УДК 621. 395

Ложковський А.Г.
Loshkovskiy A.G.

ПРОСТИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ БАГАТОКАНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З ЧЕРГОЮ В МОДЕЛІ $M/D/m/r = \infty$ (Задача Кроммеліна)

A SIMPLE WAY TO CALCULATE THE MULTI-CHANNEL SYSTEM WITH QUEUING OF THE $M/D/M/r = \infty$ MODEL

Анотація. Розглянуто модель повнодоступної системи з чергою при обслуговуванні пуассонівського потоку заявок з постійною тривалістю заняття. Запропоновано простий метод розрахунку основних характеристик якості обслуговування, заснований на апроксимації середньої тривалості затримки заявок у системі *С*-формулою Ерланга.

Summary. The model of fully-accessible queuing system handing Poisson call flow of constant holding time is considered. The simple method of calculation of main quality of service characteristics is offered. The method is based on approximating of average delay duration for a system by the C-formulae Erlang.

У телекомунікаційних системах, заснованих на технології комутації пакетів (*ATM, IP, Ethernet*), реалізується дисципліна обслуговування з очікуванням (система з чергами). При проектуванні таких систем, наприклад, розрахунку умовної кількості вихідних портів пакетного комутатора, середньої кількості затриманих джерел (пакети яких перебувають у буфері довше одного циклу), середнього заповнення вхідного буфера та інше, важливим етапом, що впливає на точність, є вибір адекватного методу розрахунку.

Для моделі $M/M/m/r = \infty$ (пуассонівський потік заявок або пакетів, експонентний час обслуговування, ємність системи m каналів і нескінченна довжина черги або буфера r) рішення відомо у вигляді *С*-формули Ерланга [1]. Проте існує багато систем, в яких час обслуговування постійний. Наприклад, процес обслуговування заявок керуючими пристроями вузлів комутації або обслуговування пакетів однакової довжини (*ATM*-чарунки). Для моделі $M/D/m/r = \infty$ у випадку вибору з черги в порядку надходження (*FIFO*) рішення отримано Кроммеліном [2]. Однак воно настільки складне в математичному плані, що на практиці для інженерних розрахунків замість точних аналітичних формул застосовуються відповідні діаграми (криві Кроммеліна).

У даній роботі запропонований більш простий метод розрахунку моделі $M/D/m/r = \infty$, в якому для обчислення середньої тривалості очікування заявок у системі використовується *С*-формула Ерланга.

1. Вирішувана задача. Розглядається повнодоступна система з очікуванням ємністю m каналів і необмеженою кількістю місць очікування $r = \infty$. Вибір із черги відбувається в порядку надходження. На вхід системи надходить пуассоновский потік заявок з інтенсивністю Λ. Тривалість обслуговування постійна й дорівнює t.

Необхідно знайти основні характеристики якості обслуговування *QoS*:

– середню тривалість очікування заявок у системі W;
– середню довжину черги Q;
– середню кількість заявок у системі N;
– ймовірність очікування $P_{w>0}$ (дорівнює частці затриманих заявок);
– середню тривалість очікування заявок у черзі t_q.

2. Основні формули. Як відомо, між *C*- та *B*- формулами Ерланга існує наступне розрахункове співвідношення [1]:

$$D_m(\Lambda) = \frac{mE_m(\Lambda)}{m - \Lambda[1 - E_m(\Lambda)]}, \tag{1}$$

де $D_m(\Lambda)$ – імовірність очікування; Λ – інтенсивність навантаження; m – ємність системи; $E_m(\Lambda)$ – табульовані значення *B*-формули Ерланга. Інші характеристики якості обслуговування (*QoS*) визначаються виходячи із їхніх функціональних залежностей між собою.

Середня тривалість очікування заявок у системі W є середнім значенням часу очікування, віднесеним до всіх заявок – затриманих і незатриманих. Якщо ж відома середня тривалість очікування заявок у черзі t_q (тільки затриманих заявок), то для знаходження W треба помножити цю тривалість t_q на ймовірність $P_{w>0}$, що представляє частку затриманих заявок:

$$W = t_q P_{w>0} \,. \tag{2}$$

За формулою Літтла за W одиниць часу очікування в чергу надійде ΛW заявок, отже:

$$Q = \Lambda W \,. \tag{3}$$

Тут W і t_q подано в одиницях середньої тривалості обслуговування t.

Очевидно, що формули (2) і (3) зв'язують функціональною залежністю основні характеристики якості обслуговування. Для моделі $M/M/m/r = \infty$ з експонентним розподілом тривалості обслуговування середня тривалість очікування заявок у системі W_M визначається [1]:

$$W_M = D_m(\Lambda)\frac{1}{m-\Lambda} \,. \tag{4}$$

Значно складніше розрахувати W_D для моделі $M/D/m/r = \infty$. В ній для одержання розподілу часу очікування використаються рівняння станів Фрая, система яких вирішується методом похідних функцій. Такі розрахунки досить складні й тому на практиці використовуються побудовані Кроммеліном сімейства кривих $P_{w>t} = f(t)$. Коли точне теоретичне рішення виявляється складним, то нерідко досить одержати наближений вираз, на якому може ґрунтуватися весь метод розрахунку.

Визнаним методом аналітичних наближень є імітаційне моделювання, яке дозволяє ефективно перевіряти якість використовуваних припущень. За результатами імітаційного моделювання, виконаного згідно зі схемою алгоритму [3], установлено, що для постійної тривалості обслуговування ($t = const$) справедливе співвідношення:

$$W_D = W_M\, 2\left(\frac{m}{m+\Lambda}\right)^2 = D_m(\Lambda)\frac{1}{m-\Lambda}\, 2\left(\frac{m}{m+\Lambda}\right)^2 . \tag{5}$$

Вираз (5) визначає, що для багатоканальної системи при $m = \Lambda$ середня тривалість очікування за постійної й експонентної тривалості обслуговування відрізняються в 2 рази, що відповідає такому ж співвідношенню, встановленому відомою формулою Поллачека-Хінчина для одноканальної системи [1]. Зі зростанням ємності системи m це співвідношення убуває й результати імітаційного моделювання свідчать, що в широкому діапазоні зміни m та Λ точність оцінки середньої тривалості очікування в системі (5) не гірше ±10%.

Ймовірність очікування $P_{w>0}$ може бути визначена з функції розподілу станів системи P_j і в цьому випадку вона дорівнює ймовірності того, що у випадку надходження заявки вона застає всі m канали зайнятими:

$$P_{w>0} = \sum_{j=m}^{\infty} P_j = 1 - \sum_{j=0}^{m-1} P_j \,, \tag{6}$$

де j – стан системи ($0 < j \le m$ – канали, $m < j \le \infty$ – черга).

В умовах необмеженої кількості каналів ($m = \infty$) заявки обслуговуються без втрат. За постійної тривалості обслуговування t, коли немає втрат, властивості потоку звільнень збігаються з властивостями потоку надходження заявок, тому що відбувається тільки зсув у часі на величину t між моментом надходження заявки й моментом закінчення її обслуговування. При цьому стан системи обслуговування повністю визначається властивостями потоку заявок, а функції розподілу кількості заявок у системі P_j і кількості заявок P_i, що надійшли за час t, повністю збігаються. Наприклад, підставивши для розрахунку $P_{w>0}$ в (6) значення, одержувані з розподілу Пуассона

$$P_i = \frac{\Lambda^i}{i!}\cdot e^{-\Lambda} \,, \tag{7}$$

при $m = \infty$ логічно одержуємо $P_{w>0} = 0$.

При кінцевому значенні m і необмеженій кількості місць очікування ($r = \infty$) заявки також обслуговуються без явних втрат. Однак у цьому випадку заявки, що надходять після заняття всіх каналів системи, попадають у чергу на очікування, і у випадку звільнення хоча б одного з m зайнятих каналів відразу подаються із черги на обслуговування. Тепер на канали системи надходять заявки з первинного потоку з інтенсивністю Λ й із черги з інтенсивністю ΛW.

Таким чином, з урахуванням (3) сумарна інтенсивність навантаження на канали системи збільшується до величини

$$\Lambda_\Sigma = \Lambda + Q. \tag{8}$$

Необхідно відзначити, що інтенсивність навантаження Λ_Σ дорівнює середній кількості заявок у системі N.

3. Метод розрахунку. З наведених аргументів і результатів імітаційного моделювання випливає простий метод розрахунку основних характеристик якості обслуговування системи $M/D/m/r = \infty$, який складається з шести кроків:

1. За формулою (1) для заданих Λ й m з застосуванням табульованих значень B-формули Ерланга $E_m(\Lambda)$ розраховується ймовірність очікування $D_m(\Lambda)$ для моделі $M/M/m/r = \infty$.

2. Згідно з формулою (5) для заданих інтенсивностей потоку заявок Λ й ємності системи m визначається середня тривалість очікування заявок у системі W (апроксимація).

3. Згідно з формулою (3) за заданою інтенсивністю навантаження Λ і розрахованому значенню W визначається середня довжина черги Q.

4. Згідно з формулою (8) розраховується сумарна інтенсивність навантаження на канали системи Λ_Σ . Це навантаження дорівнює N.

5. Згідно з формулами (6) і (7) для інтенсивності навантаження розраховується ймовірність очікування $P_{w>0}$.

6. За знайденим значенням W й $P_{w>0}$ за формулою (2) розраховується середня тривалість очікування заявок у черзі t_q.

Слід зазначити, що при m близьких до Λ, тобто в діапазоні ємностей системи $\Lambda < m \le \Lambda + \sqrt{\Lambda}/2$, додатковий потік заявок із черги суттєво збільшує не тільки сумарну інтенсивність навантаження Λ_Σ, але і її сумарну дисперсію σ_Σ^2, що для пуассонівського потоку дорівнює $\sqrt{\Lambda}$. Тому в даному діапазоні ємностей системи для підвищення точності розрахунку $P_{w>0}$ та t_q рекомендується на кроці 5 замість розподілу Пуассона (7) використати розподіл нормального закону (Гаусса) з підставленням (8) Λ_Σ та $\sigma_\Sigma^2 = \sqrt{\Lambda} + Q/2$. Для виключення нескінченної черги обов'язково $m > \Lambda$.

Для оцінки ступеня точності запропонованого методу розрахунку характеристик якості обслуговування в моделі $M/D/m/r = \infty$ проведено серію іспитів імітаційного моделювання й їхні підсумки зіставлені з результатами розрахунків, виконаних для $\Lambda = 50$, 100 й 400 Ерл. Висновки порівняльного аналізу представлені в нижченаведеній таблиці.

Таблиця – Результати імітаційного моделювання

Параметр *QoS*	**Порівняння розрахунків з результатами моделювання:**					
	розрахунок	помилка	розрахунок	помилка	розрахунок	помилка
	$\Lambda = 50$					
	$m = 52$		$m = 55$		$m = 65$	
$P_{w>0}$	* 0,74125	9,9%	0,36357	1,7%	0,02399	-3,1%
Q	9,11268	-0,1%	2,11993	0,4%	0,05797	-5,0%
W	0,18224	-0,1%	0,04239	0,4%	0,00116	-4,9%
t_q	* 0,24510	-9,3%	0,11656	-1,3%	0,04835	-1,9%
	$\Lambda = 100$					
	$m = 103$		$m = 110$		$m = 120$	
$P_{w>0}$	* 0,71672	9,6%	0,20290	-4,1%	0,02918	0,3%
Q	11,55378	1,6%	1,27211	-1,9%	0,09995	-9,0%
W	0,11557	1,6%	0,01273	-1,9%	0,00100	-9,0%
t_q	* 0,16124	-7,2%	0,06275	2,2%	0,03424	-9,3%
	$\Lambda = 400$					
	$m = 405$		$m = 415$		$m = 430$	
$P_{w>0}$	* 0,76355	8,1%	0,30021	-3,9%	0,07492	-2,2%
Q	29,79765	2,6%	4,52354	-8,1%	0,63351	-6,8%
W	0,07448	2,6%	0,01132	-8,1%	0,00158	-6,8%
t_q	* 0,09755	-5,0%	0,03771	-4,4%	0, 02115	-4,7%
*Примітка***.** Значення, відмічені знаком *, розраховані за нормальним законом розподілу						

Як видно з таблиці в широкому діапазоні зміни m і Λ відносна помилка розрахунку всіх характеристик QoS залишається в межах ±10%.

Отже слід зазначити, що й при аналізі систем масового обслуговування зі змінною довжиною пакетів запропонований простий метод розрахунку основних характеристик якості обслуговування може бути надзвичайно корисний, оскільки досить часто експонентне наближення для розподілу часу обслуговування виявляється непридатним. Наприклад, при аналізі комутаторів пакетів слід враховувати наявність у кожного пакета заголовка фіксованої довжини, що вимагає урахування в часі обслуговування деякої постійної добавки, навіть якщо припустити, що розподіл довжин пакетів підпорядковується експонентному розподілу.

Література

1. *Шнепс М.А.* Системы распределения информации. Методы расчета: справ. пособие. / Шнепс М.А. – М.: Связь, 1979. – 344 с., ил.
2. *Crommelin C.D.* Delay probability formulae when holding times are constant / Crommelin C.D. // POEEJ. – 1932. – V. 25. – P. 41–45.
3. *Ложковский А.Г.* Моделирование многоканальной системы обслуживания с организацией очереди / Ложковский А.Г., Салманов Н.С., Вербанов О.В. // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2007. – №3/6(27). – С.72-76.