УДК 681.322

Ткаченко В.Г.
Tkachenco V.G.

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ТИПОВ МОНОТОНННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ СИНТЕЗЕ ЦИФРОВЫХ СХЕМ

ENUMERATION MONOTONOUS BOOLEAN FUNCTION TYPES UPON SYNTHEZIS DIGITAL CIRCUITS

Аннотация. Классификация монотонных булевых функций (МБФ) по типам позволяет значительно сократить их перебор при синтезе цифровых схем. Связь типов и функциональных схем МБФ позволяет рассматривать только те типы, которые отвечают заданным свойствам схемы. Перечисление типов МБФ дает удобный способ перебора МБФ, а также позволяет получить все максимальные типы ранга *n* из пар максимальных типов ранга *n* – 1. Взаимно однозначное соответствие между всеми максимальными типами ранга *n* и определенными парами максимальных типов ранга *n* – 1 доказано в прямой и обратной теоремах 1 и 2. Выведены явные формулы для перечисления максимальных типов веса 2 и рекуррентные формулы для максимальных типов произвольного веса (теорема 3). Проблема Дедекинда перечисления элементов свободной дистрибутивной решетки сведена к более простой задаче перечисления МБФ заданного типа (или соответствующих (0,1)-матриц заданной размерности).

Summary. The monotonous Boolean functions (MBF) classification by types allows us significantly reduce their selection upon synthesis digital circuits. The connection of MBF types and functional schemes allows us notice only those types which meet the set properties of the scheme. MBF types enumeration gives a comfortable method of MBF selection, and also allows to get all maximal types of *n* rank from the pair of maximal types of *n* – 1 rank. One-to-one correspondence between all maximal types of *n* rank and certain pair of maximal types of *n* – 1 rank is proved in direct and reverse theorems 1 and 2. Explicit formulas maximal types of weight 2 enumeration and recurrent formulas for the maximal types of unspecified weight are deduced (theorem 3). The Dedekind's problem of elements enumeration of a free distributive lattice is reduced to more simple problem of MBF enumeration of the defined type (or corresponding (0,1)-matrixes of the set dimension).

В настоящее время значительно расширилась сфера применения цифровых схем. В области телекоммуникаций эти схемы широко используются при сжатии и кодировании передаваемой информации, при цифровой коммутации, в маршрутизаторах и шлюзах. В связи с этим возникает проблема синтеза надежных цифровых схем. В частности это могут быть цифровые схемы, построенные на основе монотонных булевых функций (МБФ). Такие схемы являются более надежными [1], чем схемы, построенные на основе всех булевых функций.

Важным этапом синтеза цифровых схем на основе специальных классов булевых функций является [2] комбинаторный перебор функций заданного класса. Сложность этого этапа зависит от сложности формул или алгоритмов перечисления функций этого класса и количества функций, которые необходимо перебрать. Впервые проблема перечисления МБФ, представленных в виде элементов свободной дистрибутивной решетки, поставлена Дедекиндом. В настоящее время формулы точного перечисления всех МБФ не найдены и известны количество МБФ только до 8 переменных [3]. В [3,4] предложена классификация МБФ на 5 классов и найдены приближенные формулы для перечисления МБФ. В [5] предложена классификация МБФ по типам, основанная на способах описания МБФ [1] и напрямую связанная со структурой функциональных схем МБФ, которая позволяет сократить количество перебираемых функций при синтезе МБФ.

Однако для классификации по типам в литературе неизвестны формулы или алгоритмы перечисления типов.

Целью работы является нахождение рекуррентных формул для перечисления максимальных типов МБФ произвольного ранга на основе доказательства взаимной однозначности максимальных типов ранга *n* и определенных пар максимальных типов ранга *n*–1, что позволяет свести нахождение максимальных типов ранга *n* к нахождению максимальных типов ранга *n*–1.

В [1] определен второй способ описания МБФ (в [1] вместо термина способ описания используется термин представление) в виде минимальных входных наборов или соответствующего семейства подмножеств Шпернера [6]. (Любое семейство подмножеств некоторого множества называется семейством подмножеств Шпернера, если ни одно из подмножеств семейства не содержится ни в каком другом подмножестве этого же семейства.) Каждому семейству подмножеств Шпернера взаимно однозначно соответствует антицепь (множество взаимно несравнимых элементов) в булевой решетке, состоящая из минимальных элементов соответствующей МБФ. В [1] также определен восьмой способ описания МБФ в виде (0,1) матрицы, в которой каждая строка является минимальным входным набором МБФ, причем строки упорядочены по убыванию количества единиц во входном наборе, а строки с равным количеством единиц упорядочены по возрастанию набора как двоичного числа.

Будем говорить, что две МБФ от n переменных принадлежат одному типу, если в соответствующих этим МБФ семействах подмножеств Шпернера для любого i от 0 до n имеется одинаковое число подмножеств мощностью i. В этом случае для каждого i в дизъюнктивных формах [1] этих МБФ содержится одинаковое число конъюнкций, в которые входят i переменных. В [5] определен тип МБФ, как вектор Т = $(a_0, a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$ из n + 1-й компоненты, которые нумеруются слева направо от 0 до n, причем i-я компонента вектора a_i равна числу подмножеств из i элементов в соответствующем данной МБФ семействе подмножеств Шпернера (или числу минимальных входных наборов данной МБФ, лежащих на уровне $n - i$ булевой решетки ранга n). Число n называется рангом типа Т, число v ненулевых компонент – весом типа Т, номер i первой слева ненулевой компоненты – левой границей типа Т, номер j первой справа ненулевой компоненты – правой границей типа Т, сумму m всех компонент типа Т – мощностью типа Т. Тип $T_2 = (a_n, a_{n-1},\ldots,a_i,\ldots,a_0)$ называется обратным к типу $T_1 = (a_0, a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$. Тип Т называется максимальным, если при увеличении любой компоненты соответствующего ему вектора на 1, полученный вектор не соответствует никакому типу. Все типы меньшие, чем некоторый максимальный тип, можно получить, многократно в разном порядке вычитая единицу из компонент этого максимального типа. В [5] также определены матрица распределения типов ранга n и матрица распределения типов ранга n и веса v.

Зная тип МБФ Т ранга n, можно найти МБФ n переменных, имеющую этот тип, следующим образом. Начиная с компоненты a_j, имеющей номер j правой границы типа, построим (0,1) матрицу [6] из m(Т) строк и n столбцов следующим образом. Первые a_j строк являются a_j последовательными двоичными числами, содержащими j единиц, начиная с наименьшего числа такого вида. Следующие a_t строк соответствуют следующей справа ненулевой компоненты a_t на позиции t. Каждая из этих строк является минимальным двоичным числом, содержащим t единиц, которое не покрывается [1] ни одним из двоичных чисел на всех вышележащих строках, начиная с первой. Подобным образом находятся и остальные строки матрицы. Последние a_i строк представляют собой a_i двоичных чисел, содержащих i единиц, где i левая граница типа Т. В результате получен восьмой способ описания [1] функции f, имеющей тип Т, в виде (0,1) матрицы. Назовем построенную таким образом МБФ f модельной МБФ типа Т. Произвольный вектор V из n+1 компоненты является типом ранга n тогда и только тогда, когда по нему можно построить модельную МБФ.

Будем использовать обозначения Т1(n), Т2(n,v), Т3(n,i,j), Т4(n,v,i,j), Т5(n,i), Т6(n,j), Т7(n,v,i), Т8(n,v,j) для того, чтобы подчеркнуть, что тип Т имеет указанный ранг, вес, левую и правую границы. Соответственно R1(n), R2(n,v), R3(n,i,j), R4(n,v,i,j), R5(n,i), R6(n,j), R7(n,v,i), R8(n,v,j) будут обозначать подклассы всех максимальных типов указанного вида, а K1(n), K2(n,v), K3(n,i,j), K4(n,v,i,j), K5(n,i), K6(n,j), K7(n,v,i), K8(n,v,j) количество типов в каждом из этих подклассов.

Для перечисления максимальных типов ранга n введем операцию сдвиг-суммы $\oplus$ векторов. Эта операция определена для векторов одной длины $V_1 = (a_0, a_1,\ldots, a_i,\ldots, a_{n-1})$ и $V_2 = (b_0,b_1,\ldots,b_i,\ldots, b_{n-1})$, если номер первой справа ненулевой компоненты вектора V_1 меньше номера первой слева компоненты вектора V_2. Если указанное условие соблюдается для векторов V_1 и V_2, то назовем такую пару векторов допустимой. Для типов T_1 и T_2, соответствующих векторам V_1 и V_2, имеем $j(T_1) < i(T_2)$, т.е. правая граница типа T_1 меньше левой границы типа T_2. Сдвиг-сумма векторов $V_3 = V_1 \oplus V_2 =$
$= (b_0, a_0 + b_1, \ldots, a_i + b_{i+1}, \ldots, a_{n-2} + b_{n-1}, a_{n-1}) = (c_0, c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n)$ получается следующим образом: к вектору V_1 добавляем нулевую компоненту слева, получая вектор $V_4 = (0, a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1})$, а к типу V_2 добавляем нулевую компоненту справа, получая вектор $V_5 = (b_0, b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_{n-1}, 0)$, затем векторы V_4 и V_5 покомпонентно складываем. Другими словами сдвиг-сумма пары допустимых векторов равна покомпонентной сумме первого слагаемого, сдвинутого на одну позицию вправо, и второго слагаемого. Для сдвиг-суммы пары допустимых типов справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Сдвиг-сумма пары допустимых максимальных типов ранга n – 1 является максимальным типом ранга n.

Доказательство. Пусть T_1 и T_2 пара допустимых максимальных типов ранга n – 1, а $V = T_1 \oplus T_2$ вектор их сдвиг-суммы из n + 1 компоненты. Пусть f_1 и f_2 модельные МБФ типа T_1 и T_2 соответственно, заданные восьмым способом описания в виде (0,1)-матриц M_1 и M_2. Построим (0,1)-

матрицу M_3 следующим образом. Первые $m(T_2)$ строк (0,1)-матрицы M_3 являются строками (0,1)-матрицы M_2, дополненной слева столбцом из нулей, а последние $m(T_1)$ строк являются строками (0,1)-матрицы M_1, дополненной слева столбцом из единиц. Тогда по построению каждая строка (0,1)-матрицы M_3 содержит не больше единиц, чем любая из предыдущих и не покрывается ни одной из них. Следовательно, (0,1)-матрица M_3 является восьмым способом описания некоторой МБФ. По построению M_3 тип этой МБФ равен $T_3 = T_1 \oplus T_2$. Допустим тип $T_3 = (c_0, c_1,\ldots,c_i,\ldots,c_n)$ не является максимальным. Тогда существует тип $T_4 = (c_0, c_1, \ldots, c_i + 1, \ldots, c_n)$, все компоненты которого кроме i-й совпадают с компонентами типа T_3. Существует МБФ типа T_4, (0,1)-матрица M_4 которой отличается от матрицы M_3 добавочной строкой, содержащей i единиц. Если в этой строке на первой позиции 0, то удаляем этот 0 и добавляем строку снизу к M_2. Если же в этой строке на первой позиции 1, то удаляем эту 1 и добавляем строку сверху к M_1. В обоих случаях получаем (0,1)-матрицу M_5, каждая строка которой содержит не больше единиц, чем любая из предыдущих и не покрывается ни одной из них. Значит (0,1)-матрица M_5 является восьмым способом описания некоторой МБФ типа T_5. По построению матрицы M_5 в первом случае $T_4 = T_1 \oplus T_5$ и $T_5 > T_2$, а во втором случае $T_4 = T_5 \oplus T_2$ и $T_5 > T_1$. Следовательно, вопреки условию, получаем, что либо тип T_2, либо тип T_1 не является максимальным. Отсюда следует, что допущение о том, что T_3 не максимально, неверно. Теорема доказана.

Следствие 1. Тип T_3, равный сдвиг-сумме $T_1 \oplus T_2$ имеет следующие свойства. Ранг сдвиг-суммы типов на единицу больше ранга каждого из слагаемых, т.е. $n(T_3) = n(T_1) + 1 = n(T_2) + 1$. Левая граница сдвиг-суммы на единицу больше левой границы первого слагаемого, т.е. $i(T_3) = i(T_1) + 1$. Правая граница сдвиг-суммы равна правой границе второго слагаемого, т.е. $j(T_3) = j(T_2)$. Мощность сдвиг-суммы равна сумме мощностей слагаемых, т.е. $m(T_3) = m(T_1) + m(T_2)$. Для веса сдвиг-суммы возможны два случая. Если $i(T_2) = j(T_1) + 1$, то вес сдвиг-суммы на единицу меньше суммы весов слагаемых, т.е. $v(T_3) = v(T_1) + v(T_2) - 1$. Если $i(T_2) > j(T_1) + 1$, то вес сдвиг-суммы равен сумме весов слагаемых, т.е. $v(T_3) = v(T_1) + v(T_2)$.

Следствие 2. Если к типу ранга $n - 1$ добавить нулевую компоненту слева либо справа, то получим тип ранга n. При этом если тип ранга $n - 1$ отличен от типов (1, 0, …, 0) и (0, …, 0, 1), то полученный тип ранга n не является максимальным.

Следствие 3. Если максимальный тип ранга n может быть представлен в виде сдвиг-суммы двух типов, то оба они являются максимальными типами ранга $n - 1$.

Докажем, что если тип T представим в виде сдвиг-суммы двух типов, то это представление однозначно.

Лемма 1. Все сдвиг-суммы допустимых пар из максимальных типов ранга n различны.

Доказательство. Допустим $T = T_1 \oplus T_2 = T_3 \oplus T_4$ – максимальный тип ранга $n + 1$, а T_1, T_2, T_3 и T_4 – максимальные типы ранга n. По определению допустимых пар $i(T_2) > j(T_1)$ и $i(T_4) > j(T_3)$. Отсюда компоненты с нулевой по $j(T_1)$ типа T_2 и с нулевой по $j(T_3)$ типа T_4 равны 0. Допустим $j(T_3) > j(T_1)$. Тогда по определению сдвиг-суммы каждая k-я компонента типа T, где $1 \le k \le j(T_3)$, равна $k - 1$-й компонента типа T_3. Нулевая компонента типа T равна 0. Если $1 \le k \le j(T_1)$, то k-я компонента типа T равна $k - 1$-й компонента типа T_1. Таким образом компоненты с нулевой по $j(T_1) - 1$ типа T_1 совпадают с соответствующими компонентами типа T_3, а компонента с номером $j(T_1)$ типа T_1 не превышает соответствующую компоненту типа T_3. Но тогда, по определению максимального типа, тип T_1 не является максимальным. Следовательно $j(T_3) = j(T_1)$ и типы T_1 и T_3 могут отличаться только первой справа ненулевой компонентой. Однако максимальные типы не могут отличаться только одной компонентой, поэтому $T_1 = T_3$. По определению сдвиг-суммы это означает, что $T_2 = T_4$. Лемма доказана.

Следствие. Количество максимальных типов ранга n больше или равно количеству допустимых пар типов ранга $n - 1$.

Для максимальных типов веса 1 и 2 теперь можно доказать обратное утверждение.

Лемма 2. Каждый максимальный тип ранга n веса 1 кроме типов (1, 0, …, 0) и (0, …, 0, 1) однозначно представляется в виде сдвиг-суммы пары допустимых максимальных типов ранга $n - 1$.

Доказательство. Согласно свойствам сдвиг-суммы типов тип ранга n веса 1 может быть представлен только в виде сдвиг-суммы типов ранга $n - 1$ веса 1, у которых номера ненулевых компонент отличаются на 1. Всего существует $n - 1$ таких сдвиг-сумм из n максимальных типов ранга $n - 1$ веса 1. Если $T4_1(n - 1, 1, i - 1, i - 1) = (0, \ldots, C_{n-1}^{i-1}, \ldots, 0)$ и $T4_2(n - 1, 1, i, i) = (0, \ldots, C_{n-1}^{i}, \ldots, 0)$, то $T4_1(n - 1, 1, i - 1, i - 1) \oplus T4_2(n - 1, 1, i, i) = (0, \ldots, C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^{i}, \ldots, 0) = (0, \ldots, C_{n}^{i}, \ldots, 0)$ по свойству сочетаний [7]. Все эти сдвиг-суммы различны, так как у них отличается левая граница. По теореме 1 каждая из сдвиг-сумм является максимальным типом ранга n веса 1. Если к ним добавить еще типы (1, 0, …, 0) и (0, …, 0, 1), то получим все типы ранга n веса 1. Лемма доказана.

При доказательстве леммы 3 используем формулы (12) … (14) из [5], обозначая их (5.12) … (5.14).

Лемма 3. Каждый максимальный тип ранга n веса 2 однозначно представляется в виде сдвиг-суммы пары допустимых максимальных типов ранга $n-1$.

Доказательство. Пусть M – семейство подмножеств Шпернера некоторой МБФ, имеющей максимальный тип $T4_3(n, 2, i, j) = (\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots)$. Обозначим через М1 подсемейство этого семейства из подмножеств по i элементов, а через М2 подсемейство из подмножеств по j элементов. Пусть A объединение подмножеств подсемейства М1 мощности $s1$, а B объединение подмножеств подсемейства $M2$ мощности $s2$. Рассмотрим три случая, которые соответствуют формулам (5.12) … (5.14). В первом случае $s2 = n-1$ и $a_j = C^{j}_{p3} = C^{j}_{n-1}$. Тогда $t1 = \max(0, \mathrm{p}3 + i - n) = i - 1$ и из (5.12) получаем $a_i = h(n, j, a_j, i) = C^{i-1}_{p3} = C^{i-1}_{n-1}$. Типы $T4_1(n-1, 1, i-1, i-1) = (\ldots, C^{i-1}_{n-1},\ldots)$ и $T4_2(n-1, 1, j, j) = (\ldots, C^{j}_{n-1},\ldots)$ являются максимальными типами ранга $n-1$ веса 1. Согласно теореме 1 тип $T4_3(n, 2, i, j) = T4_1(n-1, 1, i-1, i-1) \oplus T4_2(n-1, 1, j, j) = (\ldots, C^{i-1}_{n-1}, \ldots, C^{j}_{n-1}, \ldots)$ является максимальным типом ранга n веса 2 при $j-(i-1) > 1$. Однозначность следует из того, что имеется один максимальный тип веса 1 с заданной левой границей (всего имеется $\mathrm{q}1 = \sum_{t=1}^{n-2} t = C^{2}_{n-1}$ сдвиг-сумм такого вида и все они различны, так как отличаются либо левой, либо правой границей). Во втором случае $s2 = n$. Тогда из (5.13) получаем $a_i = h(n, j, a_j, i) = h(n-1, j-1, a_j - C^{j}_{n-1}, i-1)$. Тип $T4_2(n-1, 1, j, j) = (\ldots, C^{j}_{n-1}, \ldots)$ является максимальным типом ранга $n-1$ веса 1. Рассмотрим тип $T4_1(n-1, 2, i-1, j-1) = (\ldots, a_i, \ldots, a_j - C^{j}_{n-1}, \ldots)$. По определению сдвиг-суммы типов $T4_3(n, 2, i, j) = T4_1(n-1, 2, i-1, j-1) \oplus T4_2(n-1, 1, j, j) = (\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots)$. Тип $T4_1(n-1, 2, i-1, j-1)$ является максимальным типом, так как иначе из теоремы 1 следовало бы, что тип $T4_3(n, 2, i, j)$ не максимален. Однозначность следует из того, что всего имеется $K4(n-1, 2, i-1, j-1)$ сдвиг-сумм такого вида и все они различны, так как отличаются только первым слагаемым. В третьем случае $a_j < C^{j}_{n-1}$, так как при $a_j > C^{j}_{n-1}$ имеем $s2 = \varphi 2(j, a_j) = n$, как во втором случае. Тогда $a_i > C^{i-1}_{n-1}$, так как при $a_i \le C^{i-1}_{n-1}$ тип $(\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots)$ не был бы максимальным. Но в этом случае, если обозначить $T4_1(n-1, 1, i-1, i-1) = (\ldots, C^{i-1}_{n-1}, \ldots)$ и $T4_2(n-1, 2, i, j) = (\ldots, a_i - C^{i-1}_{n-1}, \ldots, a_j, \ldots)$, то $T4_3(n, 2, i, j) = T4_1(n-1, 1, i-1, i-1) \oplus T4_2(n-1, 2, j, j) = (\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots)$. Тип $(\ldots, C^{i-1}_{n-1}, \ldots)$ является максимальным типом ранга $n-1$, но тогда из теоремы 1 следует, что тип $(\ldots, a_i - C^{i-1}_{n-1}, \ldots, a_j, \ldots)$ также является максимальным типом ранга $n-1$. Однозначность следует из того, что всего имеется $K4(n-1, 2, i, j)$ сдвиг-сумм такого вида и все они различны, так как отличаются только вторым слагаемым. Лемма доказана.

Следствие 1. Количество максимальных типов ранга n веса 2 при заданных левой и правой границе вычисляется по формуле:

$$K4(n, 2, i, j) = K4(n-1, 2, I-1, j-1) + K4(n-1, 2, i, j) + 1. \qquad (1)$$

ПРИМЕР 1. Используя введенную операцию сдвиг-суммы типов и результаты из примера 3 из [5], найдем максимальные типы ранга 6 веса 2. Имеем: $R4(6, 2, 1, 2) = \{(0,1,10,0,0,0,0), (0,2,6,0,0,0,0), (0, 3, 3, 0, 0, 0, 0), (0, 4, 1, 0,0,0,0)\}$, $R4(6, 2, 1, 3) = \{(0,1,0,10,0,0,0), (0,2,0,4,0,0,0), (0,3,0,1,0,0,0)\}$, $R4(6, 2, 1, 4) = \{(0,1,0,0,5,0,0), (0,2,0,0,1,0,0)\}$, $R4(6, 2, 1, 5) = \{(0,1,0,0,0,1,0)\}$, $R4(6, 2, 2, 3) = \{(0,0,5,10,0,0,0), (0,0,3,11,0,0,0), (0,0,2,13,0,0,0), (0,0,1,16,0,0,0), (0,0,6,7,0,0,0), (0,0,7,5,0,0,0), (0,0,9,4,0,0,0), (0,0,10,2,0,0,0), (0,0,12,1,0,0,0)\}$, $R4(6, 2, 2, 4) = \{(0,0,5,0,5,0,0), (0,0,2,0,6,0,0), (0,0,1,0,9,0,0), (0,6,0,2,0,0,0), (0,0,9,0,1,0,0)\}$, $R4(6, 2, 2, 5) = \{(0,0,5,0,0,1,0), (0,0,1,0,0,2,0)\}$, $R4(6, 2, 3, 4) = \{(0,0,0,10,5,0,0), (0,0,0,7,6,0,0), (0,0,0,5,7,0,0), (0,0,0,4,9,0,0), (0,0,0,2,10,0,0), (0,0,0,1,12,0,0), (0,0,0,11,3,0,0), (0,0,0,13,2,0,0), (0,0,0,16,1,0,0)\}$, $R4(6, 2, 3, 5) = \{(0,0,0,10,0,1,0), (0,0,0,4,0,2,0), (0,0,0,1,0,3,0)\}$, $R4(6, 2, 4, 5) = \{(0,0,0,0,10,1,0), (0,0,0,0,6,2,0), (0,0,0,0,3,3,0), (0,0,0,0,1,4,0)\}$.

ПРИМЕР 2. Используя (1), найдем матрицы распределения типов ранга 6 и 7 веса 2:

	2	3	4	5
1	4	3	2	1
2	0	9	5	2
3	0	0	9	3
4	0	0	0	4

	2	3	4	5	6
1	5	4	3	2	1
2	0	14	9	5	2
3	0	0	19	9	3
4	0	0	0	14	4
5	0	0	0	0	5

Рисунок 1 – Матрицы распределения типов рангов 6 и 7 веса 2

Можно заметить, что если в таблицах (рис. 1) увеличить все ненулевые значения на 1, а затем добавить сверху строку из единиц и справа столбец из единиц, то получается треугольник Паскаля. Докажем это, используя лемму 5.5 из [5].

Лемма 4. Количество максимальных типов ранга n веса 2 при заданных левой и правой границе вычисляется по формуле:

$$K4(n, 2, i, j) = \mathrm{C}_{n+i-j}^{\,i} - 1. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим $n + i - j$ через t и проведем доказательство индукцией по t. Если $t = 2$, то согласно следствию 1 из леммы 5.5 для типов любого ранга $n \geq 3$ существует единственный максимальный тип веса 2 (0, 1, …, 1, 0) вида $(0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$. Другими словами имеем $K4(n, 2, 1, n-1) =$ $= \mathrm{C}_2^1 - 1 = 1$ и лемма верна при $t = 2$. Допустим, что лемма верна для некоторого $t = q - 1$ и докажем, что она верна для $t = q$. Пусть $n + i - j = q$. Согласно лемме 3 $K4(n, 2, i, j) = K4(n-1, 2, i-1, j-1) +$ $+ K4(n-1, 2, i, j) + 1$. Но $(n-1) + (i-1) - (j-1) = (n-1) + i - j = q - 1$ и в соответствии с предположением $K4(n-1, 2, i-1, j-1) = \mathrm{C}_{q-1}^{i-1} - 1$, а $\mathrm{K}4(n-1, 2, i, j) = \mathrm{C}_{q-1}^{i} - 1$. Известно [7], что $\mathrm{C}_{q-1}^{i-1} + \mathrm{C}_{q-1}^{i} = \mathrm{C}_{q}^{i}$. Отсюда $K4(n, 2, i, j) = (\mathrm{C}_{q-1}^{i-1} - 1) + (\mathrm{C}_{q-1}^{i} - 1) + 1 = \mathrm{C}_{q}^{i} - 1 = \mathrm{C}_{n+i-j}^{i} - 1$. Лемма доказана.

Следствие 1. Справедлива формула:

$$K4(n, 2, i, j) = K4(n + i - j + 1, 2, i, i + 1). \tag{3}$$

Следствие 2. Количество максимальных типов ранга n веса 2 при заданной левой границе вычисляется по формуле:

$$K7(n, 2, i) = \sum_{j=i+1}^{n-1}(C_{n+i-j}^{i} - 1) = (\sum_{j=1}^{n-i-1} C_{i+j}^{\,i}) - (n - i - 1) = (C_{n}^{\,i+1} - 1) - (n - i - 1) = C_{n}^{i+1} - (n - i). \tag{4}$$

Следствие 3. Количество максимальных типов ранга n веса 2 при заданной правой границе вычисляется по формуле:

$$K8(n, 2, j) = \sum_{i=1}^{j-1}(C_{n+i-j}^{i} - 1) = (\sum_{i=1}^{j-1} C_{n+i-j}^{\,n-j}) - (j - 1) = (C_{n}^{n-j+1} - 1) - (j - 1) = C_{n}^{\,j-1} - j. \tag{5}$$

Следствие 4. Количество максимальных типов ранга n веса 2 вычисляется по формуле:

$$K2(n, 2) = \sum_{j=2}^{n-1}(C_{n}^{\,j-1} - j) = (\sum_{j=1}^{n-2} C_{n}^{\,j}) - (n-2)(n+1)/2 = (2^n - n - 2) - (n-2)(n+1)/2 = 2^n - C_{n+1}^{2} - 1 \tag{6}$$

При выводе (4 … 6) используется формула суммы сочетаний [7] и бином Ньютона.

ПРИМЕР 3. Проведем некоторые вычисления для таблиц на рис. 1. Сумма второй строки первой таблицы равна: $K7(6, 2, 2) = C_{6}^{2+1} - (6 - 2) = 20 - 4 = 16$. Сумма пятого столбца второй таблицы равна $K8(7, 2, 5) = C_{7}^{5-1} - 5 = 35 - 5 = 30$. Сумма всех элементов первой таблицы равна: $K2(6, 2) = 2^6 - C_{6+1}^{2} - 1 = 64 - 21 - 1 = 42$. Сумма всех элементов второй таблицы равна: $K2(7, 2) =$ $= 2^7 - C_{7+1}^{2} - 1 = 128 - 28 - 1 = 99$.

Докажем для максимальных типов МБФ произвольного веса теорему, подобную лемме 3 для максимальных типов МБФ веса 2.

Теорема 2. Каждый максимальный тип ранга n, кроме типов (1, 0, …, 0) и (0, …, 0, 1), однозначно представляется в виде сдвиг-суммы максимальных типов ранга $n - 1$.

Доказательство. Для конструктивного доказательства теоремы построим алгоритм, который, исследуя компоненты типа справа налево, выделяет из него второе слагаемое сдвиг-суммы. При описании алгоритма удобно считать тип ранга n последовательностью из $n + 1$ числа. Пусть $\mathrm{T3}_1(n, i, j) = (0, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, 0)$ максимальный тип. Выделим из $\mathrm{T3}_1(n, i, j)$ максимальный тип $\mathrm{T3}_3(n-1, t, j) = (0, \ldots, c_t, \ldots, c_j, \ldots, 0)$ ранга $n - 1$ следующим образом. Присвоим $t := j$. Отбросим в типе $\mathrm{T3}_1(n, i, j)$ последнюю компоненту с номером n (она равна 0) и в полученном типе $\mathrm{T3}_3(n-1, t, j)$ обнулим все компоненты, кроме $c_j = a_j$. Если $c_j \geq d_j$, где $\mathrm{T3}_4(n-1, j, j) = (0, \ldots, d_j, \ldots, 0)$

максимальный тип ранга $n-1$ веса 1, то присвоим $c_j := d_j$ и выделение закончено. Иначе присвоим q номер следующей ненулевой компоненты с меньшим номером, устанавливаем $c_q := a_q$ и ищем максимальный тип $T3_4(n-1, q, j)$ ранга $n-1$, для которого $T3_4(n-1, q, j) > T3_3(n-1, q, j)$. Если такой тип найден, то присваиваем $t = q$ и, выбирая следующее значение q, устанавливаем $c_q := a_q$ и повторяем процесс поиска. Согласно следствию 2 из теоремы 1 найдется такое $q \geq i$, что не существует максимального типа $T3_4(n-1, q, j)$ ранга $n-1$, для которого $T3_4(n-1, q, j) > T3_3(n-1, q, j)$. Теперь повторяем поиск, последовательно вычитая из c_q единицу. Для $c_q = 0$ поиск не проводится, так как тип $T3_3(n-1, t, j)$ уже выделен. Если же $c_q > 0$, то присваиваем $t := q$ и завершаем выделение типа $T3_3(n-1, t, j)$. Из способа выделения типа $T3_3(n-1, t, j)$ следует, что его первая ненулевая компонента c_t совпадает с первой ненулевой компонентой d_t некоторого максимального типа $T3_4(n-1, t, j) > T3_3(n-1, t, j)$. Докажем теперь, что тип $T3_3(n-1, t, j) = T3_4(n-1, t, j)$. Пусть $m(T3_1(n, i, j)) = m_1$ и $m(T3_3(n-1, t, j)) = m_3$ мощности этих типов. Построим модельную МБФ f_1 для типа $T3_1(n, i, j)$ в виде (0,1)-матрицы M_1 из m_1 строк и n столбцов. По построению первые m_3 строк относятся к компонентам типа $T3_3(n-1, t, j)$ ранга $n-1$ и поэтому имеют 0 в нулевом столбце. Если выделить эти строки и удалить в них нулевой столбец, то получим модельную МБФ f_3 для типа $T3_3(n-1, t, j)$ в виде (0,1)-матрицы M_3 из m_3 строк и $n-1$ столбцов. Допустим одна из последующих $m_1 - m_3$ строк матрицы M_1, обозначим ее А, имеет 0 в нулевом столбце. Это не может быть строка, содержащая t единиц, так как иначе по построению типа $T3_3(n-1, t, j)$ она бы входила в начальные m_1 строк. Если строка А содержит r единиц, то рассмотрим отдельно случаи, когда $c_t < a_t$ и когда $c_t = a_t$. В первом случае, заменяя в ней $t-r$ нулей единицами (кроме самого первого 0), получим строку В, содержащую t единиц и покрывающую строку А. Поскольку строка А не покрывается ни одной из начальных m_1 строк, то и строка В не покрывается этими строками. Удалим в строке В первый 0 и добавим эту строку снизу к матрице M_3, получая матрицу M_5. Эта матрица является модельной МБФ f_5 для типа $T3_5(n-1, t, j)$, отличающегося от типа $T3_3(n-1, t, j)$ только тем, что его компонента с номером t равна $c_t + 1$. Значит, существует максимальный тип $T3_6(n-1, t, j)$ ранга $n-1$, который больше типа $T3_5(n-1, t, j)$ (а значит и типа $T3_3(n-1, t, j)$) и у которого компонента с номером t больше c_t. Однако из способа выделения типа $T3_3(n-1, t, j)$ следует, что такого типа не существует. Это противоречие доказывает, что нижние $m_2 = m_1 - m_3$ строк матрицы M_1 содержат 1 в нулевом столбце. Во втором случае находим номер q следующей ненулевой компоненты с меньшим номером в типе $T3_1(n, i, j)$ и заменяя $q - r$ нулей единицами в строке А (кроме самого первого 0), получим строку В, содержащую q единиц и покрывающую строку А. Поскольку строка А не покрывается ни одной из начальных m_1 строк, то и строка В не покрывается этими строками. Удалим в строке В первый 0 и добавим эту строку снизу к матрице M_3, получая матрицу M_5. Эта матрица является модельной МБФ f_5 для типа $T3_5(n-1, q, j)$, отличающегося от типа $T3_3(n-1, t, j)$ только тем, что его компонента с номером q равна 1. Но тогда при выделении типа $T3_3(n-1, t, j)$ нужно было в качестве t взять значение q. Значит и в этом случае нижние $m_2 = m_1 - m_3$ строк матрицы M_1 должны начинаться с 1. Образуем из этих m_2 строк (0,1)-матрицу M_2, удалив из них нулевой столбец. Эта матрица является модельной МБФ f_2 для некоторого типа $T3_2(n-1, i-1, t-1)$ в первом случае и $T3_2(n-1, i-1, q-1)$ во втором случае. В обоих случаях правая граница этого типа меньше левой границы типа $T3_3(n-1, t, j)$. Соответственно максимальный тип $T3_1(n, i, j)$ в первом случае представляется в виде сдвиг-суммы $T3_2(n-1, i-1, t-1) \oplus T3_3(n-1, t, j)$, а во втором случае в виде сдвиг-суммы $T3_2(n-1, i-1, q-1) \oplus T3_3(n-1, t, j)$. Типы $T3_2(n-1, i-1, t-1)$, $T3_2(n-1, i-1, q-1)$ и $T3_3(n-1, t, j)$ являются максимальными согласно следствию 3 теоремы 1. Однозначность представления типа $T3_1(n, i, j)$ следует из леммы 1. Теорема доказана.

Следствие 1. Так как все сдвиг-суммы максимальных типов ранга $n-1$ различны, то количество максимальных типов ранга n равно количеству пар допустимых максимальных типов ранга $n-1$.

Следствие 2. Если тип T_1 ранга n не является максимальным, то его представление в виде сдвиг-суммы $T_2 \oplus T_3$ типов ранга $n-1$ не однозначно.

Лемма 5. Для заданных левой и правой границ типа, количество максимальных типов ранга n вычисляется по формуле:

$$K3(n, i, j) = \sum_{q=i}^{j} K3\,(n-1, i-1, q-1)\left(\sum_{t=q}^{j} K3\ (n-1, t, j)\right). \tag{7}$$

Доказательство. Согласно следствию 1 теоремы 2 первые слагаемые с заданной правой границей умножаем на сумму вторых слагаемых с допустимыми левыми границами. Лемма доказана.

Следствие 1. Каждый элемент $a_{i,j}$ матрицы А распределения типов ранга n можно получить из элементов матрицы В распределения типов ранга $n-1$ как сумму произведений элементов $b_{i\text{-}1,\text{p}}$ ($i-1 \le$ p $\le j-1$) строки $I-1$ матрицы В на сумму элементов $b_{t,j}$ ($q+1 \le t \le j$) столбца j этой матрицы.

ПРИМЕР 4. Используя (7), найдем матрицы распределения типов рангов 6 и 7, для компактности исключив первую и последнюю строку, а также первый и последний столбец:

	1	2	3	4	5
1	1	4	10	9	1
2	0	1	9	24	9
3	0	0	1	9	10
4	0	0	0	1	4
5	0	0	0	0	1

	1	2	3	4	5	6
1	1	5	20	43	25	1
2	0	1	14	84	143	25
3	0	0	1	19	84	43
4	0	0	0	1	14	20
5	0	0	0	0	1	5
6	0	0	0	0	0	1

Рисунок 2 – Матрицы распределения типов рангов 6 и 7

Теорема 3. Количество максимальных типов ранга n вычисляется по формуле:

$$K1(n) = 2K1(n-1) - 1 + \sum_{q=2}^{n-2}\Big(\sum_{i=2}^{q} K3\,(n-1, i-1, q-1)\Big(\sum_{t=q}^{n-2}\ \sum_{j=t}^{n-2} K3\,(n-1, t, j)\Big)\Big). \tag{8}$$

Доказательство. Количество максимальных типов веса 1 $K2(n, 1) = n + 1$, а для остальных максимальных типов имеем $i < j$. Тогда:

$$K1(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n-2}\ \sum_{j=i+1}^{n-1} K3\,(n, i, j) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n-2}\ \sum_{j=i+1}^{n-1}\ \sum_{q=i}^{j} K3\,(n-1, i-1, q-1)\Big(\sum_{t=q}^{j} K3\ \ (n-1, t, j)\Big). \tag{9}$$

Выделим из (9) суммы $\sum_{i=2}^{n-2}\ \sum_{q=i}^{n-1} K3\,(n-1, i-1, q-1)$ для $j = n-1$ и $\sum_{j=2}^{n-1}\ \sum_{t=1}^{j} K3\,(n-1, t, j)$ для $i = 1$.

Каждая из этих сумм равна $K1(n-1) - 2$, причем элемент $K3(n-1, 1, n-2) = 1$ входит в обе суммы. Выполним, кроме того, в (9) перестановку сумм по q и по j. В результате получим:

$$K1(n) = n - 4 + 2K1(n-1) - (n-3) + \sum_{i=2}^{n-3}\ \sum_{q=i}^{n-2} K3\,(n-1, i-1, q-1)\Big(\sum_{j=q}^{n-2}\ \sum_{t=q}^{j} K3\ \ (n-1, t, j)\Big). \tag{10}$$

Вычитание $n-3$ выполняется из-за появления в (10) $n-3$ дополнительных произведений вида $K3(n-1, i-1, i-1)K3(n-1, i, i)$, каждое из которых равно 1. Выполняя в (10) перестановку сумм по q и по i и группируя сумму по i в скобках, получим:

$$K1(n) = 2K1(n-1) - 1 + \sum_{q=2}^{n-2}\Big(\sum_{i=2}^{q} K3\,(n-1, i-1, q-1)\Big)\Big(\sum_{j=q}^{n-2}\ \sum_{t=q}^{j} K3\ \ (n-1, t, j)\Big). \tag{11}$$

Выполняя в (11) перестановку сумм по t и по j, получим (8). Теорема доказана.

Следствие 1. Сумму всех элементов $a_{i,j}$ матрицы А распределения типов ранга n можно получить из элементов матрицы В распределения типов ранга $n-1$, добавляя к удвоенной сумме всех элементов матрицы В, уменьшенной на 1, сумму произведений суммы элементов $b_{i,\text{p}}$ ($1 \le i \le p$) столбца р ($1 \le p \le n-3$) матрицы В на сумму элементов $b_{t,j}$ ($p+1 \le t \le n-2$, $t \le j \le n-2$) этой матрицы.

ПРИМЕР 5. Используя (8) и матрицу распределения типов ранга 6 (рис. 2), найдем количество максимальных типов ранга 7. Так как $K1(6) = 96$, то имеем: $K1(7) = 2 \cdot 96 - 1 + 1(1 + 9 + 24 + 9 + 1 + +9 + 10 + 1 + 4 + 1) + (4 + 1)(1 + 9 + 10 + 1 + 4 + 1) + (10 + 9 + 1)(1 + 4 + 1) + (9 + 24 + 9 + 1)1 = 191 + + 1 \cdot 69 + 5 \cdot 26 + 20 \cdot 6 + 43 \cdot 1 = 191 + 69 + 130 + 120 + 43 = 553$. Теперь, используя (7), найдем элемент на пересечении строки 2 и столбца 5 матрицы распределения типов ранга 7: $K3(7,\ 2,\ 5) = 1(9 + 10 + 4 + 1) + 4(10 + 4 + 1) + 10(4 + 1) + 9 \cdot 1 = 1 \cdot 24 + 4 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 9 \cdot 1 = 24 + 60 + 50 + 9 = 143$.

Лемма 6. Для заданных левой и правой границ типа количество максимальных типов ранга n веса v вычисляется по формуле:

$$K4(n, v, i, j) = K4(n-1, v, i-1, j-1) + K4(n-1, v, i, j) + \sum_{q=i+v-2}^{j-1} K4(n-1, v-1, i-1, q-1) + \sum_{t=i+1}^{j-v+2} K4(n-1, v-1, t, j) + \sum_{p=2}^{v-2} \sum_{q=i+p-1}^{j-v+p} \sum_{t=q+1}^{j-v+p+1} K4(n-1, p, i-1, q-1) K4(n-1, v-p, t, j) + \sum_{p=2}^{v-1} \sum_{q=i+p-1}^{j-v+p} K4(n-1, p, i-1, q-1) K4(n-1, v-p+1, q+1, j). \qquad (12)$$

Доказательство. Как и в лемме 5 вывод формулы основан на использовании следствия 1 теоремы 2. Нужно найти допустимые пары максимальных типов ранга n–1, сдвиг-суммы которых равны максимальным типам ранга n веса v. Первое и третье слагаемое формулы соответствуют случаю, когда второе слагаемое сдвиг-суммы имеет вес 1, а второе и четвертое слагаемое формулы случаю, когда первое слагаемое сдвиг-суммы имеет вес 1. Для первого, второго и шестого слагаемых формулы, кроме того, левая граница второго слагаемого сдвиг-суммы на 1 больше правой границы первого слагаемого сдвиг-суммы. Лемма доказана.

Если вес типа равен 3, то пятое слагаемое формулы (12) отсутствует, а третье, четвертое и шестое можно объединить. Если затем применить (3), то получим:

$$K4(n, 3, i, j) = K4(n-1, 3, i-1, j-1) + K4(n-1, 3, i, j) + i - j + 1 + \sum_{q=i}^{j-2} C_{n+i-q-2}^{i-1} C_{n+q-j}^{q+1}. \qquad (13)$$

ПРИМЕР 6. Используя (12) и (13), найдем матрицы распределения типов ранга 6 весов 3 и 4, а также ранга 7 веса 4.

	3	4	5
1	7	5	0
2	0	19	5
3	0	0	7

	4	5
1	2	0
2	0	2

	4	5	6
1	21	12	0
2	0	90	12
3	0	0	21

Рисунок 3 – Матрицы распределения типов ранга 6 весов 3 и 4, а также ранга 7 веса 4

Можно заметить, что правая таблица на рис. 2 из [5], за исключением номеров столбцов, совпадает со средней таблицей на рис. 3. Можно доказать лемму.

Лемма 7. Для любого ранга $n \geq 5$ существует всего 4 максимальные типа максимального веса, равного n – 2. Два из этих типов имеют левую границу 1, а правую n – 2, а два другие имеют границы 2 и n – 1.

Доказательство. Ранее было показано, что типы (1,0,…,0), (0,…,0,1) и (0,1,0,…,0,1,0) являются максимальными для любого ранга n. Следовательно, не существует типа ранга n с весом больше n – 2. Для ранга 5 существует 4 максимальные типа веса 3. При этом типы (0,1,1,2,0,0) и (0,1,3,1,0,0) имеют границы 1 и 3, а типы (0,0,2,1,1,0) и (0,0,1,3,1,0) – 2 и 4. Максимальные типы ранга 6 веса 4 можно образовать, беря в качестве первого слагаемого сдвиг-суммы один из первых двух типов, а в качестве второго тип (0,…,0,1), либо беря в качестве первого слагаемого тип (1,0,…,0), а в качестве второго слагаемого один из вторых двух типов. Первые две сдвиг-суммы (0,0,1,1,2,1,0) и (0,0,1,3,1,1,0) будут иметь границы 2 и 5, а вторые две (0,1,2,1,1,0,0) и (0,1,1,3,1,0,0) – 1 и 4. Других вариантов получения максимальных типов ранга 6 веса 4 нет, т.е. всего имеется 4 таких типа. То же самое получается для любого ранга n. Лемма доказана.

Типы МБФ напрямую связаны с функциональными схемами МБФ. В [1] показано, что каждая МБФ представима в виде дизъюнктивной формы (четвертый способ описания МБФ), т.е в виде дизъюнкции конъюнкций. При этом каждая конъюнкция взаимно однозначно соответствует некоторому минимальному элементу МБФ и зависит от стольких переменных, сколько элементов имеется в соответствующем подмножестве из семейства подмножеств Шпернера (второй способ описания МБФ). Такая дизъюнктивная форма является минимальной, так как ни одну конъюнкцию (или соответствующий минимальный элемент МБФ) исключить из этой формы нельзя. Пусть некоторая МБФ f от n переменных имеет тип Т4(n, v, i, j) ранга n веса v, с левой границей i и правой границей j. Тогда дизъюнктивная форма f зависит от $k \leq n$ переменных, так как часть из n переменных могут быть фиктивными. По количеству переменных в одной конъюнкции в этой форме содержатся конъюнкции v видов. При этом минимальная конъюнкция зависит от i переменных, а максимальная от j переменных. Всего в дизъюнктивной форме имеется m(Т4(n, v, i, j)) конъюнкций, где m – мощность типа Т4(n, v, i, j), т.е. сумма всех его компонент.

На функциональной схеме каждой конъюнкции соответствует элемент И, а каждой дизъюнкции – элемент ИЛИ. Всего для построения функциональной схемы МБФ f надо m элементов И по количеству входов v видов. Элемент И с наименьшим количеством входов имеет i входов, а с наибольшим – j входов. Количество элементов ИЛИ равно одному, если имеется элемент ИЛИ с m входами. Если же элемент ИЛИ максимально может иметь q входов, то требуется $(q-1) : m + 2$ элементов ИЛИ, где $(q-1) : m$ – целая часть от деления $q-1$ на m.

При синтезе логической функции f обычно используют неполное задание функции, т.е. известны некоторые входные наборы, на которых f принимает значение 1 и некоторые входные наборы, на которых f принимает значение 0, а на остальных входных наборах значение f произвольно. При использовании типов можно дополнительно задать количество возможных видов элементов И, а также минимальное и максимальное количество входов у этих элементов. Например, пусть требуется синтезировать МБФ f от 7 переменных, используя только элементы И с 3 и 4 входами. Тогда сначала находим K4(7, 2, 3, 4) = 19 максимальных типов из подкласса R4(7, 2, 3, 4), по ним находим все 393 типа меньших или равных этим максимальным. Для каждого типа Т4(7, 2, 3, 4) = = (0, 0, 0, a_3, a_4, 0, 0, 0) находим возможные (0,1)-матрицы, содержащие $a_3 + a_4$ строк и 7 столбцов. В этих матрицах верхние a_4 строк содержат по 4 единицы и упорядочены по возрастанию двоичного кода строки. Нижние a_3 строк содержат по 3 единицы и также упорядочены по возрастанию двоичного кода строки. Основным свойством этих матриц является то, что ни одна строка не покрывается другой строкой. Поиск заканчивается как только будет найдена (0,1)-матрица, которая в качестве строк содержит все входные наборы из тех, на которых функция f равна 1, и не содержит в качестве строки ни одного входного набора из тех, на которых функция f равна 0. В большинстве случаев нет необходимости строить все возможные (0,1) матрицы и находить все типы, так как поиск заканчивается раньше.

Если при синтезе МБФ f требуется построить функциональную схему для конъюнктивной формы (пятый способ описания МБФ), то вместо минимальных элементов f, рассматриваются ее максимальные элементы [1]. При этом типу, найденному по минимальным элементам МБФ f, соответствует обратный тип по максимальным элементам для двойственной функции. Так как, в приведенном выше примере все обратные типы также принадлежат подклассу R4(7, 2, 3, 4), то нужно находить те же самые (0,1)-матрицы. Отличие заключается в том, что в этом случае искомая (0,1)-матрица должна в качестве строк содержать все входные наборы из тех, на которых функция f равна 0, и не содержать в качестве строки ни одного входного набора из тех, на которых функция f равна 1.

В общем случае при синтезе МБФ можно искать как дизъюнктивную форму, так и конъюнктивную форму, а затем выбирать ту из них, которая требует для реализации меньше элементов. В любом случае перебор логических функций значительно сокращается. Так в случае 4 переменных максимально надо перебрать 266 МБФ вместо 2^{16} = 65536 всех булевых функций от 4 переменных. Причем с ростом числа переменных перебор по сравнению с перебором всех функций все более сокращается. Например, для 5 переменных достаточно перебрать несколько тысяч МБФ вместо
2^{32} = 4 294 967 267 булевых функций. Использование при синтезе МБФ не всех типов, а только отдельных классов (в связи с ограничениями на элементную базу) еще более сокращает перебор. Конечно, для синтеза произвольных логических функций существуют специальные методы для сокращения перебора, например, использование карт Карно. Однако применение этих методов резко усложняется с увеличением числа переменных. Главным же препятствием к их применению в рассматриваемом случае является то, что они не обеспечивают нахождение МБФ.

Для автоматизации поиска, как максимальных типов, так и всех типов заданного ранга была разработана специальная программа в среде программирования Delphi. Она позволяет находить максимальные типы или все типы заданного ранга или подкласса. При этом используется введенная выше операция сдвиг-суммы. Кроме того, используя выражения (21), (22 и (26), она позволяет находить количество максимальных типов, не находя самих типов. В табл. 1 приведены результаты работы этой программы по нахождению количества $K1(n)$ максимальных типов и количества всех типов $P1(n)$ заданного ранга n при изменении n от 1 до 10.

Таблица 1 – Количества максимальных типов и всех типов рангов от 1 до 10

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K1(n)$	2	3	5	10	26	96	553	5461	100709	3718354
$P1(n)$	2	4	9	25	95	552	5460	100708	3718353	289725508

Как можно заметить $P1(n) = K1(n + 1) - 1$. Если рассматривать также тип, все компоненты которого равны 0, то можно предположить гипотезу, что количество максимальных типов ранга n равно количеству всех типов ранга $n - 1$. Доказательство этой гипотезы имеет, как теоретическое, так и практическое значение. Тогда как время вычисления $K1(n)$ даже при $n = 10$ не превышает нескольких миллисекунд, время вычисления $P1(n)$ для значений $n = 8$, 9 и 10 составляет 1 секунда, 10 минут и более 10 часов соответственно, несмотря на обеспечение оптимального алгоритма для этого процесса. Установление соответствия между всеми типами ранга n и максимальными типами ранга n-1 либо между всеми типами ранга n и допустимыми парами максимальных типов этого же ранга позволит резко уменьшить время нахождения $P1(n)$.

В заключение отметим следующее. Проблема Дедекинда перечисления МБФ, представленных в виде элементов свободной дистрибутивной решетки, сведена к более простой задаче перечисления (0,1)-матриц с заданным количеством строк, столбцов и единиц в каждой строке. Разработана программа, которая достаточно быстро перечисляет все типы до ранга 9 включительно. Нерешенными задачами остаются: доказательство приведенной выше гипотезы (и резкое увеличение скорости вычисления типов) и нахождение оптимальных алгоритмов перебора (0,1)-матриц и выражений для их количества, а значит и полное решение проблемы Дедекинда.

Литература

1. *Ткаченко В.Г.* Отказы цифровых схем.и представления монотонных булевых функций / Ткаченко В.Г. // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – Одеса, 2006. – №2. – С. 54 – 69.
2. *Самофалов А.Г.* Комбинаторный подход к синтезу специальных классов булевых функций / А.Г. Самофалов, А.П. Марковский// Электронное моделирование, 2004. – Т26. – №3. – С. 27– 40.
3. *Коршунов А.Д.* Монотонные булевы функции / Коршунов А.Д. // УМН, 2003, 58:5. – С. 89 –162 (Т. 58, вып. 5).
4. *Коршунов А.Д.* О числе и строении монотонных булевых функций // Дискретная математика и ее приложения: Сб. лекций по дискретной математике и ее приложениям / Коршунов А.Д. – М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001. – С.34 –58.
5. *Ткаченко В.Г.* Классификация монотонных булевых функций при синтезе цифровых схем / Ткаченко В.Г. // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – Одеса, 2008. – №1. – С. 35-43.
6. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики / Сачков В.Н. – М.: Наука, 1982. – 384 с.
7. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика / Виленкин Н.Я. – М.: Наука, 1969. – 328 с.