УДК 519.55 *Балашов В.А., Плотников В.М.*
Balashov V.A., Plotnikov V.M.

ВЕЙВЛЕТ-МОДЕЛИ В МЕТОДЕ РИТЦА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

RITZ MODELING OF THE NAVIER-STOXES EQUATION USING HARMONIC WAVELETS

Аннотация. Рассмотрено приложение периодических гармонических вейвлетов для создания вейвлета-Ритца решения модельного одномерного случая уравнения Навье-Стокса.
Summary. Representation Ritz modeling of the Navier-Stoxes equation using harmonic wavelets.

В настоящее время использование вейвлетов весьма популярно при разработке численных схем для решений дифференциальных уравнений в частных производных. В предлагаемой работе используются комплексные гармонические вейвлеты как базисные функции в одном из методов (например, Ритца) для решений модельного уравнения Навье-Стокса с постоянными коэффициентами [3]. Хотя, как известно, гармонические вейвлеты плохо локализованы в пространстве (убывают приблизительно как x^{-1} на бесконечности), они не перекрываются в спектральном пространстве, что делает их особенно полезными при изучении локальных взаимодействий в волновом пространстве.

Целью работы является доказательство перспективности использования базиса гармонических вейвлетов для известного в математической физике метода Ритца на примере решения дифференциального уравнения Навье-Стокса в частных производных.

Рассмотрим комплекснозначный базис Литтлвуда-Пэйлих [1, 2], определенный при помощи материнского вейвлета [3,5]:

$$\psi(x) = \frac{\exp(4i\pi x) - \exp(2i\pi x)}{2i\pi x}. \tag{1}$$

Ортонормированный базис можно, например, сконструировать $\{\psi(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}$ сдвигом и расширением материнского вейвлета, где j – масштабный коэффициент, а k – коэффициент сдвига. В итоге базис имеет вид:

$$\psi_k^j(x) = \frac{\exp(i\omega k/2^j)}{2\pi \times 2^{j/2}} \tag{2}$$

для $2\pi \times 2^j \leq \omega 2\pi \times 2^{j+1}$ и равен 0 в других случаях.

Важнейшим шагом в конструировании алгоритма является периодизация вейвлета. Периодические вейвлеты могут быть сконструированы при помощи стандартной процедуры:

$$\psi_k^{j\ per}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_k^j(x-l) \tag{3}$$

на единичном отрезке. При этом все свойства вейвлетов переходят на их периодические копии [4].

Из (3) получаем периодические вейвлеты:

$$\psi_k^{j\ per}(x) = \frac{1}{2^{j.2}} \sum_{m_j=2^j}^{2^{j+1}-1} \exp[-2i\pi m_j(x - k/2^j)], \tag{4}$$

где $j = 0,\ldots, r$ и $k = 0, \ldots, 2^j - 1$.

Рис. 1 изображает действительную и мнимую части периодических гармонических вейвлетов.

Интересно заметить, что (4) имеет вид, подобный Фурье-преобразованию и поэтому для него, как известно, справедливы большинство свойств преобразования Фурье. Определим дискретное вейвлет-преобразование как $\{f_l\}$:

$$f_l = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_k^j \psi_{k,l}^j, \tag{5}$$

где $\psi_{k,l}^j = \psi_k^j(l/N)$ – дискретный 1-периодический гармонический вейвлет (символ «per» отброшен для удобства).

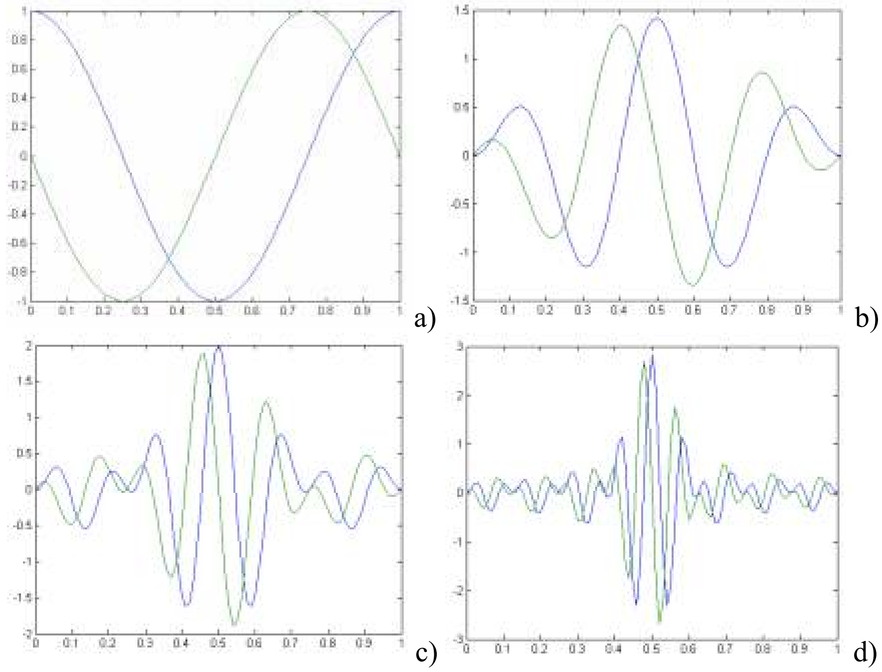

Рисунок 1 – Действительная и мнимая части периодических гармонических вейвлетов
a) $\psi_0^0(x)$, b) $\psi_1^1(x)$, c) $\psi_2^2(x)$, d) $\psi_4^3(x)$

Тогда коэффициенты разложения, соответственно, имеют вид

$$a_s = \sum_{k=0}^{2^j-1} F_{2^j+k} \exp(2i\pi ks/2^j), \quad s = 2^j,...,2^{j+1}-1, \tag{6}$$

где $\{F\}$ – коэффициенты Фурье для $\{f\}$.

Заметим, что $a_{N-s} = \tilde{a}_s$, кроме случаев a_0 и $a_{N/2}$, которые всегда являются действительными величинами. Это свойство позволяет разработать эффективный и относительно простой параллельный алгоритм для подсчета коэффициентов вейвлетов.

Используем гармонические вейвлеты для модельного уравнения Навье-Стокса с постоянными коэффициентами и периодическими граничными условиями, определенными $\forall x \in [0,1]$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{7}$$

где $u(x, t)$ – скорость, а ν – кинематическая вязкость, с начальными условиями

$$u(x, 0) = \sin 2px. \tag{7'}$$

Используя стандартный подход в методе Ритца, представляя $u(x, t)$ в виде амплитуды зависящей от времени, и базиса, зависящего от пространственной переменной, находим решение (7) в форме:

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{2^j-1} a_k^j(t)\psi_k^j(x), \tag{8}$$

где

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\tilde{g}(x)dx. \tag{9}$$

Здесь тильда обозначает комплексное сопряжение.

Подставляя (8) в (7), используя (9), получаем следующую систему уравнений, которая выражает конечно-пространственное отображение уравнения Навье-Стокса на пространство вейвлетов, т.е.

$$\frac{d}{dt}a_s^r - \nu\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{2^j-1} L_{ks}^{jr} a_k^j(t) + \sum_{j=0}^{r}\sum_{p=0}^{r}\sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{q=0}^{2^p-1} N_{kqs}^{jpr} a_k^j a_q^p = 0, \tag{10}$$

где,
$$L_{ks}^{jr} = \left\langle \frac{d^2}{dx^2}\psi_k^j, \psi_s^r \right\rangle \tag{11}$$

$$L_{ks}^{jr} = -\frac{4\pi^2}{2^{(j+r)/2}} \sum_{m_j=2^j}^{2^{j+1}-1} \sum_{m_r=2^r}^{2^{r+1}-1} m_j^2 \cdot \exp\left[2i\pi\left(\frac{m_j k}{2^j} - \frac{m_r s}{2^r}\right)\right]\delta_{m_j, m_r}, \tag{12}$$

и
$$N_{kqs}^{jpr} = \left\langle \psi_k^j \frac{d}{dx}\psi_q^p, \psi_s^r \right\rangle, \tag{13}$$

$$N_{kqs}^{jpr} = -\frac{2i\pi}{2^{(j+p+r)/2}} \sum_{m_j=2^j}^{2^{j+1}-1} \sum_{m_p=2^p}^{2^{p+1}-1} \sum_{m_r=2^r}^{2^{r+1}-1} m_p \cdot \exp\left[2i\pi\left(\frac{m_j k}{2^j} - \frac{m_p q}{2^p} - \frac{m_r s}{2^r}\right)\right]\delta_{m_j+m_p, m_r}, \tag{14}$$

есть линейный и нелинейный коэффициенты соответственно, δ_{m_n} является символом Кронекера.

Чтобы проиллюстрировать предложенную схему, получим вейвлет Ритца для решения уравнения Навье-Стокса при $r = 3$ и различных v, используя периодические гармонические вейвлеты на $x \in [0,1]$.

Для решения (10) применяется стандартный многошаговый метод Адамса. Начальные условия (7’) также раскладываются по периодическим гармоническим вейвлетам для использования их при решении уравнения (10). Интервал изменения временной переменной t взят равным [0, 1]. При решении (10) получен набор a_k^j, которые потом были подставлены в (8). В результате было получено решение $u(x, t)$, изображенное на рис. 2 для значений $v = 0{,}025$.

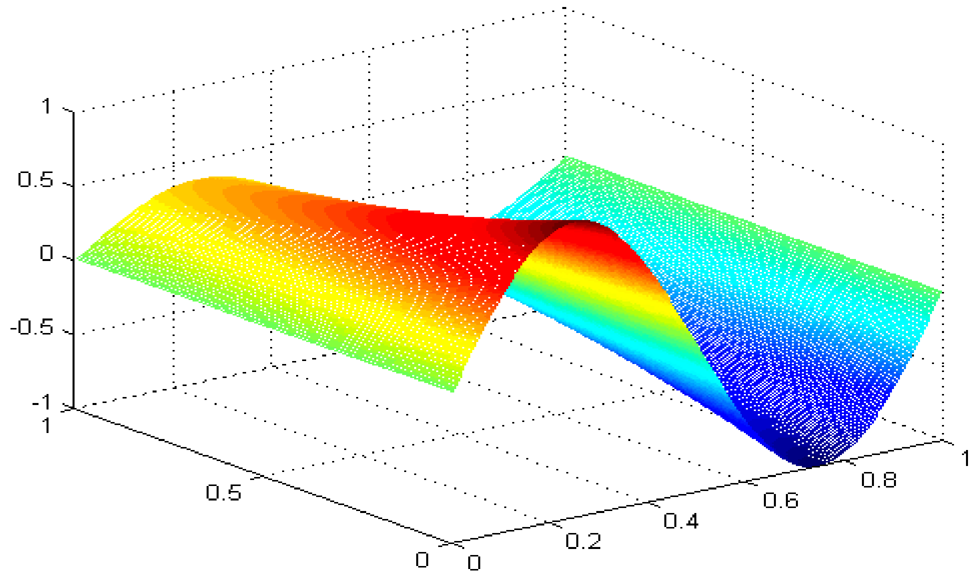

Рисунок 2 – Вейвлет Ритца решения уравнения Навье-Стокса для $v = 0{,}025$

Для сравнения было также получено решение для $v = 0{,}0025$, представленное на рис. 3.

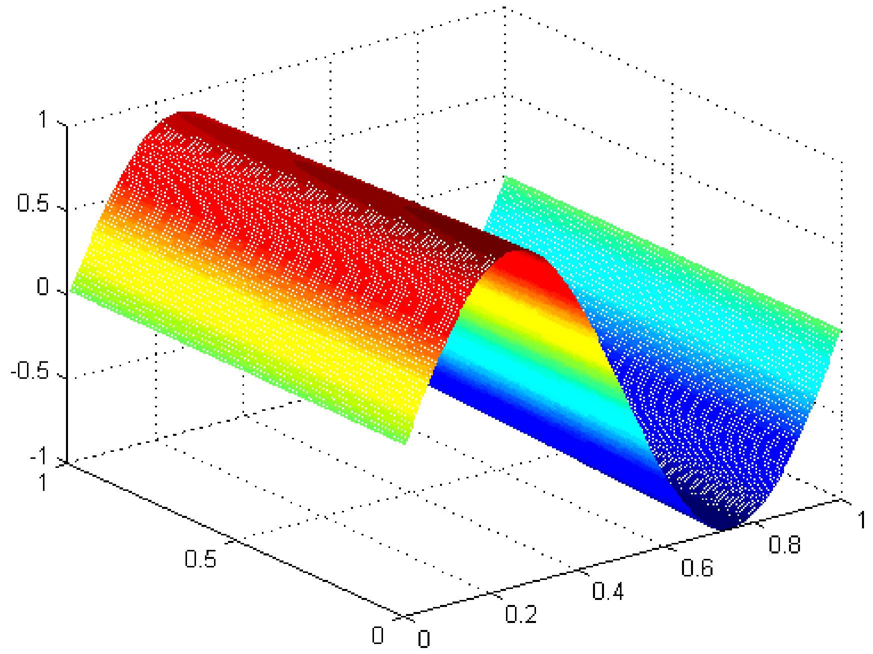

Рисунок 3 – Вейвлет Ритца решения уравнения Навье-Стокса для $v = 0{,}0025$

Явно заметно уменьшение влияния второй производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в решении (7).

Все численные расчеты проводились в среде Matlab 6.1 с использованием стандартных средств.

Полученные в предлагаемой работе результаты по приложению периодических гармонических вейвлетов для создания вейвлета Ритца решения модельного одномерного случая уравнения Навье-Стокса с периодическими начальными условиями не противоречат известным решениям, требущим сравнительно более значительных затрат.

Есть все основания предполагать, что в перспективе гармонические вейвлеты могут быть полезными для получения аналитических приближений общего уравнения Навье-Стокса.

Более подробное обоснование преимуществ гармонических вейвлетов в сравнении с ранее известными алгоритмами подобных расчетов может быть получено при переходе от одномерной схемы к многомерной. Такая работа предполагается авторами в перспективе.

Литература

1. *Muniandy S.V., Moroz I.M.* Discrete Wavelet Transforms: Theory and Implementation. Physics letters A 235, (1997). – 123 p.
2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам, 2001. – 67 с.
3. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Ритца-Галеркина,1988. – 220 с.
4. *Edwards T.* Discrete Wavelet Transforms: Theory and Implementation, 1992. – 178 p.
5. *Donoho D.* “Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities, and Spectra from Indirect and Noisy Data”, Different Perspectives on Wavelets, Proceeding on Symposia in Applied Mathematics, – Vol. 47, I., Daubechies ed. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1993. – P. 173-205.