокупности точек, некоторым образом расположенных на поверхности излучающего проводника, что, с одной стороны, «ослабляет» граничные условия, а с другой – значительно уменьшает вычислительные затраты.

В работе [10], посвященной обзору базисных и весовых функций, показано, что наиболее эффективным является выбор базисных и весовых функции одного вида, так называемый метод Галеркина. При этом в [11] поясняется, что использование кусочно-синусоидального базиса позволяет достичь наибольшего сокращения временных затрат. Такая система базисных функций имеет вид (базис Ричмонда)

$$I_n(s') = \begin{cases} \dfrac{I_i \sin k(s_{i+1} - s') + I_{i+1} \sin k(s' - s_i)}{\sin k(s_{i+1} - s_i)}, & s' \in \Delta s; \\ 0, & s' \notin \Delta s. \end{cases} \tag{4}$$

Приведенные примеры базисных и весовых функций являются наиболее используемыми, но не единственно возможными. Одно из направлений совершенствования методов вычислительной электродинамики применительно к решению интегральных уравнений как раз и заключается в исследовании разнообразных вариантов и сочетаний базисных и весовых функций.

При разложении в ряд искомой функции амплитудно-фазового распределения тока по системе базисных функций, интегральное уравнение с использованием системы весовых функций сводится к матричному

$$[I_n][Z_{nm}] = [U_m], \tag{5}$$

где $[Z_{nm}]$ – матрица собственных и взаимных сопротивлений; $[I_n],[U_m]$ – соответственно векторы-столбцы токов и потенциалов; $n, m \in \{1,2,3,..., N\}$; N – количество излучающих проводников или сегментов одного излучающего проводника.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (5) производится численно с использованием либо стандартных программ обращения матриц полных сопротивлений, либо специализированных программ, учитывающих особые свойства этой матрицы.

Вышеприведенная методика решения интегрального уравнения относительно комплексной функции распределения тока дает хорошие результаты, так как учитывает реальную геометрию этой излучающей структуры, толщину проводников и взаимодействие между их отдельными элементами. Следует отметить, что точность расчетов зависит от многих факторов, и, в первую очередь, от длины и толщины сегментов разбиения, модели поля сторонних источников и др., и в разных случаях может быть различной. Отклонение от выработанных рекомендаций и даже малые изменения в выбранных моделях обычно приводят к получению ошибочных результатов. Погрешности такого решения обусловлены, в основном, следующими факторами:

1) точность описания поля источника возбуждения;

2) «тонкопроволочное» приближение, т.е. предположением о том, что в проводниках излучающей структуры существует только продольная составляющая тока и пренебрежением поперечной составляющей, в том числе и на торцах проводников;

3) аппроксимация искомой функции распределения тока заданными произвольным образом базисными функциями и сведения интегрального уравнения к системе линейно-независимых алгебраических уравнений;

4) пренебрежение обратным влиянием токов в излучающих проводниках на распределение поля стороннего источника;

5) ошибки при решении системы линейных алгебраических уравнений;

6) неточность решения интегралов численными методами при нахождении матричных коэффициентов (особенно собственных сопротивлений сегментов);

7) ошибки округления, связанные с представлением чисел в ЭВМ.

В представленной постановке, использование интегральных уравнений неизбежно приводит к необходимости получения ответов на следующие вопросы.

1) Имеет ли интегральное уравнение единственное решение?

2) Является ли полученное решение устойчивым и сходящимся?

3) Какова точность полученного решения?

К сожалению, в современной научной литературе нет обобщающих данных относительно поставленных вопросов по используемым интегральным уравнениям, за исключением оценки скорости вычислительного процесса [12]. Так как в качестве основного наиболее часто применяется уравнение (1) – уравнение Поклингтона, то рассмотрим поставленные вопросы по отношению к нему.

Основной проблемой при решении интегральных уравнений методом моментов является плохая обуславливаемость матрицы полных сопротивлений при увеличении ее порядка, в результате чего погрешности определения элементов этой матрицы могут возрастать. Таким образом, сходимость численного решения электродинамической задачи за счет возрастающих ошибок может отсутствовать, т.е. вычислительный алгоритм может оказаться неустойчивым.

Исследованию данного вопроса посвящено достаточное количество научных трудов, чтобы сделать определенные выводы. Главным из которых, как отмечено в работе [13], является то, что (2) есть нормально неразрешимое операторное уравнение. Иными словами, если функция, описывающая возбуждающие источники (правая часть интегрального (1)) имеет небольшие возмущения, то возникают значительные отклонения найденного решения для неизвестной функции тока от точного, т.е. решение (1) нестабильно, что и является причиной плохой обуславливаемости дискретной матрицы полных сопротивлений.

Существующие на сегодняшний день математические и физические модели возбуждающих источников не позволяют учесть существующих особенностей конструкции реальных устройств возбуждения. Это существенно затрудняет получение достоверных результатов. В качестве модели источника возбуждения обычно задают стороннюю ЭДС, включенную в разрыв излучающего проводника между произвольными точками; плоскую электромагнитную волну произвольной поляризации, падающую на излучающую структуру с произвольного направления [1]. Могут быть также рассмотрены и другие модели источников возбуждения, более или менее приближающиеся по своим свойствам к реальным. Однако следует еще раз отметить, что одним из наиболее «узких» мест в методе моментов при решении интегральных уравнений как раз и является модель возбуждающего источника проволочной излучающей системы.

Другой взгляд [14] на причину плохой обуславливаемости матрицы полных сопротивлений числа основан на том, что при увеличении сегментов разбиения величина осевого тока (точнее его мнимой части) существенно изменяется. Расходимость решения не устраняется путем выбора какой-либо другой системы базисных функций или изменением размера возбуждающего зазора, а связана с моделью тонкого проводника, согласно которой величина осевого тока отождествляется с истинным током на излучающем проводнике. Решить указанную задачу предлагается путем расчета азимутального магнитного поля, формируемого осевым током, и на основании величины этого поля определить значения поверхностного электрического тока, так как данные значения сходятся при увеличении сегментов разбиения, что согласуется с физическим смыслом этих величин. Причем для гарантии устойчивости процесса сходимости также предлагается контролировать ошибку вычисления матричных коэффициентов таким образом, чтобы при ухудшении обуславливаемости пропорционально увеличивалась бы точность вычисления, путем увеличения, в первую очередь, длины машинного слова.

Для оценки точности получаемого решения интегрального уравнения первоначально необходимо отметить, что метод моментов с применением базиса вида (4), учитывая метод Галеркина, в математической форме записи полностью совпадает с классической формулировкой метода наводимых ЭДС для односегментного представления излучающего проводника и обобщенного метода наводимых ЭДС для сложной пространственной излучающей структуры [15] .

Рассматривая процедуру численного решения интегрального уравнения методом моментов, но уже с позиций метода наводимых ЭДС, можно выстроить следующую схему. На первом этапе вдоль излучающей поверхности проводника произвольным образом задается амплитудно-фазовое распределение тока (к примеру, для системы базисных функций вида (3) — это будет равноамплитудное синфазное распределение тока). На втором этапе ищется результат электродинамического взаимодействия излучающих элементов, возбужденных заданным током. И на последнем этапе, в соответствии с выбранным расположением источников возбуждения, уточняется первоначально заданное распределение тока.

При этом если первоначальная функция амплитудно-фазового распределения тока далека от точного решения, то результат может оказаться очень «грубым». Приближенное вычисление функции тока и последующее нахождение по этому току входного сопротивления проволочной антенны приводит к малой точности.

Гораздо лучший результат дает следующий подход [16]. Строится вариационно-устойчивый функционал от тока, удовлетворяющий двум требованиям: он должен достигать стационарного значения на функции, являющейся решением исходного уравнения задачи; стационарное значение функционала должно совпадать с искомым параметром. Подставляя в такой функционал приближенное значение тока, можно найти соответствующий параметр со значительно большей точностью. Таким параметром может выступать также входное сопротивление (сопротивление излучения) антенны. Так, подставляя значение тока в первом приближении, находим входное сопротивление с точностью до второго приближения. В этом и состоит суть вариационных методов решения интегральных уравнений, в том числе в теории проволочных антенн.

Для получения вариационно-устойчивого функционала используют известные фундаментальные положения, основанные на теореме Пойнтинга и теореме взаимности.

Рассмотрим одно из таких положений – теорему Пойнтинга, которая в своем классическом представлении применительно к излучающим системам описывает закон сохранения энергии. Будем считать, что излучающий проводник занимает в однородной изотропной среде с нулевой проводимостью ($g=0$) некоторый объем v_0. В данном объеме по известному закону распределена объемная плотность электрического тока $\vec{J}$, возбуждаемая сторонним источником поля с заданной напряженностью $\vec{E}_{\text{ст}}$. Введем область v, ограниченную поверхностью Ω, которая охватывает излучающий объем v_0, где электрические токи отличны от нуля ($g \neq 0$). Без потери общности рассмотрения, радиус ограничивающей поверхности Ω можем устремить к бесконечности, что позволяет рассматривать дальнюю зону антенны, где мнимая часть вектора Пойнтинга равна нулю. Учтем также «тонкопроволочное приближение», согласно которого размеры поперечного сечения проводника много меньше его длины s и длины волны. Тогда от объемного распределения электрических токов можно перейти к линейному распределению $I(s)$ вдоль длины проводника, и теорема Пойнтинга в интегральной форме может быть представлена следующим выражением:

$$-\int_s \vec{E}_{\text{ст}} I^* \,\mathrm{d}\vec{s} = 2\,\mathrm{j}\omega \int_v \left[\frac{\mu \vec{H}\vec{H}^*}{2} - \frac{\varepsilon \vec{E}\vec{E}^*}{2} \right] \mathrm{d}v + \int_{v_0} \frac{\vec{J}\vec{J}^*}{g}\,\mathrm{d}v + \int_\Omega \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right]_n \mathrm{d}\Omega . \tag{6}$$

Индекс n у квадратной скобки означает проекцию вектора на нормаль к поверхности Ω, а символ * – комплексно-сопряженную величину.

Представленное выражение (6), точнее каждое из его слагаемых, имеют вполне определенный физический смысл. Так, последние два слагаемых, в конечном счете, определяют для излучателя потери, соответственно характеризуемые средней мощностью тепловых (омических) потерь в объеме v_0, занимаемом излучателем, и средней мощностью, излучаемой через поверхность Ω. Эти слагаемые в соответствии с законом сохранения энергии должны быть скомпенсированы источником стороннего поля. Следовательно, действительная составляющая $-\mathrm{Re}\int_s I^* \vec{E}_{\text{ст}}\,\mathrm{d}\vec{s}$ левой части (6) определяет среднюю (активную) мощность, отдаваемую источником поля в объеме v_0, мнимая составляющая $-\mathrm{Im}\int_s I^* \vec{E}_{\text{ст}}\,\mathrm{d}\vec{s}$ левой части (6) является реактивной мощностью и определяет запасенную электромагнитную энергию в ближней и промежуточной зонах антенны.

Рассматривая антенну с другой позиции, а именно с точки зрения теории электрических цепей, необходимо отметить, что излучатель представляет собой по отношению к линии передачи определенную нагрузку и, следовательно, может быть заменен некоторым эквивалентным двухполюсником с соответствующим входным сопротивлением $Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + \mathrm{j}X_{\text{вх}}$.

Тогда, переходя от мощностей (6), к соответствующим составляющим входного сопротивления, получаем

$$R_{\text{вх}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{I_0 I_0^*}\operatorname{Re}\displaystyle\int_s I^* \vec{E}_{\text{ст}}\,\mathrm{d}\vec{s}; \\ \dfrac{1}{I_0 I_0^*}\displaystyle\int_\Omega \left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]_n \mathrm{d}\Omega; \end{cases} \qquad X_{\text{вх}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{I_0 I_0^*}\operatorname{Im}\displaystyle\int_s I^* \vec{E}_{\text{ст}}\,\mathrm{d}\vec{s}; \\ \dfrac{2\omega}{I_0 I_0^*}\displaystyle\int_v \left[\dfrac{\mu\vec{H}\vec{H}^*}{2} - \dfrac{\varepsilon\vec{E}\vec{E}^*}{2}\right]\mathrm{d}v. \end{cases} \tag{7}$$

Расчет по верхним выражениям (7), производимый по электромагнитному полю непосредственно у поверхности проволочной антенны принято называть расчетом по методу наведенных ЭДС (согласуется с выражениями, полученными на основе теоремы взаимности). Расчет по нижним выражениям (7), определяющим поток активной мощности через Ω и разность запасенных в объеме v средних энергий магнитного и электрического полей, называют расчетом по методу комплексного вектора Пойнтинга.

Таким образом, можно сформулировать следующее заключение: при отсутствии омических потерь в антенне входное сопротивление излучающей структуры и энергетические характеристики антенны (коэффициент направленного действия, коэффициент усиления), определяемые направленными свойствами излучателя, в определенном смысле являются взаимно зависимыми величинами.

Результаты оценки вариационной устойчивости представленных выше выражений для определения входного сопротивления антенны методом наводимых ЭДС представлены в [17]. На основании этих результатов можно утверждать, что отклонение заданной функции тока от истинного значения на величину первого порядка малости, приводит к величине второго порядка малости в определении входного сопротивления (сопротивления излучения) антенны. В [17] также показано, что при точном задании функции распределения тока первая вариация входного сопротивления обращается в нуль, что свидетельствует о стационарности указанного параметра.

Таким образом, использование вариационно-устойчивого функционала, основанного на методе наводимых ЭДС, позволяет получать результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом даже при невысокой точности задания (вычисления) функции амплитудно-фазового распределения тока.

Иной подход к решению интегральных уравнений теории проволочных антенн состоит в использовании итерационной процедуры. Пример решения интегрального уравнения для прямолинейного излучающего проводника итерационным методом относительно функции тока достаточно подробно представлен в работах [15]. Суть данного метода сводится к следующему. Интегральное уравнение путем дополнительных преобразований приводится к функциональному виду, который определяется непосредственно искомым распределением тока. Причем коэффициенты, входящее в полученное выражение, также являются функционалами от искомого распределения тока. Далее, вводя известное асимптотическое значение тока (нулевое приближение), находят искомый ток с большей точностью, который, в свою очередь, является следующим шагом приближения. Однако для получения высших порядков приближения даже для простых конфигураций излучающего проводника необходимо использовать довольно сложные и громоздкие математические выражения, вследствие чего данный метод решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений получил ограниченное распространение.

Необходимо отметить, что итерационную процедуру достаточно успешно можно использовать в сочетании с другими методами решения интегральных уравнений, в частности, с вариационным методом. При этом вместо последовательного приближения к искомому значению тока, сформулированная представленным образом итерационная процедура будет характеризовать, как отмечено выше, вариации входного сопротивления (сопротивления излучения), приводя его к стационарному виду.

Таким образом, в соответствии с результатами представленного выше анализа, одним из основных направлений дальнейшего развития теории проволочных антенн является совершенствование строгих методов расчета, другим – развитие инженерных методологий на основе более полного учета излучающих свойств антенны. При этом базисом теории проволочных антенн может служить обобщенный метод наводимых ЭДС, как показано выше, сочетающий в себе математическую строгость в постановке и решения задач возбуждения проволочных антенн, а также возможность физической интерпретации полученных результатов. Поэтому к этапам дальнейших исследований следует отнести развитие и реализацию данного метода особенно для анализа и синтеза криволинейных проволочных излучателей.

Литература

1. *Вычислительные* методы в электродинамике; пер. с англ. под ред. Р. Митры. – М.: Мир,1977. – 485 с.
2. *Демидчик В.И.* Алгоритм расчета токораспределения электрически длинных криволинейных проводников /В.И. Демидчик, Н.В. Калашников, А.В. Рунов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1983. – Т.26., № 3 – С.82 – 84.
3. *Nakano H.* Helical and spiral antennas: A numerical approach. – Letchworth; New York etc. Rec. Stud. Press. John Wiley and Sons, 1987. – 261 p.
4. *Кудин В.П.* Алгоритмизация задач возбуждения проволочных структур / В.П. Кудин, А.П. Рубан // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1986. – Т.29., № 8. – С.10 – 15.
5. *Яцкевич В.А.* Решение интегрального уравнения для криволинейного проводника / В.А. Яцкевич, Л.Л. Федосенко, А.И. Самусенко // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1982. – Т.25, № 8. – С.24 – 28.
6. *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн: учеб. пособие / Никольс кий В.В. – М.: Наука, 1973. – 608 с.
7. *Песецкий Б.И.* Собственные моды вибраторных излучателей / Б.И. Песецкий, Е.А. Стериополо // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1985. – Т.28, № 7. – С.10 – 15.
8. *Harrington R.F.* Theory of characteristic modes for conducting bodies / R.F. Harrington, J.R. Mautz // IEEE Trans. Antennas and Propagat. – Vol.19, №9. – Sep. 1971. – P. 622 – 628.
9. *Проценко М.Б.* Интегральные уравнения в задачах анализа криволинейных тонкопроволочных антенн / М.Б. Проценко // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова. – Одесса. – №1. – 2009. – С. 13-17.
10. *Алексеев О.В.* Выбор базисной функции для решения уравнения Галена / О.В. Алексеев, Б.В. Беклешов, Г.Г. Чавка // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1985. – Т.28, № 5. – С.72 – 74.
11. *Стрижков В.А.* Особенности численной реализации метода моментов при решении интегральных уравнений проволочных систем / В.А. Стрижков // Радиотехника и электроника. – 1988. – №5. – С.961 – 964.
12. *Докуков И.А.* Сравнительная оценка возможностей интегральных уравнение Халлена и Поклингтона при численном решении задачи о токораспределении в линейном симметричном вибраторе произвольной длины / И.А. Докуков, А.В. Рунов // Радиотехника и электроника. – 1978. – Вып.8. – С.84 – 89.
13. *Васильева А.Б.* Интегральные уравнения / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1989. – 156 с.
14. *Яцкевич В.А.* Устойчивость процесса сходимости численного решения в электродинамике / В.А. Яцкевич, С.Ф. Каршакевич // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1981. – Т.24, №2. – С. 66 – 72.
15. *Коротковолновые антенны* / Айзенберг Г.З., Белоусов С.П., Журбенко Э.М., Клигер Г.А., Курашов А.Г.; под ред. Г.З. Айзенберга. – [2-е, перераб. и доп.] – М.: Радио и связь, 1985. – 536 с.
16. *Справочник* по антенной технике / [Бахрах Л.Д., Бенинсон Л.С., Зелкин Е.Г., Кюрчкан А.Г., Лучанинов А.И., Фельд Я. Н., Шифрин Я.С.]; Под ред. Я.Н. Фельда, Е.Г. Зелкина. – М.: ИПРЖР, 1997. – Т.1. – 256 с.
17. *Марков Г.Т.* Антенны: [учеб. для радиотехнич. спец. вузов] / Г.Т. Марков, Д.М. Сазонов/ – [2-е изд. перераб. и доп.] – М.: Энергия, 1975. – 528 с.