УДК 681.322; 621.372

Иваницкий А.М., Ткаченко В.Г.
Іваницький А.М., Ткаченко В.Г.
Ivanitckiy A.M., Tkachenco V.G.

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ МАТРОИДАМИ И МОНОТОННЫМИ БУЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК МІЖ МАТРОЇДАМИ І МОНОТОННИМИ БУЛЕВИМИ ФУНКЦІЯМИ ЕЛЕКТРІЧНИХ КІЛ

INTERRELATION BETWEEN MATROIDS AND MONOTONOUS BOOLEAN FUNCTIONS OF ELECTRIC CIRCUITS

Аннотация. Установление взаимосвязи между матроидами и монотонными булевыми функциями (МБФ) позволяет ввести классификацию матроидов по видам (как семейств подмножеств Шпернера), а также совершенствовать теорию электрических цепей, в частности, при символьном описании функций этих цепей и нахождении их остовов и циклов. Введены понятия базовой и циклоидной МБФ, видов и диаграмм матроидов, заполненных матроидов. Принцип квадриальности расширен на МБФ, соответствующие любым матроидам. Доказано, что базовая и циклоидная МБФ любого матроида, а также базовая и циклоидная МБФ дуального к нему матроида образуют такую квадриальную систему, что по одной из этих МБФ несложно найти три другие.

Анотація. Установлення взаємозв'язку між матроїдами і монотонними булевими функціями (МБФ) дозволяє ввести класифікацію матроїдів за видами (як сімейств підмножин Шпернера), а також удосконалювати теорію електричних кіл, зокрема, при символьному описуванні функцій цих кіл і знаходженні їх остовів і циклів. Введені поняття базової і циклоїдної МБФ, видів і діаграм матроїдів, заповнених матроїдів. Принцип квадріальності розширений на МБФ, відповідні будь-яким матроїдам. Доведено, що базова і циклоїдна МБФ будь-якого матроїда, а також базова і циклоїдна МБФ дуального до нього матроїда утворюють таку квадріальну систему, що по одній з цих МБФ нескладно знайти три інші.

Summary. Establishment of interrelation between matroids and monotonous Boolean functions (MBF) allows to introduce classification of matroids on kinds (as Shperner's subset families), and also to improve the theory of electric circuits, in particular, at character function description of these circuits and finding of their frames and cycles. The concepts base MBF and cycled MBF, matroid kinds and matroid diagrams, filled matroids are introduced. The quadrial principle is extended on MBF that correspond any matroid. It is proven that base MBF and cycled MBF of any matroid, and also matroid MBF and cycled MBF of dual matroid form such quadrial system, that on one of these MBF it is easy to find the other three.

Электрические цепи широко используются в радиоэлектронике и телекоммуникациях. Для улучшения характеристик этих цепей и автоматизации их проектирования необходимо постоянно уделять внимание проблеме совершенствования теории электрических цепей.

Одним из путей решения вышеуказанной проблемы является применение аппарата теории матроидов. С момента появления теории матроидов в 1935 году неоднократно делались попытки использовать их в теории электрических цепей (см., например, [1,2]). В основном они применялись для описания циклов и разрезов электрических цепей, а в качестве аппарата работы с матроидами использовались матрицы.

Однако использование матриц снижает наглядность описания цепи (цепь представляется в виде матрицы чисел), матроиды в таком виде трудно классифицировать и сложность операций с матрицами (особенно переход к обратной матрице) резко возрастает с ростом сложности цепи.

Целью настоящей работы является установление связи между матроидами и монотонными булевыми функциями (МБФ), что позволило классифицировать матроиды по видам и найти для каждого матроида такую квадриальную систему МБФ, что по одной из этих МБФ несложно найти три другие, используя преобразования булевой алгебры.

В [3] определен второй способ описания МБФ (в [3] вместо термина способ описания используется термин представление) в виде минимальных входных наборов или соответствующего семейства подмножеств Шпернера [4]. (Любое семейство подмножеств некоторого множества называется семейством подмножеств Шпернера, если ни одно из подмножеств семейства не содержится ни в каком другом подмножестве этого же семейства.) Каждому семейству подмножеств Шпернера взаимно однозначно соответствует антицепь (множество взаимно несравнимых элементов) в булевой решетке, состоящая из минимальных элементов соответствующей МБФ. В [3] также

определен восьмой способ описания МБФ в виде (0,1) матрицы, в которой каждая строка является минимальным входным набором МБФ, причем строки упорядочены по убыванию количества единиц во входном наборе, а строки с равным количеством единиц упорядочены по возрастанию набора как двоичного числа. Для записи МБФ в булевой алгебре обычно используется минимальная дизъюнктивная форма (МДФ), которая является четвертым способом описания
МБФ [3], или минимальная конъюнктивная форма (МКФ), которая является пятым способом описания МБФ [3].

В [5] определен тип МБФ, как вектор Т = (a_0, a_1, …, a_i, …, a_n) из n + 1 компоненты, которые нумеруются слева направо от 0 до n, где i-я компонента вектора a_i равна числу подмножеств из i элементов в соответствующем данной МБФ семействе подмножеств Шпернера (или числу минимальных входных наборов данной МБФ, лежащих на уровне $n - i$ булевой решетки ранга n). Число n называется рангом типа Т, число v ненулевых компонент – весом типа Т, номер i первой слева ненулевой компоненты – левой границей типа Т, номер j первой справа ненулевой компоненты – правой границей типа Т, сумму m всех компонент типа Т – мощностью типа Т. Тип T_2 = (a_n, a_{n-1}, …, a_i, …, a_0) называется обратным к типу T_1 = (a_0, a_1, …, a_i, …, a_n). Тип Т называется максимальным, если при увеличении любой его компоненты на 1, он перестает быть типом.

Сравним определение семейства подмножеств Шпернера с определением матроида. Матроидом М называется пара (Е, В), где Е – конечное множество (называемое множеством матроида), а В (или В(М)) множество его подмножеств (называемых базами), удовлетворяющих двум условиям (аксиомы баз): 1) никакая из баз не содержится в другой базе и 2) если B_1 и B_2 – базы, то для любого элемента $b \in B_1$ существует такой элемент $c \in B_2$, что $(B_1 \backslash b) \cup c$ – также база [6]. Здесь же доказано, что все базы матроида равномощны, т.е. содержат одинаковое количество элементов. Мощность множества матроида Е называется порядком матроида. Мощность базы матроида называется его рангом. Матроид M_2 называется двойственным (или дуальным) к матроиду M_1, если множества матроидов и количества баз у матроидов M_1 и M_2 совпадают, а каждая база матроида M_2 является дополнением некоторой базы матроида M_1 на множестве матроида Е. Первая аксиома баз совпадает с определением семейства подмножеств Шпернера. Это значит, что матроид является семейством подмножеств Шпернера и ему соответствует некоторая МБФ f с типом Т веса 1. Будем говорить, что матроид имеет тип Т и назовем МБФ f базовой. При этом двойственный матроид имеет обратный тип. Базовая МБФ для матроида порядка n и ранга i имеет тип ранга n, веса 1, левой и правой границами равными i и мощностью m, равной количеству баз матроида. Количество переменных в каждой конъюнкции дизъюнктивной формы МБФ равно i. Каждую базу матроида можно описать как двоичное число, на i-й позиции которого (позиции нумеруются справа, начиная с 0) находится 1, если i + 1 элемент множества матроида Е принадлежит этой базе и 0 в противоположном случае. Если такие двоичные числа для всех баз матроида упорядочить по возрастанию и представить в виде (0,1) матрицы, то получим матричный способ описания матроида, совпадающий с восьмым способом описания базовой МБФ f. Однако, не любая МБФ f с типом ранга n и веса 1 соответствует некоторому матроиду. Для этого необходимо (и достаточно), чтобы на семействе подмножеств Шпернера, соответствующем МБФ f, выполнялась вторая аксиома баз.

Пример 1. Пусть на множестве $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ задано семейство подмножеств $B = \{B_1, B_2, B_3\}$, где $B_1 = \{x_2, x_4, x_5\}$, $B_2 = \{x_2, x_4, x_6\}$ и $B_3 = \{x_2, x_5, x_6\}$. Несложно проверить, что семейство подмножеств В удовлетворяет двум аксиомам баз и следовательно пара (Е,В) образует матроид M_1. Пара (Е,С) с семейством подмножеств $C = \{\overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{B}_3\}$, где $\overline{B}_1 = \{x_1, x_3, x_6\}$, $\overline{B}_2 = \{x_1, x_3, x_5\}$ и $\overline{B}_3 = \{x_1, x_3, x_4\}$ образует матроид M_2, который является двойственным к матроиду M_1. В виде (0,1) матриц матроиды M_1 и M_2 имеют вид:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом, чтобы добиться для матроида M_2 порядка строк по возрастанию и следовательно однозначности представления M_2 в виде (0,1) матрицы, строка один соответствует базе $\overline{B}_3$, а строка три – базе $\overline{B}_1$. Согласно [3] (0,1) матрицы M_1 и M_2 представляют собой восьмой способ описания МБФ f_1 и f_2 соответственно. В дизъюнктивной форме (четвертый способ описания МБФ) f_1 и f_2 имеют вид $x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_4 x_6 \vee x_2 x_5 x_6$ и $x_1 x_3 x_6 \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_1 x_3 x_4$. Назовем базовые МБФ f_1 и

f_2 дополнительными друг к другу (они не могут быть названы двойственными, так как двойственные МБФ определяются по-другому [3]). МБФ $f = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_4$ не является базовой. Этой МБФ соответствует семейство подмножеств Шпернера B = {B$_1$, B$_2$, B$_3$}, где B$_1$ = {x_1, x_2}; B$_2$ = {x_2, x_3} и B$_3$ = {x_3, x_4}. Если в подмножестве B$_1$ удалить, например, элемент x_2, то в подмножестве B$_3$ не найдется такого элемента, который совместно с элементом x_1 входил в одно из подмножеств Шпернера. Следовательно, вторая аксиома баз не выполняется.

Для любого матроида M = (E, B) множество матроида E можно разбить на три непересекающихся подмножества: 1) подмножество E$_1$, состоящее из элементов не принадлежащих ни одной базе $B_i \in B$; 2) подмножество E$_2$, состоящее из элементов принадлежащих хотя бы одной базе $B_i \in B$, но не всем базам и 3) подмножество E$_3$, состоящее из элементов принадлежащих всем базам $B_i \in B$ (одно или два из указанных подмножеств могут быть пустыми). Пусть n_1, n_2 и n_3 количества элементов в подмножествах E$_1$, E$_2$ и E$_3$ соответственно. Если n порядок матроида, $p1$ мощность пересечения, а $p2$ мощность объединения всех его баз, то $n = n_1 + n_2 + n_3$, $p1 = n_3$ и $p2 =$ $= n_2 + n_3$. Если для матроида M ранга r выполняется $n_1 = 0$, $n_2 = n$, $n_3 = 0$ и этот матроид имеет C_n^r баз, то матроид M является единственным матроидом максимального типа T ранга n, веса 1, с единственной ненулевой компонентой на позиции r равной C_n^r .

Для матроида ранга r назовем четверку чисел (n, r, $p1$, $p2$) видом матроида. Если, кроме того, заданы подмножества E$_2$ и E$_3$, то назовем шестерку (n, r, $p1$, $p2$, E$_2$, E$_3$) подвидом матроида. Так как подвиды одного вида получаются друг из друга с помощью некоторой подстановки на множестве элементов E, то все подвиды одного вида содержат одинаковое количество матроидов. Для каждого подвида имеется единственный матроид, базы которого на подмножестве E$_2$ содержат все возможные комбинации из $r - p1$ элементов. Назовем этот матроид, содержащий C_{p2-p1}^{r-p1} баз, заполненным матроидом подвида (n, r, $p1$, $p2$, E$_2$, E$_3$). Все заполненные матроиды вида (n, r, $p1$, $p2$) имеют C_{p2-p1}^{r-p1} баз. Если количество элементов $p2 - p1$ в подмножестве E$_2$ не превышает три, то заполненные матроиды исчерпывают все матроиды, но в общем случае это неверно. Однако любой матроид можно получить из заполненного матроида, удаляя некоторые базы.

Пример 2. Заполненный матроид вида (4, 2, 0, 4) содержит $C_4^2 = 6$ баз, но матроид с базовой МБФ $f_1 = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_4 \vee x_1x_4$ содержит четыре базы. Заполненный матроид вида (5, 2, 0, 5) содержит $C_5^2 = 10$ баз, но матроид с базовой МБФ $f_2 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4 \vee x_1x_5 \vee x_4x_5$ содержит шесть баз. Заполненный матроид вида (6, 2, 0, 6) содержит $C_6^2 = 15$ баз, но матроид с базовой МБФ $f_3 = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_4 \vee x_3x_4 \vee x_2x_5 \vee x_4x_5 \vee x_1x_6 \vee x_3x_6 \vee x_5x_6$ содержит девять баз. Первые два незаполненных матроида имеют минимальное число баз для матроида заданного вида.

Любой матроид можно описать в виде диаграммы. При этом каждой базе матроида (или конъюнкции базовой МБФ) сопоставим вершину диаграммы. Две вершины соединим ребром, если одна база может быть преобразована во вторую (и, обратно, вторая в первую) с помощью операции, описанной во второй аксиоме баз. Такие базы отличаются только одним элементом. Как было показано ранее, при записи матроида в виде (0, 1) матрицы каждой базе соответствует строка матрицы в виде двоичного числа. Все такие числа для одного матроида имеют одинаковое количество единиц, равное рангу матроида. Для удобства переведем эти двоичные числа в десятичные и сопоставим вершинам диаграммы. Вершины диаграммы можно считать состояниями конечного автомата. Каждое ребро диаграммы, соединяющее i-е и j-е состояния, соответствует двум переходам автомата: из i-го состояния в j-е под действием входа (k, l) и из j-го состояния в i-е под действием входа (l, k). Здесь элемент с номером k присутствует в базе i и отсутствует в базе j, а элемент с номером l присутствует в базе j и отсутствует в базе i. Если для базы i замена элементов p и q не приводит к образованию некоторой другой базы этого же матроида, то будем считать, что вход (p, q) не меняет состояния i. Таким образом, каждому матроиду соответствует некоторый конечный автомат Мура, а таблице переходов этого автомата соответствует некоторая конечная группа.

Пример 3. На рис. 1 показаны 3 диаграммы, соответствующие незаполненным матроидам видов (4, 2, 0, 4), (5,2, 0, 5) и (6, 2, 0, 6) из примера 2. На рис. 1,а изображена диаграмма матроида с базовой МБФ $f_1 = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_4 \vee x_3x_4$, на рис. 1,б – матроида с базовой МБФ $f_2 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4 \vee x_1x_5 \vee x_4x_5$ и на рис. 1,в – матроида с базовой МБФ $f_3 = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_4 \vee x_3x_4 \vee x_2x_5 \vee x_4x_5 \vee x_1x_6 \vee x_3x_6 \vee x_5x_6$. Конъюнкциям базовой МБФ f_1

соответствуют десятичные числа: 3, 6, 9, 12; базовой МБФ f_2 – числа: 3, 5, 10, 12, 17, 24; базовой МБФ f_3 – числа: 3, 6, 9, 12, 18, 24, 33, 36, 48.

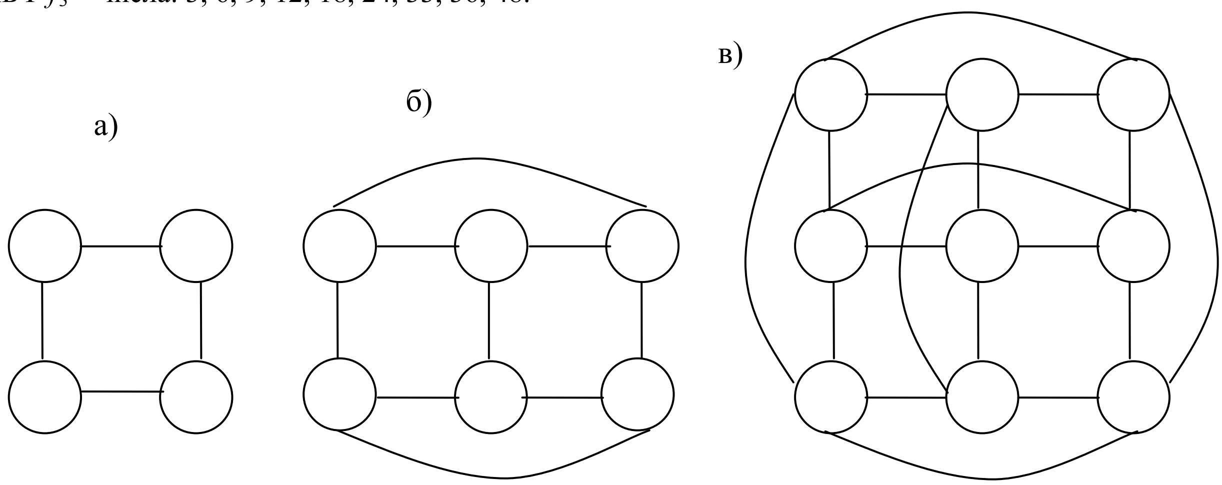

Рисунок 1 – Диаграммы матроидов

В следующих леммах находится количество видов и подвидов матроидов заданного порядка.

Лемма 1. Вид матроида (n, r, $p1$, $p2$) содержит $C_n^{p2} C_{p2}^{p1}$ подвидов матроидов (или $C_n^{p2} C_{p2}^{p1}$ заполненных матроидов).

Доказательство. На множестве E можно выбрать C_n^{p2} подмножеств, состоящих из p2 элементов, входящих хоть в одну базу матроида вида (n, r, $p1$, $p2$). В каждом из выбранных подмножеств можно выбрать C_{p2}^{p1} подмножеств, состоящих из $p1$ элементов, входящих во все базы матроида вида (n, r, $p1$, $p2$). Два выбранных подмножества полностью определяют подмножества E_2 и E_3, а значит и подвид матроида. Количество возможных выборов равно произведению сочетаний $C_n^{p2} C_{p2}^{p1}$, что доказывает лемму.

Лемма 2. Существует

$$C_n^r + \sum_{p2=r+1}^{n} \sum_{p1=0}^{r-1} C_n^{p2} C_{p2}^{p1} \qquad (1)$$

подвидов матроидов порядка n и ранга r.

Доказательство. Если для вида матроида выполняется $r = p2$, то $p1 = p2$ и из леммы 1 следует, что существует C_n^r подвидов матроидов этого вида. При этом каждый из подвидов состоит из одного заполненного матроида, содержащего одну базу. Если $r < p2 \le n$, то мощность пересечения может меняться в пределах от 0 до $r - 1$. Опять применяя лемму 1 для каждой возможной пары $p1$ и $p2$, получаем формулу (1), что доказывает лемму.

Лемма 3. Существует

$$2^n - 1 + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{p2=r+1}^{n} \sum_{p1=0}^{r-1} C_n^{p2} C_{p2}^{p1} \qquad (2)$$

подвидов матроидов порядка n (или заполненных матроидов порядка n).

Доказательство. Суммируем выражение (1) для значений r от 1 до n. При этом $\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2^n - 1$ по формуле бинома Ньютона, а остальная часть суммы равна 0 при $r = n$. В результате получаем выражение (2), что и требовалось доказать.

Лемма 4. Существует

$$1 + (n - r)\, r \qquad (3)$$

видов матроидов порядка n и ранга r.

Доказательство. В выражении (1) сочетания согласно лемме 1 подсчитываются подвиды заданного вида. Поэтому, если вместо всех сочетаний в выражение (1) подставить 1, то получим выражение для видов. Но $\sum_{p2=r+1}^{n} \sum_{p1=0}^{r-1} 1 = \sum_{p2=r+1}^{n} r = (n - r)\, r$, что доказывает лемму.

Лемма 5. Существует

$$n\,(n^2 + 5)\,/\,6 \qquad (4)$$

видов матроидов порядка n.

Доказательство. Суммируем выражение (3) для значений r от 1 до n. Получаем

$$n + n\sum_{r=1}^{n-1} r - \sum_{r=1}^{n-1} r^2 = n + n^2(n-1)/2 - (n-1)n(2n-1)/6 = n + (n-1)n(n+1)/6 = n\,(n^2+5)\,/\,6,$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Для матроидов порядка три существует семь видов и 15 подвидов, порядка 4 – 14 видов и 58 подвидов, порядка 5 – 25 видов и 225 подвидов, порядка 6 – 41 вид и 856 подвидов. Выпишем 14 видов порядка четыре: (4, 4, 4, 4), (4, 3, 0, 4), (4, 3, 1, 4), (4, 3, 2, 4), (4, 3, 3, 3), (4, 2, 0, 4), (4, 2, 1, 4), (4, 2, 0, 3), (4, 2, 1, 3), (4, 2, 2, 2), (4, 1, 0, 4), (4, 1, 0, 3), (4, 1, 0, 2), (4, 1, 1, 1). Из 58 подвидов порядка четыре только один (а именно: единственный подвид вида (4, 2, 0, 4)) обладает незаполненными матроидами. Кроме заполненного матроида из шести баз в него входят три матроида из четырех баз (один из них описан в примере 2) и шесть матроидов из пяти баз. Все эти девять матроидов получаются при удалении одной или двух баз из заполненного матроида. Всего имеется 58 + 9 = 67 матроидов порядка четыре.

Пример 5. Вид матроидов (6, 2, 1, 3) содержит $C_6^3 C_3^1 = 20\times 3 = 60$ подвидов. Каждый из них состоит из единственного заполненного матроида, содержащего две базы.

Для сокращения перебора матроидов кроме двойственного (дуального) матроида введем еще зеркальный и зеркально двойственный матроиды. В зеркальном матроиде в каждой его базе каждый элемент x_i заменяется на зеркальный элемент x_{n-i+1}. Зеркально двойственный матроид определим как зеркальный к двойственному (или двойственный к зеркальному). Такая четверка матроидов зависит от выбранного порядка элементов множества. Кроме того, для некоторых матроидов могут совпадать исходный и зеркальный матроиды или даже вся четверка матроидов.

Пример 6. Пусть для матроида M_1 из примера 1 двойственным является матроид M_2, зеркальным – матроид M_3 и зеркально двойственным – матроид M_4. Тогда соответствующие этим матроидам базовые МБФ имеют вид: $f_1 = x_2x_4x_5 \vee x_2x_4x_6 \vee x_2x_5x_6$; $f_2 = x_1x_3x_6 \vee x_1x_3x_5 \vee x_1x_3x_4$; $f_3 = x_2x_3x_5 \vee x_1x_3x_5 \vee x_1x_2x_5$ и $f_4 = x_1x_4x_6 \vee x_2x_4x_6 \vee x_3x_4x_6$. Очевидно все четыре матроида различны. МБФ f_1 и f_2 были выше названы дополнительными. Назовем МБФ f_1 и f_3 зеркальными,а МБФ f_1 и f_4 – зеркально дополнительными.

Пример 7. Матроид M_1 порядка пять и ранга два с базовой МБФ $f_1 = x_1x_2 \vee x_2x_4 \vee x_4x_5 \vee x_1x_5$ совпадает со своим зеркальным матроидом. Двойственный матроид M_2 с дополнительной базовой МБФ $f_2 = x_3x_4x_5 \vee x_1x_3x_5 \vee x_1x_2x_3 \vee x_2x_3x_4$ имеет ранг три и совпадает с зеркально двойственным матроидом.

Пример 8. Матроид M порядка четыре из примера два с базовой МБФ $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_4 \vee x_1x_4$ совпадает как с двойственным матроидом, так и с зеркальным матроидом, т.е. в этом случае четверка матроидов объединяется в один матроид.

Определим класс К2 двойных матроидов как совокупность таких пар (E, B), что множество матроида E можно разбить на два подмножества E_1 и E_2 таким образом, что неповторяющиеся части баз из B, которые принадлежат подмножествам E_1 и E_2 соответственно, образуют множества B_1 и B_2, которые являются множествами баз на множествах E_1 и E_2. Определим также, что объединение любой базы из B_1 с любой базой из B_2 образует базу из B. При этом матроид M = (E, B) разбивается на два матроида $M_1 = (E_1, B_1)$ и $M_2 = (E_2, B_2)$. Если m, m_1 и m_2 количества баз из множеств B, B_1 и B_2 соответственно, то $m = m_1m_2$. Такой класс матроидов достаточно широк. В него входят в частности все виды матроидов, для которых либо $p1 > 0$ либо $p2 < n$.

Для ряда прикладных задач матроиды удобнее определять не через базы, а через независимые множества, к которым относятся любые подмножества баз. На основе такого определения матроида [7] А.М.Иваницким предложено определение двойного матроида и показано, что для этих матроидов выполняется принцип квадриальности*.

Двойной матроид M это конечное множество S, разбитое на два подмножества S_1 и S_2, на каждом из которых определено семейство подмножеств F_i (i = 1, 2) таких, что выполняются следующие условия:

* Принцип квадриальности является частным случаем принципа взаимосоответствия [8, 9]. Принцип квадриальности основан на базе тождественно-тождественного (*TT*), тождественно-дуального (*TD*), дуально-тождественного (*DT*) и дуально-дуального (*DD*) соответствий, порождающих четверку матроидов, которые переходят друг в друга при смене соответствия.

1. $\varnothing \in F_i$ $(i = 1, 2)$;

2. Если $X_i \in F_i$ $(i = 1, 2)$ и $Y_i \subseteq X_i$, $Y_i \in F_i$ $(i = 1, 2)$;

3. Если X_i и Y_i элементы F_i и $|X_i| = |Y_i| + 1$, то существует такое $x_i \in X_i - Y_i$, что $Y_i \cup x_i \in F_i$ $(i = 1, 2)$. При этом объединение $X = X_1 \cup X_2$ любого подмножества X_1 из F_1 и любого подмножества X_2 из F_2 называется независимым множеством двойного матроида М.

Согласно принципу квадриальности для каждого двойного матроида М (*TT*-матроида) существуют еще три связанных с ним матроида: дуальный матроид *М* (*DD*-матроид, состоящий из двойственных матроидов $М_2$* и $М_1$*), тождественно-дуальный матроид М* (*TD*-матроид, состоящий из тождественного матроида $М_2$ и двойственного матроида $М_2$*) и дуально-тождественный матроид *М (*DT*-матроид, состоящий из двойственного матроида $М_2$* и тождественного матроида $М_1$). При этом дуальный матроид совпадает с обычным двойственным матроидом, а два других матроида ранее не рассматривались.

В [7] теория матроидов построена на основе принципа дуальности. Согласно этому принципу любое понятие или теорему для обычных матроидов можно преобразовать в дуальное понятие или теорему для двойственных матроидов. Согласно принципу квадриальности любое понятие или теорему для двойных *TT*-матроидов можно преобразовать в еще три понятия или теоремы для *DD*-матроидов, *TD*-матроидов и *DT*-матроидов. Применение этого принципа позволяет сократить число рассматриваемых матроидов при поиске оптимального решения, например, в области электрических цепей. Приведем еще несколько определений. Зависимым множеством называется любое подмножество множества матроида *S*, не являющееся независимым. Зависимое множество, не содержащее в себе других зависимых множеств, является циклом. В частности цикл из одного элемента называется петлей. Из определения цикла следует, что множество всех циклов G(М) матроида М является семейством подмножеств Шпернера и его можно рассматривать как МБФ ψ. Назовем МБФ ψ циклоидной МБФ матроида М. Покажем теперь применение принципа квадриальности на трех примерах.

Пример 9. Пусть G(М) множество циклов двойного матроида М. Тогда G(*М*) множество циклов дуального матроида *М*, G(М*) множество циклов тождественно-дуального матроида М*, а G(*М) множество циклов дуально-тождественного матроида *М. При этом множества G(*М*), G(М*) и G(*М) можно рассматривать по принципу квадриальности как множества дуальных *DD*-циклов, тождественно-дуальных *TD*-циклов и дуально-тождественных *DT*-циклов матроида М. В этом случае их лучше обозначать как *G(М)*, G(М)* и *G(М) соответственно. Пусть φ и ψ базовая и циклоидная МБФ двойного матроида М. Тогда $*\varphi*$ и $*\psi*$ базовая и циклоидная МБФ дуального матроида *М*, $\varphi*$ и $\psi*$ базовая и циклоидная МБФ тождественно-дуального матроида М*, а $*\varphi$ и $*\psi$ базовая и циклоидная МБФ дуально-тождественного матроида *М.

Пример 10. Применим к двойному матроиду М известную теорему о циклах [7]. Если C_1 и C_2 различные *TT*-циклы матроида М и $x \in C_1 \cap C_2$, то существует такой *TT*-цикл C_3, что $C_3 \subseteq (C_1 \cap C_2) - x$. Согласно принципу квадриальности из этой теоремы автоматически следуют еще три теоремы. Если $*C_1*$ и $*C_2*$ различные *DD*-циклы матроида М и $x \in *C_1* \cap *C_2*$, то существует такой *DD*-цикл $*C_3*$, что $*C_3* \subseteq (*C_1* \cap *C_2*) - x$. Если C_1* и C_2* различные *TD*-циклы матроида М и $x \in C_1* \cap C_2*$, то существует такой *TD*-цикл C_3*, что $C_3* \subseteq (C_1* \cap C_2*) - x$. Если $*C_1$ и $*C_2$ различные *DT*-циклы матроида М и $x \in *C_1 \cap *C_2$, то существует такой *DT*-цикл $*C_3$, что $*C_3 \subseteq (*C_1 \cap *C_2) - x$.

Пример 11. Пусть $М_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ матроид порядка три, ранга один и вида (3,1,0,2) на множестве $S_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, а $М_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матроид порядка три, ранга два и вида (3,2,1,3) на множестве $S_2 = \{x_4, x_5, x_6\}$. Построим из них двойной матроид $М = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ порядка шесть, ранга три и вида (6,3,1,5) на множестве $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. В матроиде М 4 базы, 18 независимых множеств и три цикла: $C_1 = \{x_1, x_2\}$; $C_2 = \{x_5, x_6\}$; $C_3 = \{x_3\}$. Он имеет базовую МБФ

$\varphi = x_1x_4x_5 \vee x_2x_4x_5 \vee x_1x_4x_6 \vee x_2x_4x_6$ и циклоидную МБФ $\psi = x_1x_2 \vee x_5x_6 \vee x_3$. Дуальный матроид *М*, тождественно-дуальный матроид М* и дуально-тождественный матроида *М имеют вид:

$$*M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } *M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все три матроида имеют порядок шесть и по четыре базы на множестве $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Матроид *М* ранга три, вида (6,3,1,5) имеет 18 независимых множеств и три цикла: $C_1 = \{x_1, x_2\}$, $C_2 = \{x_5, x_6\}$, $C_4 = \{x_4\}$. Он имеет базовую МБФ $\varphi = x_2x_3x_6 \vee x_1x_3x_6 \vee x_2x_3x_5 \vee x_1x_3x_5$ и циклоидную МБФ $\psi = x_1x_2 \vee x_5x_6 \vee x_4$. Матроид М* ранга четыре, вида (6,4,2,6) имеет 36 независимых множеств и два цикла: $C_1 = \{x_1, x_2\}$; $C_2 = \{x_5, x_6\}$. Он имеет базовую МБФ $\varphi = x_2x_3x_4x_5 \vee x_1x_3x_4x_5 \vee x_2x_3x_4x_6 \vee x_1x_3x_4x_6$ и циклоидную МБФ $\psi = x_1x_2 \vee x_5x_6$. Матроид *М ранга два, вида (6,2,0,4) имеет девять независимых множеств и четыре цикла: $C_1 = \{x_1, x_2\}$; $C_2 = \{x_5, x_6\}$; $C_3 = \{x_3\}$; $C_4 = \{x_4\}$. Он имеет базовую МБФ $\varphi = x_1x_6 \vee x_2x_6 \vee x_1x_5 \vee x_2x_5$ и циклоидную МБФ $\psi = x_1x_2 \vee x_5x_6 \vee x_3 \vee x_4$. Таким образом, для матроида М множество *TT*-циклов G(M) = {C$_1$, C$_2$, C$_3$}, множество дуальных *DD*-циклов *G(M)* = {C$_1$, C$_2$, C$_4$}, множество тождественно-дуальных *TD*-циклов G(M)* = {C$_1$, C$_2$} и множество дуально-тождественных *DT*-циклов *G(M) = {C$_1$, C$_2$, C$_3$, C$_4$}.

Теперь расширим описанный принцип квадриальности на базовую и циклоидную МБФ произвольного матроида М и дуального к нему матроида *М*. Для МБФ φ определена унарная операция двойственности φ^{-1} [3]. Как было сказано выше, каждая МБФ может быть описана как МДФ и как МКФ. Если φ задана в виде МДФ, то заменяя знаки дизъюнкции на знаки конъюнкции и, наоборот, знаки конъюнкции на знаки дизъюнкции, получаем двойственную МБФ φ^{-1}, заданную в виде МКФ. Если φ задана в виде МКФ, то заменяя знаки дизъюнкции на знаки конъюнкции и, наоборот, получаем двойственную МБФ φ^{-1}, заданную в виде МДФ. Определим еще две унарные операции. Для МБФ φ от n переменных в виде МДФ заменим каждую конъюнкцию из m переменных на конъюнкцию из всех $n - m$ переменных, не входящих в первоначальную конъюнкцию. Назовем полученную функцию дополнением МДФ φ или дизъюнктивным дополнением φ и обозначим ее $\overline{\varphi}$. Для МБФ φ от n переменных в виде МКФ заменим каждую дизъюнкцию из m переменных на дизъюнкцию из всех $n - m$ переменных, не входящих в первоначальную дизъюнкцию. Назовем полученную функцию дополнением МКФ φ или конъюнктивным дополнением φ и обозначим ее $\underline{\varphi}$. Унарная операция на некотором множестве, которая при повторном применении к любому элементу множества не изменяет его, называется инволюцией. Таким образом, операция двойственности, операция дизъюнктивного дополнения и операция конъюнктивного дополнения являются инволюциями.

Пусть φ_1 – базовая МБФ произвольного матроида М, а φ_2 – базовая МБФ дуального матроида *М*. По определению дуального матроида *М* имеем $\varphi_2 = \overline{\varphi}_1$. Аналогично $\varphi_1 = \overline{\varphi}_2$.

Покажем, что базовая МБФ φ_1 любого матроида М и его циклоидная МБФ ψ_1 связаны между собой.

Теорема 1. Циклоидная МБФ ψ_1 любого матроида М является двойственной МБФ от базовой МБФ φ_2 дуального матроида *М*, т.е. $\psi_1 = \varphi_2^{-1}$.

Доказательство. Пусть $S = \{x_1, ..., x_n\}$ множество, на котором определен матроид М (и также дуальный матроид *М*). Тогда любое подмножество $A \subseteq S$ определяет двоичный набор длины n, который равен 1 в i-й позиции, если $x_{i+1} \in A$, и равен 0, если $x_{i+1} \notin A$. Циклоидная МБФ ψ_1 равна 1 на наборах, соответствующих циклам и всем подмножествам, содержащим в себе циклы, т.е. на наборах, соответствующих всем зависимым множествам матроида. Кроме того, МБФ ψ_1 равна 0 на наборах, соответствующих всем независимым множествам матроида, в том числе и на базах. По определению [3] двойственная МБФ ψ_1^{-1} равна 1 только на наборах, соответствующим тем множествам, которые дополнительны к независимым множествам матроида М. Тогда по определению базовой МБФ $\psi_1^{-1} = \varphi_2$. Т.к. $(\psi_1^{-1})^{-1} = \psi_1$, то $\psi_1 = \varphi_2^{-1}$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Циклоидная МБФ ψ_2 дуального матроида *М* является двойственной МБФ от базовой МБФ φ_1 первоначального матроида М, т.е. $\psi_2 = \varphi_1^{-1}$.

Следствие 2. Циклоидная ψ и базовая φ МБФ любого матроида связаны соотношением $\psi = \overline{\varphi}^{-1}$.

Лемма 6. Циклоидная МБФ ψ_2 дуального матроида является конъюнктивным дополнением циклоидной МБФ ψ_1 первоначального матроида М, т.е. $\psi_2 = \underline{\psi}_1$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует $\psi_2 = \varphi_1^{-1}$ и $\psi_1 = \overline{\varphi}_1^{-1}$. Отсюда $\overline{\varphi}_1 = \psi_1^{-1}$ и $\varphi_1 = \overline{\psi_1^{-1}}$, т.е. $\psi_2 = \overline{\psi_1^{-1}}^{-1}$. Допустим МБФ ψ_1 задана в виде МКФ. Тогда, чтобы получить ψ_2 нужно заменить знаки дизъюнкции на знаки конъюнкции и наоборот, к полученной МДФ применить операцию дизъюнктивного дополнения и опять заменить знаки дизъюнкции на знаки конъюнкции и наоборот, получая МБФ ψ_2 в виде МКФ. Но по определению операций дизъюнктивного и конъюнктивного дополнения это то же самое, что применить операцию конъюнктивного дополнения к первоначальной МКФ. Лемма доказана.

Таким образом, четверка МБФ φ_1, φ_2, ψ_1 и ψ_2, где φ_1 и φ_2 – базовые МБФ произвольного матроида М и дуального к нему матроида *М*, а ψ_1 и ψ_2 – циклоидные МБФ этих же матроидов, образуют квадриальную систему МБФ. При этом пара МБФ φ_1 и φ_2 связана операцией дизъюнктивного дополнения, пара МБФ ψ_1 и ψ_2 операцией конъюнктивного дополнения, а пары МБФ φ_1 и ψ_2, а также φ_2 и ψ_1 операцией двойственности.

Доказанные теорема 1 и лемма 6 дают удобный способ находить все циклы любого матроида.

Пример 12. Найдем все циклы матроида М из примера 11. Матроид М имеет четыре базы $B_1 = \{x_1, x_4, x_5\}$; $B_2 = \{x_2, x_4, x_5\}$; $B_3 = \{x_1, x_4, x_6\}$ и $B_4 = \{x_2, x_4, x_6\}$. Отсюда базовая МБФ $\varphi_1 = x_1x_4x_5 \vee x_2x_4x_5 \vee x_1x_4x_6 \vee x_2x_4x_6$. Применяя операцию дизъюнктивного дополнения, находим базовую МБФ $\varphi_2 = x_2x_3x_6 \vee x_1x_3x_6 \vee x_2x_3x_5 \vee x_1x_3x_5$ дуального матроида *М*. Двойственную функцию к φ_2 найдем путем замены в последнем выражении операций дизъюнкции на операции конъюнкции и наоборот. Тогда $\varphi_2^{-1} = (x_2 \vee x_3 \vee x_6)(x_1 \vee x_3 \vee x_6)(x_2 \vee x_3 \vee x_5)(x_1 \vee x_3 \vee x_5)$. Раскрывая скобки с использованием правил дистрибутивности, идемпотентности и поглощения для дизъюнкции и конъюнкции и применяя доказанную теорему находим циклоидную МБФ $\psi_1 = \varphi_2^{-1} = x_1x_2 \vee x_5x_6 \vee x_3$. Матроид М имеет три цикла: $C_1 = \{x_1, x_2\}$, $C_2 = \{x_5, x_6\}$, $C_3 = \{x_3\}$. Цикл C_3 является петлей. Найдем еще все циклы матроида M_1 порядка пять из примера 3, заданного базовой МБФ
$\varphi_1 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4 \vee x_1x_5 \vee x_4x_5$. Базовая МБФ дуального матроида равна $\varphi_2 = x_3x_4x_5 \vee x_2x_4x_5 \vee x_1x_3x_5 \vee x_1x_2x_5 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3$. Двойственная МБФ равна $\varphi_2^{-1} = (x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_2 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_3 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$. После раскрытия скобок и приведения получаем $\psi_1 = \varphi_2^{-1} = x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_5 \vee x_3x_5$. Матроид M_1 имеет четыре цикла: $C_1 = \{x_1, x_4\}$; $C_2 = \{x_2, x_3\}$; $C_3 = \{x_2, x_5\}$; $C_4 = \{x_3, x_5\}$.

В [7] показано, что любой электрической цепи (даже любому ненаправленному графу) соответствуют два дуальных матроида: циклический матроид M_1 и матроид разрезов M_2. При этом базы циклического матроида соответствуют остовам этой цепи, циклы циклического матроида – циклам цепи, базы матроида разрезов – коостовам цепи, а циклы матроида разрезов – разрезающим множествам цепи. Соотношения, доказанные в теореме 1 и лемме 6, позволяют по любому из этих множеств находить три другие, на основе принципа квадриальности, примененного к базовым и циклоидным МБФ циклического матроида и матроида разрезов.

Назовем базовую и циклоидную МБФ одного матроида дуальными МБФ. Затем выберем произвольный матроид М и назовем его базовую МБФ φ_1 тождественно-тождественной (*TT*) МБФ. Тогда циклоидную МБФ ψ_1 матроида М можно назвать дуально-тождественной (*DT*) МБФ, базовую МБФ φ_2 дуального матроида *М* – тождественно-дуальной (*TD*) МБФ и циклоидную МБФ ψ_2 дуального матроида *М* – дуально-дуальной (*DD*) МБФ. Таким образом получена аналогия между квадриальной системой двойных матроидов и квадриальной системой МБФ. Однако эта аналогия не является полной. В случае двойных матроидов переход от *TT*-матроида к *DT*-матроиду или *TD*-матроиду можно осуществить с помощью дополнения заданного подмножесва всех баз *TT*-матроида. Обратный переход осуществляется с помощью этой же операции. Значит, операция дополнения баз является симметричной унарной операцией или инволюцией. В случае квадриальной системы МБФ переход от *TT*-МБФ φ_1 к *DT*-МБФ ψ_1 согласно теореме 1 осуществляется с помощью последовательного выполнения операций дизъюнктивного дополнения и двойственности, т.е. $\psi_1=\overline{\varphi}_1^{-1}$. Обратный переход от *DT*-МБФ ψ_1 к *TT*-МБФ φ_1 осуществляется с помощью последовательного выполнения операций двойственности и дизъюнктивного дополнения, т.е. $\varphi_1=\overline{\psi_1^{-1}}$, или с помощью последовательного выполнения операций конъюнктивного дополнения и двойственности, т.е. $\varphi_1=\underline{\psi_1}^{-1}$. Если мы попытаемся к ψ_1 последовательно применить операции дизъюнктивного дополнения и двойственности, то полученная МБФ уже не будет входить в описанную квадриальную систему МБФ. Значит, в данном случае имеет место нарушение симметрии и операция перехода от *TT*-МБФ φ_1 к дуальной *DT*-МБФ ψ_1 не является инволюцией.

В заключение отметим следующее. Установление взаимосвязи между матроидами и МБФ позволило классифицировать матроиды, найти число их видов и разработать метод нахождения циклов, остовов, коостовов и разрезающих множеств электрических цепей на основе принципа квадриальности базовых и циклоидных МБФ. В алгоритме, реализующем этот метод, основную сложность составил переход от МДФ к МКФ и обратно, прямая реализация которого уже для 20 переменных требует слишком много операций. Решение данной проблемы за недостатком места будет описано в следующей статье.

Литература

1. *Recski A.* Interconnection properties and matroidal characterization of some basic concepts of network theory/A. Recski//Proc. 8th Colloq. Microwave Commun. – Budapest, 1986. – №47.
2. *Recski A.* Matroids in network theory/A. Recski//Proc. 8th Colloq. Microwave Commun. – Budapest, 1978. – №1.
3. *Ткаченко В.Г.* Отказы цифровых схем и представления монотонных булевых функций/ Ткаченко В.Г. // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – Одеса, 2006. – №2. – С. 54 – 69.
4. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики / Сачков В.Н. – М.: Наука, 1982. – 384 с.
5. *Ткаченко В.Г.* Классификация монотонных булевых функций при синтезе цифровых схем/ Ткаченко В.Г. // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – Одеса, 2008. – №1. – С. 35 – 43.
6. *Лекции* по теории графов/ [Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.]. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
7. *Свами М.* Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 454 с.
8. *Иваницкий А.М.* Принцип взаимосоответствия / Иваницкий А.М. // Радиотехника. – 1976. – Т.31, №7. – С.45-52; – М.,1973. – 20 с. – Деп. в НИИЭИР, №3 – 3672:РИР. –1973. – №18.
9. *Иваницкий А.М.* Принцип взаимосоответствия (обобщенный принцип дуальности) и его применение в анализе и синтезе электрических цепей: дис. ... доктора техн. наук: 05.09.05 / Иваницкий Анатолий Мечиславович. – М., 1991. – 40 с.