УДК 621.396.67

Проценко М.Б.
Проценко М.Б.
Protsenko M.B.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТОНКОПРОВОЛОЧНЫХ АНТЕНН

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ КРИВОЛІНІЙНИХ ТОНКОДРОТОВИХ АНТЕН

INTEGRAL EQUATIONS IN THE PROBLEMS OF CURVILINEAR THIN-WIRE ANTENNA ANALYSIS

Аннотация. В статье представлены результаты анализа интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, полученных на основе метода векторного потенциала. Показана эквивалентность данных уравнений для решения задач анализа криволинейных тонкопроволочных антенн. Проведен их сравнительный анализ.

Анотація. У статті подано результати аналізу інтегральних та інтегро-диференційних рівнянь, здобутих на підставі методу векторного потенціалу. Показано еквівалентність даних рівнянь для розв'язування задач аналізу криволінійних тонкодротових антен. Проведено їхній порівняльний аналіз.

Summary. The results of integral and integro-differential equations analysis are presented in the article. The equations were derived with the help of vector potential method. The equivalency of these equations in application to the solution of the problems of curvilinear thin-wire antenna analysis is shown. The comparative analysis of the equations is carried out as well.

Основной проблемой при анализе антенн является определение электромагнитного поля, создаваемого излучателем как в дальней, так и в ближней зонах антенны. Электромагнитное поле в дальней зоне антенны описывается направленными, поляризационными и энергетическими характеристиками антенны, а в ближней зоне антенны, в частности у ее входных зажимов, позволяет вычислить входное сопротивление. Точность решения данной задачи, а также ее трудоемкость во многом зависят от используемой методологии, характеризующейся как электродинамической строгостью в постановке задачи, так и многообразием учитываемых условий. В связи с этим при выборе метода теоретического анализа, который с приемлемой для практики точностью позволил бы осуществлять анализ характеристик проволочных антенн, а также хотя бы частично решать задачу конструктивного синтеза излучателя, следует учитывать особенности конструкции антенны, особенности амплитудно-фазового распределения возбуждающих воздействий, наличие пассивных излучателей (например настраиваемых или апериодических рефлекторов) и неизлучающих (например сосредоточенных нагрузок) элементов.

Одним из таких методов является метод векторного потенциала [1], позволяющий преобразовывать общие уравнения Максвелла к виду интегральных или интегро-дифференциальных уравнений относительно функции амплитудно-фазового распределения тока на излучающих проводниках антенны. Главным преимуществом формулировки задачи в представляемом виде является то, что условие излучения и граничные условия естественным образом входят в интегральные уравнения. Это позволяет решать задачи излучения (вычисление поля, возбуждаемого заданными источниками) и возбуждения антенн (вычисление амплитудно-фазового распределения тока, входного сопротивления). Однако в связи с существенными различиями в представлении окончательных математических выражений, отличающихся, в первую очередь, степенью используемых приближений и, как следствие, вычислительными особенностями, возникает необходимость в детальном рассмотрении основополагающих электродинамических уравнений с целью выявления степени их эквивалентности и применимости для дальнейшего использования, что является также целью данной статьи.

Решение задач антенной техники неразрывно связано с последовательным использованием основных уравнений электромагнитного поля – уравнений Максвелла, которые характеризуют пространственно-временное (частотное) взаимодействие составляющих электромагнитного поля: вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$; вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$. Источниками электромагнитного поля являются токи и заряды, характеризуемые вектором объемной плотности электрического тока $\vec{J}$ и объемной плотностью электрических зарядов ρ. Все эти величины для изотропных сред с диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями связаны между собой следующей системой уравнений (см., например, [2]):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon; \qquad \operatorname{div}\mu\vec{H} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Не нарушая общности представления, будем предполагать, что рассматриваемый электродинамический процесс меняется во времени по гармоническому закону. Такое предположение дает возможность перейти к комплексной форме записи векторов электромагнитного поля и уравнений, которые их связывают. Тогда, переходя к комплексной плоскости и опуская частотно-временной множитель $\exp(\mathrm{j}\omega t)$, систему уравнений (1) можно преобразовать к виду

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\,\dot{\vec{E}}; \quad \operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -\,\mathrm{j}\omega\mu\,\dot{\vec{H}}; \\ \operatorname{div}\dot{\vec{E}} = \dot{\rho}/\varepsilon; \qquad \operatorname{div}\mu\dot{\vec{H}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для дальнейшего преобразования необходимо, решив представленную выше систему дифференциальных уравнений (2), найти составляющие поля $\dot{\vec{E}}$ и (или) $\dot{\vec{H}}$, выразив их через заданное распределение токов $\dot{\vec{J}}$ и (или) зарядов $\dot{\rho}$.

Одно из направлений решения поставленной задачи состоит в преобразовании системы уравнений (1) либо (2) к интегральному или интегро-дифференциальному уравнению относительно произвольной, в общем случае, функции распределения тока, например путем введения вспомогательных функций – векторного $\dot{\vec{A}}$ и скалярного $\dot{U}$ потенциалов электромагнитного поля, удовлетворяющих следующим волновым уравнениям [2]:

$$\nabla^2\dot{\vec{A}} + k^2\dot{\vec{A}} = -\mu\,\dot{\vec{J}}\,; \quad \nabla^2\dot{U} + k^2\dot{U} = -\dot{\rho}/\varepsilon\,, \tag{3}$$

Как известно [3], решение уравнений (3) имеет вид

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{v_0}\dot{\vec{J}}\,\dot{G}(R)\,\mathrm{d}\,v\,; \quad \dot{U} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v_0}\dot{\rho}\,\dot{G}(R)\,\mathrm{d}\,v\,, \tag{4}$$

где $\dot{G}(R) = \exp(-\,\mathrm{j}kR)/R$ – функция Грина для свободного пространства; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число свободного пространства; λ – длина волны электромагнитного колебания; R – расстояние между точками наблюдения и интегрирования; v_0 – объем, занимаемый излучателем.

Хотя для объемных излучателей, к которым относятся также и проволочные антенны, наиболее удобны интегральные уравнения для вектора напряженности магнитного поля, однако, в частном случае, для тонкопроволочных антенн, как отмечено в работе [4], целесообразно использовать интегральные уравнения, описывающие вектор напряженности электрического поля. Тогда, опуская известные математические выкладки (см., например, [2]), учитывая также, что $\omega = k/\sqrt{\varepsilon\mu}$, запишем окончательное выражение для вектора напряженности электрического поля:

$$\dot{\vec{E}} = -\,\mathrm{j}\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\dot{\vec{A}} - \operatorname{grad}\dot{U}\,. \tag{5}$$

Дальнейшее преобразование (5), путем уменьшения числа неизвестных функций, можно осуществить, учитывая взаимосвязь между этими функциями. Одним из таких уравнений связи является условие калибровки Лоренца [2]

$$\operatorname{div}\,\dot{\vec{A}} = -\,\mathrm{j}k\sqrt{\varepsilon\mu}\,\dot{U}\,. \tag{6}$$

Тогда, подставив (6) в (5) и произведя ряд преобразований, получим

$$\dot{\vec{E}} = -\,\mathrm{j}\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\dot{\vec{A}} - \mathrm{j}\frac{1}{k\sqrt{\varepsilon\mu}}\operatorname{grad}\,\operatorname{div}\,\dot{\vec{A}} = \frac{1}{\mathrm{j}k\sqrt{\varepsilon\mu}}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{A}}\,, \tag{7}$$

или

$$\dot{\vec{E}} = -\,\mathrm{j}\frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{4\pi}k^{-1}\int\limits_{v_0}\dot{\vec{J}}\left[k^2\dot{G}\left(R\right)+\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{G}\left(R\right)\vec{s}_J\right)\right]\mathrm{d}\,v\,, \tag{8}$$

где $\vec{s}_J$ – единичный орт плотности тока, соответствующий точке наблюдения.

В качестве альтернативного варианта, учитывающего взаимосвязь между неизвестными функциями, можно принять закон непрерывности тока [2]

$$\operatorname{div}\,\dot{\vec{J}} = -\,\mathrm{j}\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\dot{\rho}\,, \tag{9}$$

на основании которого получаем другую разновидность интегрального, точнее интегро-дифференциального уравнения:

$$\dot{\vec{E}} = -\,\mathrm{j}\frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{4\pi}k^{-1}\int\limits_{v_0}\left[\dot{\vec{J}}\,k^2\dot{G}\left(R\right)+\operatorname{div}\dot{\vec{J}}\operatorname{grad}\dot{G}\left(R\right)\right]\mathrm{d}\,v\,. \tag{10}$$

Представленные выше интегральное и интегро-дифференциальное уравнения (8) и (10) описывают электромагнитное поле, создаваемое объемной плотностью тока $\dot{\vec{J}}$ во всем окружающем данный объем пространстве, в том числе и вблизи его поверхности. Вектор Пойнтинга для этого собственного электромагнитного поля $\dot{\vec{E}}$, определяющий излучение антенны, направленный наружу от излучающего объема, равен по величине и противоположен по направлению вектору Пойнтинга электромагнитного поля $\dot{\vec{E}}_{\text{ст}}$, создаваемого возбуждающим антенну устройством. Для этого поля вектор Пойнтинга у поверхности антенны направлен внутрь излучающего объема так же, как это происходит в случае конечной проводимости данного объема [3]. Таким образом, при любом способе возбуждения антенны, как указано в работе [2], выполняется граничное условие

$$\dot{\vec{E}}\,\vec{s}_J = -\dot{\vec{E}}_{\text{ст}}\,\vec{s}_J\,, \tag{11}$$

где $\dot{\vec{E}}_{\text{ст}}\,\vec{s}_J$ и $\dot{\vec{E}}\,\vec{s}_J$ — тангенциальные составляющие напряженности стороннего поля, определяемого приложенной сторонней э. д. с. и поля, создаваемого объемной плотностью электрического тока $\dot{\vec{J}}$.

Согласно (11), тангенциальная составляющая напряженности электрического поля, равная нулю у поверхности антенны, складывается из двух равных и противоположно направленных напряженностей, порожденных двумя полями: собственным и сторонним. Отмеченное выше уточнение является, в некотором смысле, принципиальным, согласно которому не может считаться удовлетворительным выбор δ-функции в качестве модели источника возбуждающего электромагнитного поля $\dot{\vec{E}}_{\text{ст}}$. Должна быть другая модель, при которой $\dot{\vec{E}}_{\text{ст}}$ на поверхности антенны отлична от нуля, так как антенна излучает со всей поверхности.

Рассмотрим излучающий проводник произвольной конфигурации, расположенный в однородном изотропном пространстве и возбуждаемый сторонним источником поля. Будем считать, что проводимость проводника стремится к бесконечности. Это условие физически означает, что ток существует в бесконечно тонком слое на поверхности проводника. Тогда от интеграла по объему v_0 в (4) можно перейти к интегралу по поверхности и, соответственно, вектор объемной плотности тока $\dot{\vec{J}}$ можно заменить вектором поверхностной плотности тока [5]. Следующее допущение, так называемое «тонкопроволочное» приближение, согласно которому будем считать, проводник, по которому течет ток, имеет цилиндрическую форму, обладаем малым (по сравнению с λ – длиной волны и длиной проводника) и постоянным вдоль оси поперечным сечением. Это означает, что азимутальная вариация поверхностной плотности тока отсутствует либо изменения поверхностной плотности тока в плоскости поперечной оси проводника пренебрежимо малы. Тогда поле поверхностного тока, текущего по боковой поверхности кругового цилиндра, эквивалентно полю линейного тока $\dot{I}\left(s\right)$, протекающего по и в направлении оси проводника [5].

Тогда дифференциальные операторы в (8) и (10) можно представить в виде

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{G}(R)\vec{s}_J\right)=-\frac{\partial^2\dot{G}(R)}{\partial s\,\partial s'}\vec{s}_0;\ \ \operatorname{div}\dot{\vec{J}}=\frac{\partial\dot{I}(s')}{\partial s'};\ \ \operatorname{grad}\dot{G}(R)=\frac{\partial\dot{G}(R)}{\partial s}\vec{s}_0, \tag{12}$$

где $\vec{s}_0$ — единичный орт в направлении оси проводника; s, s' — координаты точки наблюдения и интегрирования.

И соответственно, с учетом (12), перепишем (8) и (10):

$$\dot{\vec{E}}=-\mathrm{j}\frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{4\pi}k\int_s\left[\dot{I}(s')\dot{G}(R)\vec{s}_0^{\,'}-\dot{I}(s')k^{-2}\frac{\partial^2\dot{G}(R)}{\partial s\partial s'}\vec{s}_0\right]\mathrm{d}s'; \tag{13}$$

$$\dot{\vec{E}}=-\mathrm{j}\frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{4\pi}k\int_s\left[\dot{I}(s')\dot{G}(R)\vec{s}_0^{\,'}+k^{-2}\frac{\partial\dot{I}(s')}{\partial s'}\frac{\partial\dot{G}(R)}{\partial s}\vec{s}_0\right]\mathrm{d}s'. \tag{14}$$

Исследование направленных, поляризационных и энергетических характеристик поля излучения обычно проводят в дальней зоне антенны, для которой справедливо асимптотическое приближение для вектора $\dot{\vec{A}}$. При этом, если воспользоваться малостью величин второго R^{-2} и большего порядка, то для расчета $\dot{\vec{E}}$ можно использовать выражения (13) и (14) в виде:

$$\dot{\vec{E}}\approx-\mathrm{j}\frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{4\pi}k\int_s\dot{I}(s')\dot{G}(R)\vec{s}_0^{\,'}\,\mathrm{d}s'. \tag{15}$$

Согласно (15), характеристики поля излучения произвольной проволочной антенны $\dot{\vec{E}}$ будут зависеть как от геометрической конфигурации излучателя s, его расположения в пространстве, так и от функции амплитудно-фазового распределения тока вдоль излучающего проводника $\dot{I}(s')$.

При вычислении поля, создаваемого у поверхности излучающего проводника его собственным током, можно также считать, что ток протекает по оси проводника, тогда как поле определяется у его боковой поверхности, либо ток равномерно распределен по боковой поверхности проводника, а поле ищется на его оси, поскольку результирующее электрическое поле должно обращаться в нуль не только у боковой поверхности провода, но и в любой точке, лежащей внутри провода [5].

На основании представленных рассуждений, учитывая также граничное условие (11), перепишем (13) и (14) в виде

$$\int_s\dot{I}(s')\left[k^2\dot{G}(R)\left(\vec{s}_0\vec{s}_0^{\,'}\right)-\frac{\partial^2\dot{G}(R)}{\partial s\,\partial s'}\right]\mathrm{d}s'=-\mathrm{j}\frac{4\pi k}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}\dot{E}_{\text{ст}}; \tag{16}$$

$$\int_s\left[k^2\dot{I}(s')\dot{G}(R)\left(\vec{s}_0\vec{s}_0^{\,'}\right)+\frac{\partial\dot{I}(s')}{\partial s'}\frac{\partial\dot{G}(R)}{\partial s}\right]\mathrm{d}s'=-\mathrm{j}\frac{4\pi k}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}\dot{E}_{\text{ст}}. \tag{17}$$

Выражения (16) и (17) являются известными в литературе соотношениями (см., например, [6]), которые называются, соответственно, уравнением Поклингтона [7] и уравнением Харрингтона [8], но обобщенными на случай криволинейного проволочного излучателя.

Представленный анализ интегральных уравнений теории проволочных антенн хотя и не является исчерпывающим, однако он будет выглядеть недостаточно полным, если не упомянуть еще об одном виде интегрального уравнения. Речь идет об уравнении Халлена [9], полученного многими авторами на основании (3) и (4) для прямолинейного излучающего проводника с моделью источника возбуждения в виде δ-функции. Однако наиболее значимой представляется работа Мея [10], в которой уравнение Халлена обобщено на проволочные антенны с произвольной геометрической формой. Не приводя известных математических выкладок, запишем окончательный вариант уравнения Халлена-Мея в следующем виде:

$$\int_s\dot{I}(s')\left\{\dot{G}(R)\left(\vec{s}_0\,\vec{s}_0^{\,'}\right)-\int_s\left[\frac{\partial\dot{G}(R)}{\partial s''}\left(\vec{s}_0^{\,''}\vec{s}_0^{\,'}\right)+\dot{G}(R)\left(\frac{\partial\vec{s}_0^{\,''}}{\partial s''}\vec{s}_0^{\,''}\right)+\frac{\partial\dot{G}(R)}{\partial s''}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cos k\left(s-s''\right)\mathrm{d}s''\right\}\mathrm{d}s'=\dot{C}\cos ks-\mathrm{j}\frac{U_0}{2\sqrt{\mu/\varepsilon}}\sin k|s|, \tag{18}$$

где U_0 – напряжение, приложенное к возбуждающему зазору антенны; $\dot{C}$ – комплексная постоянная.

Необходимо отметить, что представленные выше интегральные и интегро-дифференциальное уравнения являются, в некотором смысле, эквивалентными, однако отличия в форме их представления приводят к различным вычислительным алгоритмам и, как следствие, к различной точности получаемых результатов. Так, наименьшие ошибки возникают при использовании уравнений (17) и (18), ядра которых имеют более «гладкий» характер (особенность ядра вида R^{-2}) по отношению к уравнению (16) (особенность ядра вида R^{-3}). Но использование уравнения (18) требует значительно больших временных затрат на решение, чем другие уравнения, вследствие наличия в ядре дополнительного интеграла.

Необходимость использования интегральных уравнений для решения задач возбуждения проволочных антенн в представленном виде вызвана, в первую очередь, вычислениями абсолютного значения входного сопротивления антенны, поскольку численные значения других характеристик, таких как характеристик излучения в дальней зоне антенны, достаточно приводить в относительном виде, что допускает существенные упрощения в формулировке задачи (15).

Определение входного сопротивления произвольных проволочных антенн посредством решения интегральных уравнений является на современном этапе сложной задачей. Необходимо отметить, что использование интегральных уравнений может дать хорошие результаты только в случае применения реальной математической модели, описывающей не только излучатель, но и цепи его возбуждения. Во всех остальных случаях основным источником ошибок определения входного сопротивления антенны, а особенно его реактивной составляющей, является тонкопроволочное приближение, вследствие отмеченной выше особенности ядра интегральных уравнений.

Вместе с тем, необходимо подчеркнуть, что для оценки изменения входного сопротивления антенны в зависимости от геометрической формы излучающей структуры либо от условий возбуждения антенны первостепенное значение имеет даже не абсолютное значение входного сопротивления, а характер его изменения. Поэтому можно ограничиться некоторым сошедшимся решением, отказавшись от «точного» определения входного сопротивления антенны. В данном случае под «точным» значением входного сопротивления проволочной излучающей структуры необходимо понимать входное сопротивление, полученное с удовлетворительной точностью, так как действительно сошедшегося со строго математической точки зрения решения по входному сопротивлению ни одно из рассматриваемых интегральных или интегро-дифференциальных уравнений дать не может.

Таким образом, рассмотрены основные положения метода векторного потенциала и выполнено преобразование системы уравнений Максвелла к интегральным уравнениям относительно функции распределения тока. Показано, что рассмотренные интегральные уравнения при различном математическом описании эквивалентны по содержанию, а также позволяют формулировать задачи возбуждения и излучения проволочных антенн на основе единой методологии.

К основным направлениям дальнейших исследований в данной области следует отнести анализ методов решения интегральных или интегро-дифференциальных уравнений применительно для вычислительных задач теории криволинейных тонкопроволочных антенн, а также реализация одного из выбранных методов.

Литература

1. *Фрадин А.З.* Антенны сверхвысоких частот / А.З. Фрадин. – М.: Советское радио, 1957. – 646 с.
2. *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн: [учеб. пособие] / В.В. Никольский. – М.: Наука, 1973. – 608 с.
3. *Щелкунов С.* Антенны (теория и практика): [пер. с англ. под ред. Л.Д. Бахраха] / С. Щелкунов, Г. Фриис. – М.: Сов. радио, 1955. – 604 с.
4. *Малушков Г.Д.* Методы решения задач электромагнитного возбуждения тел вращения (обзор) / Г.Д. Малушков // Изв. вузов. Радиофизика. – 1975. – Вып.18, № 11. – С.1563 – 1589.
5. *Коротковолновые антенны* / [Айзенберг Г.З., Белоусов С.П., Журбенко Э.М. и др.]; под ред. Г.З. Айзенберга. — [2-е изд., перераб. и доп.]. – М.: Радио и связь, 1985. – 536 с.
6. *Вычислительные* методы в электродинамике: [пер. с англ.] / Под ред. Р. Митры. – М.: Мир,1977.— 485 с.
7. *Pocklington H.C.* Electrical oscillatons in wire / H.C. Pocklington // Camb. Phil. Soc. Pros. – 1897. – № 9. – P. 324 – 332.
8. *Harrington R.F.* Field computation by moment method / R.F. Harrington. – Macmillan, New York, 1968. – 150 p.
9. *Hallen E.* Theoretical investigations into transmitting and receiving qualities of antennas / E. Hallen // Nova Acta Regiae Soc. Sci. Upsaliensis. – 1938. – № 1. – P. 1 – 44.
10. *Mei K.K.* On the integral equation of thin wire antennas / K.K. Mei // IEEE Trans. Antennas and Propagat. – Vol. 13, 1965. – P. 374 – 378.