

## Свойства линейных параметрических двухполюсников высшего порядка

### The properties of higher order linear parametrical time-dependent one-port networks

**Аннотация.** Рассматриваются свойства линейных параметрических двухполюсников высшего порядка. Выводятся матрицы комплексного сопротивления параметрических мемристорного и реактивного двухполюсников.

**Summary.** The properties of linear time-dependent one-port networks of higher order are discussed. In the case when these networks are memristors and reactive, matrices of parametrical complex resistance are built.

Развитие теории цепей и широкое применение ЭВМ привели к более сложным радиотехническим и телевизионным устройствам, в частности, к развитию параметрических систем. Повышение требований к аппаратуре, необходимость учета и применение новых параметрических эффектов явились хорошим стимулом для развития общей теории нестационарных и параметрических цепей.

В связи с появлением малошумящих входных видеоусилителей телевизионных камер на видеоконе возникает проблема совершенствования этих видеоусилителей с низким уровнем собственных шумов [1].

Нерешенная часть общей проблемы малошумящего усиления упирается в неясность выбора элементов входного двухполюсника – эквивалентного нагрузочного сопротивления передающей трубки. Хотя параметрическая практика применяла емкостной элемент, не были определены свойства других элементов.

Наряду с параметрическими элементами: резистивными (мемристорными [2]), индуктивными и емкостными, представляющими собой идеализацию реально существующих элементов, предложено ввести новые двухполюсные параметрические элементы, называемые элементами высшего порядка [3-5]. Они могут быть реализованы с помощью соответствующих линейных параметрических и стационарных цепей [6].

Число параметрических различных элементов высшего порядка может быть бесконечным и счетным. Каждый из них обладает особыми, присущими только ему свойствами и характеристиками.

Однако эти свойства слабо изучены применительно к параметрическим элементам высшего порядка (ПарДВП) [7].

Цель данной работы является исследование свойств ПарДВП, которые давали бы возможность качественного определения передаточных характеристик.

### Свойства ПарДВП

Элементы высшего порядка можно ввести формальным обобщением характеристик обычных элементов [6].

По определению параметрическими моделями являются линейные схемы, у которых все или некоторые параметры изменяются во времени периодически с частотой  $\nu$ . В этом определении подразумевается, что изменение параметров происходит синхронно с произвольными "начальными фазами".

Применим операторы дифференцирования-интегрирования

$$p = \frac{d}{dt}; \quad p^n = \frac{d^n}{dt^n}; \quad \dots \quad p^{-1} = \int_{-\infty}^t dt; \quad \dots \quad p^{-n} = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t (dt)^n.$$

Для моделирования воздействий необходимо определить независимые идеальные источники. Пусть набор составляют источники напряжения, тока, заряда, потока и так далее.

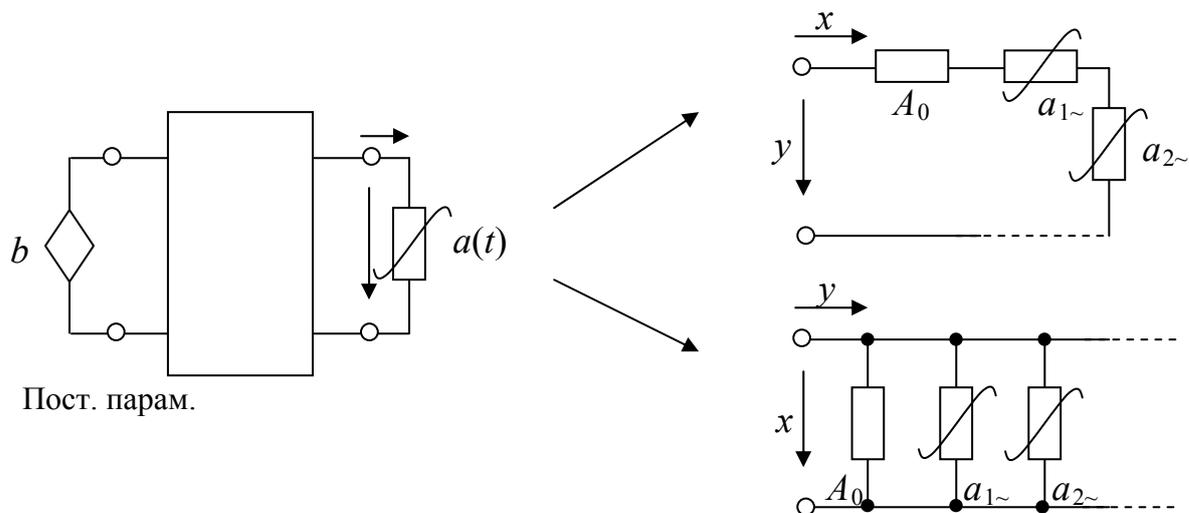


Рисунок 1 Схема с постоянными параметрами и одним обобщенным параметрическим двухполюсником  $a(t)$

Рассмотрим воздействие и отклик алгебраической параметрической цепи  $\Omega$ .

Пусть на некоторую схему «Пост. парам.» с постоянными параметрами, рис.1, воздействует источник  $b = B e^{j\Omega t}$ . К схеме подключен один параметрический двухполюсник с параметром  $a(t)$ .

Как известно [3], воздействие и отклик на таком двухполюснике будут состоять из бесконечного количества комбинационных колебаний с частотами вида

$$\omega_k = \Omega + k\nu, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Представим обобщенные воздействия и отклик.

Обозначим обобщенное воздействие  $x$  и отклик  $y$  для параметрического алгебраического двухполюсника с обобщенным параметром  $a(t)$ .

Если на схеме представлены последовательные элементы, рис. 1, то

$$y(t) = a(t) x(t), \quad (1)$$

где  $a(t) = a(t+T)$ ,  $T = 2\pi / \nu$ .

Если это параллельные элементы, то на оборот.

Пусть  $a(t)$  - дифференцируемая функция. Представим ее в виде ряда Фурье

$$a(t) = A_0 + a_{1\sim} + a_{2\sim} + \dots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n\sim} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2A_{n\sim} \cos(n\nu t + \varphi_n), \quad (2)$$

где  $A_0, A_{n\sim}, \varphi_n$  - коэффициенты разложения в ряд Фурье функции  $a(t)$ , которые являются чисто вещественными числами.

Обобщенный оператор  $a(t)$  представим в виде

$$a(t) = A_0 \gamma(t), \quad (3)$$

где безразмерная функция преобразования  $\gamma(t)$  с помощью коэффициентов  $\Gamma_n = A_{n\sim} / A_0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$  запишется в форме ряда Фурье

$$\gamma(t) = 1 + 2\Gamma_1 \cos(\nu t + \varphi_1) + 2\Gamma_2 \cos(2\nu t + \varphi_2) + \dots = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \cos(n\nu t + \varphi_n). \quad (4)$$

В показательной форме этот ряд представится следующим образом:

$$\gamma(t) = 1 + \overset{\circ}{\Gamma}_1 e^{j\nu t} + \overset{*}{\Gamma}_1 e^{-j\nu t} + \dots + \overset{\circ}{\Gamma}_n e^{jn\nu t} + \overset{*}{\Gamma}_n e^{-jn\nu t} + \dots, \quad (5)$$

где  $\overset{\circ}{\Gamma}_n = \Gamma_n e^{j\varphi}$ ,  $\overset{*}{\Gamma}_n = \Gamma_n e^{-j\varphi}$ .

Представим обобщенные воздействия в форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{X}_k e^{j(\Omega + k\nu)t}, \quad \overset{\circ}{X}_k = X_k e^{j\psi}. \quad (6)$$

Аналогично представим и отклик.

Подставляя выражения (5) и (6) в уравнение (1), получим обобщенное соотношение для алгебраического параметрического двухполюсника. Соотношение распадается на бесконечное количество уравнений для колебаний на каждой комбинационной частоте. Сократим диагональные матрицы, содержащие аргумент; в результате получим обобщенную векторно-матричную форму для комплексных амплитуд

$$[\mathbf{Y}] = A_0 [\gamma] [\mathbf{X}], \quad (7)$$

где  $[\mathbf{Y}]$ ,  $[\mathbf{X}]$  – матрицы-столбцы бесконечного порядка.

Матрица  $[\gamma]$  симметрическая (это матрица теплицева) и называется **матрицей преобразования**. Систему уравнений в представленном виде назовем бесконечной формой.

Рассмотрим линейный двухполюсник высшего порядка с периодически меняющимся параметром  $a(t) = a(t+T)$  (табл.1). Параметр периодически меняется под действием внешнего генератора с частотой  $\nu$ . Этот генератор обычно не показывается, а “тело”  $a(t)$  меняется с частотой  $\nu$ , которая называется частотой накачки.

Итак, в первой строке табл. 1 дано представление параметрической среды.

Таблица 1 - Временное и амплитудно-спектральное представления  
обобщенного ПарДВП в обобщенном базисе  $x$ - $y$

Представление среды	$a(t) = a(t + T)$	$a^{-1}(t) = a^{-1}(t + T)$
Временное воздействие	$y = p^h a(t) p^n x = p^h a(t + T) p^n x$	$x = p^{-n} a^{-1}(t) p^{-h} y = p^{-n} a^{-1}(t+T) p^{-h} y$
Амплитудные спектры	$[Y] = [A_{h,n}] [X]$	$[X] = [A^{-1}_{n,h}] [Y]$
Матрица преобразования	$[A_{h,n}] = [s]^h A_0 [\gamma]_z [s]^n$	$[A^{-1}_{h,n}] = [s]^{-n} A_0^{-1} [\gamma]_y [s]^{-h}$

2 строка представляет запись воздействия и отклика для ПарДВП.

3 строка показывает спектральное представление относительно амплитуд составляющих.

В 4 строке показано (доказательства смотри ниже) представление матрицы преобразования, где  $s = j\omega$ .

Повторяем, что здесь не сказано о том, что воздействие и отклик обязательно напряжения и токи. Здесь  $[X]$  какое-то воздействие, а  $[Y]$  какой-то отклик. И связь между ними также обозначена каким-то  $[A_{h,n}]$ .

Пусть воздействие напряжение и отклик ток, при параллельном соединении – наоборот. Перейдем к табл. 2, чтобы использовать привычные для нас сопротивления или проводимости.

Итак, для ПарДВП необходимо опять ввести спектральное представление, что позволяет ввести понятие комплексного сопротивления (проводимости).

Здесь приведена система спектральных представлений. В скобках даны только общие матрицы  $[U]$ ,  $[I]$ . Последняя строка представляет матрицу преобразования.

Таблица 2 - Временное и спектральное представления ПарДВП в  $u$ - $i$  базисе

Представление	$a(t) = a(t + T)$	$a^{-1}(t) = a^{-1}(t + T)$
Временное воздействие	$u = p^h a(t) p^n i = p^h a(t + T) p^n i$	$i = p^{-n} a^{-1}(t) p^{-h} u = p^{-n} a^{-1}(t+T) p^{-h} u$
Амплитудные спектры	$[U] = [Z_{h,n}] [I]$	$[I] = [Y_{n,h}] [U]$
Матрица преобразования	$[Z_{h,n}] = [s]^h A_0 [\gamma]_z [s]^n$	$[Y_{h,n}] = [s]^{-n} A_0^{-1} [\gamma]_y [s]^{-h}$

Спектральное представление для ПарДВП, т.е. амплитудные спектры напряжений  $[U]$  и токов  $[I]$  даны:

$$[U] = [Z_{h,n}][I],$$

т.е. стандартное представление для токов, напряжений и матрицы  $[Z_{h,n}]$ . Аналогично обратное, связывающее дуальные представления  $[I] = [Y_{n,h}] [U]$ .

«Накачка», или закон вариации параметра, подразделяется на  $z$ -накачку и на  $y$ -накачку. Здесь  $a(t)$  и  $a^{-1}(t)$  непосредственно связаны с видом накачки, но так, чтобы:

$$a(t) = 1 / a^{-1}(t) \neq 0 \text{ при любом } t.$$

### Комплексное сопротивление

Комплексное сопротивление связывает комплексные амплитуды напряжений и токов комбинационных частот  $\omega_k = \Omega + k \nu$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ .

Для записи комплексного сопротивления важную роль играют специальные  $\Theta_{h,n}(\eta)$  - матрицы. Для  $r/c$ -ПарДВП они вводятся с помощью трех теорем. (В таблицах по-прежнему принято обозначение  $s = j\Omega$ .)

Введем диагональную матрицу  $[\eta]^i$  в степени  $i \in \{h,n\}$  и матрицу преобразования  $[\gamma]$ , приведенных в табл. 3 и 4.

**Таблица 3** - Диагональная матрица  $[\eta]$  в степени  $i \in \{h,n\}$

$$(\eta)^i =$$

	...	...	...	...	...	...
...	$(1-2\eta)^i$					...
...		$(1-\eta)^i$				...
...			1			...
...				$(1+\eta)^i$		...
...					$(1+2\eta)^i$	...
	...	...	...	...	...	

**Таблица 4** - Матрица преобразования  $[\gamma]$

$$(\gamma) =$$

	...	...	...	...	...	...
...	<b>1</b>	$\dot{\Gamma}_1^*$	$\dot{\Gamma}_2^*$	$\dot{\Gamma}_3^*$	$\dot{\Gamma}_4^*$	...
...	$\dot{\Gamma}_1$	<b>1</b>	$\dot{\Gamma}_1^*$	$\dot{\Gamma}_2^*$	$\dot{\Gamma}_3^*$	...
...	$\dot{\Gamma}_2$	$\dot{\Gamma}_1$	<b>1</b>	$\dot{\Gamma}_1^*$	$\dot{\Gamma}_2^*$	...
...	$\dot{\Gamma}_3$	$\dot{\Gamma}_2$	$\dot{\Gamma}_1$	<b>1</b>	$\dot{\Gamma}_1^*$	...
...	$\dot{\Gamma}_4$	$\dot{\Gamma}_3$	$\dot{\Gamma}_2$	$\dot{\Gamma}_1$	<b>1</b>	...
	...	...	...	...	...	

Табл. 5 характеризует матрицу комплексного сопротивления  $[\theta_{h,n}]$  для закона вариации параметра  $a(t)$  в произвольной периодической форме.

**Таблица 5** – Матрица полного сопротивления  $[\theta_{h,n}]$  в обобщенной бесконечной форме  
Закон вариации параметра  $a(t) = 1 + 2\Gamma_1 \cos(vt) + 2\Gamma_2 \cos(2vt) + 2\Gamma_3 \cos(3vt) + \dots$

$$[\Theta_{h,n}] =$$

	...	...	...	...	...	
...	$(1-2\eta)^{h+n}$	$\frac{(1-2\eta)^h}{(1-\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1^*$	$(1-2\eta)^h \dot{\Gamma}_2^*$	$\frac{(1-2\eta)^h}{(1+\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_3^*$	$\frac{(1-2\eta)^h}{(1+2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_4^*$	...
...	$\frac{(1-\eta)^h}{(1-2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1$	$(1-\eta)^{h+n}$	$(1-\eta)^h \dot{\Gamma}_1^*$	$\frac{(1-\eta)^h}{(1+\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_2^*$	$\frac{(1-\eta)^h}{(1+2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_3^*$	...
...	$\frac{1}{(1-2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_2$	$\frac{1}{(1-\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1$	<b>1</b>	$\frac{1}{(1+\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1^*$	$\frac{1}{(1+2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_2^*$	...
...	$\frac{(1+\eta)^h}{(1-2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_3$	$\frac{(1+\eta)^h}{(1-\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_2$	$(1+\eta)^h \dot{\Gamma}_1$	$(1+\eta)^{h+n}$	$\frac{(1+\eta)^h}{(1+2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1^*$	...
...	$\frac{(1+2\eta)^h}{(1-2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_4$	$\frac{(1+2\eta)^h}{(1-\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_3$	$(1+2\eta)^h \dot{\Gamma}_2$	$\frac{(1+2\eta)^h}{(1+\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1$	$(1+2\eta)^{h+n}$	...
	...	...	...	...	...	

Ленточная матрица полного сопротивления  $[\Theta_{h,n}]_{\Gamma_1}$  в обобщенной бесконечной форме при гармоническом законе вариации параметра  $a(t) = 1 + 2\Gamma_1 \cos(vt)$  приведена в табл. 6.

**Таблица 6** – Ленточная матрица полного сопротивления  $[\Theta_{h,n}]_{\Gamma_1}$  в обобщенной бесконечной форме; гармонический закон вариации параметра  $a(t) = 1 + 2\Gamma_1 \cos(vt)$ .

$$[\Theta_{h,n}]_{\Gamma_1} =$$

	...	...	...	...	...	
...	$(1-2\eta)^{h+n}$	$\frac{(1-2\eta)^h}{(1-\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1^*$				...
...	$\frac{(1-\eta)^h}{(1-2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1$	$(1-\eta)^{h+n}$	$(1-\eta)^h \dot{\Gamma}_1^*$			...
...		$\frac{1}{(1-\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1$	<b>1</b>	$\frac{1}{(1+\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1^*$		...
...			$(1+\eta)^h \dot{\Gamma}_1$	$(1+\eta)^{h+n}$	$\frac{(1+\eta)^h}{(1+2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1^*$	...
...				$\frac{(1+2\eta)^h}{(1+\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_1$	$(1+2\eta)^{h+n}$	...
	...	...	...	...	...	

Ленточная матрица полного сопротивления  $[\theta_{h,n}]_{\Gamma_2}$  в обобщенной бесконечной форме при законе вариации параметра  $a(t) = 1 + 2\Gamma_2 \cos(2vt)$ , вторая гармоника вариации параметра.

**Таблица 7** – Ленточная матрица полного сопротивления  $[\theta_{h,n}]_{\Gamma_2}$  в обобщенной бесконечной форме; закон вариации параметра  $a(t) = 1 + 2\Gamma_2 \cos(2vt)$

$$[\theta_{h,n}]_{\Gamma_2} =$$

	...	...	...	...	...	
...	$(1-2\eta)^{h+n}$		$(1-2\eta)^h \Gamma_2^*$			...
...		$(1-\eta)^{h+n}$		$\frac{(1-\eta)^h}{(1+\eta)^{-n}} \Gamma_2^*$		...
...	$\frac{1}{(1-2\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_2$		<b>1</b>		$\frac{1}{(1+2\eta)^{-n}} \Gamma_2^*$	...
...		$\frac{(1+\eta)^h}{(1-\eta)^{-n}} \dot{\Gamma}_2$		$(1+\eta)^{h+n}$		...
...			$(1+2\eta)^h \dot{\Gamma}_2$		$(1+2\eta)^{h+n}$	...
	...	...	...	...	...	

### Классификация изомеров ПарДВП

Своеобразным "периодическим" законом для ПарДВП являются матрицы, представленные в табл. 8 и 9. Сравним их.

В табл. 8 приведенные комплексные сопротивления изомеров параметрических резистивных двухполюсников.

По вертикали они классифицируются как  $e_\Sigma$  - и  $d_\Sigma$  - элементы, порядок задает характеристическая константа  $\Sigma_r = h+n = \dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots$ , определяемая, как сумма индексов  $h$  и  $n$ .

По горизонтали расположены резисторы одного порядка, они являются изомерами соответствующих вышеназванных элементов. Привязка осуществляется к одному из индексов, в данной таблице - к  $n$ . В центре таблицы представлен обычный параметрический резистор и уже от него влево и вправо расположены изомеры мемристоров. Например, там представлен параметрический мемристор типа Чуа, фактически являющийся обычным изомером параметрического резистора нулевого порядка, т. к. характеристическая константа

$$\Sigma = h+n = 1+(-1) = 0.$$

Рассмотрим три важные теоремы для ПарДВП.

**Теорема 1.** (О матричном комплексном сопротивлении резистивного параметрического ДВП). Комплексное сопротивление резистивного ПарДВП имеет матричную форму и определяется с помощью  $\Theta$ -матриц по формуле

$$[z_{r(\Omega)^{h+n}}] = s^{h+n} R_0 \Theta_{h,n}(\eta), \quad (1)$$

где  $s=j\Omega$ ; сумма констант  $\sum_r = (h+n) = \dots -4, -2, 0, 2, 4, \dots$ .

*Доказательство.* Ядро комплексного сопротивления образует матрица преобразования  $[\gamma]$ . После умножения слева на диагональную матрицу  $[\eta]^h$  и справа - на  $[\eta]^n$ , получаем матрицу  $\Theta_{h,n}(\eta)$ . Применим метод последовательных рассуждений.

Рассмотрим изомеры параметрических мемристоров. Для них характеристическая константа  $\sum_r = h+n = 0$  и потому  $s=1$ , а значит комплексное сопротивление мемристоров не зависит от  $s$  в явной форме:

$$\begin{aligned} [z] &= [s]^h R_0 [\gamma] [s]^n = s^h [\eta]^h R_0 [\gamma] s^n [\eta]^n = s^{h+n} [\eta]^h R_0 [\gamma] [\eta]^n = R_0 [\eta]^h [\gamma] [\eta]^n, \\ [z] &= R_0 \Theta_{h,n}(\eta). \end{aligned} \quad (2)$$

По этой формуле заполним среднюю строку табл.8. Таким образом семейство мемристоров не имеет явной зависимости от частоты сигнала.

Рассмотрим семейство  $e(t)$ -элементов. Например,  $e_1$  - изомеры характеризует  $\sum = h+n = 2$ , поэтому можно записать импеданс

$$\begin{aligned} [z] &= [s]^h R_0 [\gamma] [s]^n = s^h [\eta]^h R_0 [\gamma] s^n [\eta]^n = s^2 R_0 \Theta_{h,n}(\eta) \\ [z] &= -\Omega^2 R_0 \Theta_{h,n}(\eta). \end{aligned} \quad (3)$$

Формула позволяет заполнить строку для  $e_1$  - изомеров.

Точно также доказывается комплексное сопротивление для других  $e$ - и  $d$ -изомеров, что позволяет заполнить следующие строки табл. 7. Изучение полученных зависимостей приводит к формуле (3).  $\square$

Далее рассмотрим теорему для индуктивного ПарДВП.

**Теорема 2.** (Теорема о матричном комплексном сопротивлении индуктивного параметрического ДВП). Рассмотрим верхнюю половину рис. 9. Матричное комплексное сопротивление индуктивного ПарДВП определяется с помощью  $\Theta_{h,n}(\eta)$ -матриц по формуле

$$[z_{l(\Omega)^{h+n}}] = s^{h+n} L_0 \Theta_{h,n}(\eta), \quad (4)$$

где  $s = j\Omega$ ,  $\sum_l = h+n = 1, 3, 5, \dots$ .

*Доказательство.* Ядро комплексного сопротивления по-прежнему образует матрица преобразования  $[\gamma]$ . После умножения слева на диагональную матрицу  $[\eta]^h$  и справа - на  $[\eta]^n$ , получаем матрицу  $\Theta_{h,n}(\eta)$ .

Рассмотрим изомеры частотно независимой параметрической индуктивности. Для них  $\sum_l = h+n = 1$  и потому матричное комплексное сопротивление

$$\begin{aligned} [z] &= [s]^h L_0 [\gamma] [s]^n = s^h [\eta]^h L_0 [\gamma] s^n [\eta]^n = s^{h+n} [\eta]^h L_0 [\gamma] [\eta]^n = j\Omega L_0 [\eta]^h [\gamma] [\eta]^n, \\ [z] &= j\Omega L_0 \Theta_{h,n}(\eta) \end{aligned} \quad (5)$$

зависит от  $\Omega$  в явном виде только в 1-й степени.

По этой формуле заполним соответствующую строку верхней половины табл. 9. Таким образом, данное семейство (изомеры) индуктивностей не имеет явной зависимости от частоты сигнала  $\Omega$ .

Над ней, т.е. второй строке снизу в табл. 9 представлены импедансы изомеров первого представителя частотно-зависимых параметрических индуктивностей. Для них  $L_s = -L(\Omega^2)$ , а характеристическая константа  $\sum_l = h+n = 3$ . Запишем матричное комплексное сопротивление:

$$\begin{aligned} [z] &= [s]^h L_0 [\gamma] [s]^n = s^h [\eta]^h L_0 [\gamma] s^n [\eta]^n = s^{h-n} [\eta]^h L_0 [\gamma] [\eta]^n = -j\Omega (\Omega^2 L_0) [\eta]^h [\gamma] [\eta]^n, \\ [z] &= -j\Omega (\Omega^2 L_0) \Theta_{h,n}(\eta) = j\Omega L_s \Theta_{h,n}(\eta) \end{aligned} \quad (6)$$

где  $L_s$  отрицательна и зависит от частоты сигнала во второй степени  $\Omega^2$ .

Аналогично выводится комплексное сопротивление для других изомеров ПДВП, что позволяет заполнить всю верхнюю часть табл. 9. Изучение полученных зависимостей приводит к формуле (4).  $\square$

**Теорема 3.** (Теорема о матричном комплексном сопротивлении емкостного ПарДВП). Рассмотрим вторую, нижнюю половину табл. 9.

Комплексное сопротивление емкостного ПарДВП можно записать с помощью  $\Theta$ -матриц

$$[z_{c(\Omega^{h+n})}] = s^{h+n} C_0^{-1} \Theta_{h,n}(\eta), \quad (7)$$

где  $s = j\Omega$ ,  $\sum_c = (h+n) = -1, -3, -5 \dots$ .

*Доказательство.* Ядро импеданса образует матрица преобразования  $[\gamma]$ ; после умножения слева на диагональную матрицу  $[\eta]^h$  и справа - на  $[\eta]^n$ , получаем матрицу  $\Theta_{h,n}(\eta)$ .

Рассмотрим изомеры параметрических частотно-независимых емкостей, для которых характеристическая константа  $\sum_c = h+n = -1$ . Покажем, что их комплексное сопротивление зависит от  $s$  только в (-1)-й степени:

$$\begin{aligned} [z] &= [s]^h C_0^{-1} [\gamma] [s]^n = s^h [\eta]^h C_0^{-1} [\gamma] s^n [\eta]^n = s^{h-n} C_0^{-1} [\eta]^h [\gamma] [\eta]^n, \\ [z] &= (1/(j\Omega C_0)) [\eta]^h [\gamma] [\eta]^n = (1/(j\Omega C_0)) \Theta_{h,n}(\eta). \end{aligned} \quad (8)$$

По формуле (8) заполнена верхняя строка второй половины (нижней) табл. 8; эти изомеры емкостей не имеют явной зависимости от частоты сигнала.

На второй строке сверху второй половины табл. 9 представлены комплексное сопротивление изомеров первого представителя частотно-зависимых параметрических емкостей  $-c(\Omega^2)$ . Для них характеристическая константа  $\sum_c = h+n = -3$ , матричное комплексное сопротивление запишется:

$$[z] = [s]^h C_0^{-1} [\gamma] [s]^n = s^h [\eta]^h C_0^{-1} [\gamma] s^n [\eta]^n = s^{h-n} [\eta]^h C_0^{-1} [\gamma] [\eta]^n,$$

или окончательно

$$[z] = - (1/(j\Omega(\Omega^2 C_0))) [\eta]^h [\gamma] [\eta]^n = - (1/(j\Omega(\Omega^2 C_0))) \Theta_{h,n}(\eta) = - (1/(j\Omega C_s)) \Theta_{h,n}(\eta). \quad (9)$$

Комплексное сопротивление зависит от  $\Omega^{-3}$ , следовательно, эквивалентная емкость зависит от частоты  $C_s = -\Omega^2 C_0$  и отрицательна.

Таблица 8 – Параметрические резистивные (мемристорные) двухполюсники высшего порядка:  
 комплексное сопротивление изомеров ПарДВП

$n \backslash \Sigma$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
6			...	...	...	...	...	...	...	...
4	...	...	...	...	$\Omega^4 R_0 \Theta_{4,0}(\eta)$	$\Omega^4 R_0 \Theta_{3,1}(\eta)$	$\Omega^4 R_0 \Theta_{2,2}(\eta)$	$\Omega^4 R_0 \Theta_{1,3}(\eta)$	$\Omega^4 R_0 \Theta_{0,4}(\eta)$	...
2	...	...	...	$-\Omega^2 R_0 \Theta_{3,-1}(\eta)$	$-\Omega^2 R_0 \Theta_{2,0}(\eta)$ (e-элемент)	$-\Omega^2 R_0 \Theta_{1,1}(\eta)$	$-\Omega^2 R_0 \Theta_{0,2}(\eta)$	$-\Omega^2 R_0 \Theta_{-1,3}(\eta)$	...	
0	...	...	$R_0 \Theta_{2,-2}(\eta)$	$R_0 \Theta_{1,-1}(\eta)$ Мемристор (Chua-элемент)	<b><math>R_0 \Theta_{0,0}</math></b> Резистор	$R_0 \Theta_{-1,1}(\eta)$ (Дифференциальный резистор)ь	$R_0 \Theta_{-2,2}(\eta)$	...	...	
-2	...	$-\Omega^{-2} R_0 \Theta_{1,-3}(\eta)$	$-\Omega^{-2} R_0 \Theta_{0,-2}(\eta)$	$-\Omega^{-2} R_0 \Theta_{-1,-1}(\eta)$	$-\Omega^{-2} R_0 \Theta_{-2,0}(\eta)$ (d-элемент)	$-\Omega^{-2} R_0 \Theta_{-3,1}(\eta)$	...	...	...	
-4	$\Omega^{-4} R_0 \Theta_{0,-4}(\eta)$	$\Omega^{-4} R_0 \Theta_{-1,-3}(\eta)$	$\Omega^{-4} R_0 \Theta_{-2,-2}(\eta)$	$\Omega^{-4} R_0 \Theta_{-3,-1}(\eta)$	$\Omega^{-4} R_0 \Theta_{-4,0}(\eta)$	...	...	...		
-6	...	...	...	...	...	...	...			



Аналогично доказывается комплексное сопротивление для других изомеров, что позволяет заполнить нижнюю часть табл. 8. Изучение полученных зависимостей приводит к приведенной формуле (9). □

В табл. 9 в верхней части представлены матричные комплексные сопротивления изомеров параметрических индуктивностей. По вертикали снизу вверх они расположены в соответствии с суммой индексов  $\Sigma_l$ , а по горизонтали - как в предыдущем случае.

Аналогично в табл. 9 в нижней части расположены матричные комплексные сопротивления изомеров параметрических емкостей, только сумма индексов отсчитывается сверху вниз.

Таблицы позволяют построить универсальную таблицу ПарДВП.

### Моделирование ПарДВП

Ниже представлены две схемы, с помощью которых можно моделировать ПарДВП, а именно, входное комплексное сопротивление для  $[U]$  и  $[I]$ . Эти схемы непосредственно вытекают из аналогичных нестационарных схем НстДВП [6].

Итак, даны два определения ПарДВП, для которого  $a = a(t) = a(t+T)$ , в виде комплексного сопротивления  $[U] = [s]^h A_0[\gamma]_z [s]^n [I]$  для первой схемы и в виде комплексной проводимости  $[I] = [s]^{-n} A_0^{-1}[\gamma]_y [s]^{-h} [U]$  для второй. Покажем это.

1) Воспользуемся 2 и 3 строками табл. 2. Первая схема моделирования представлена на рис. 2.

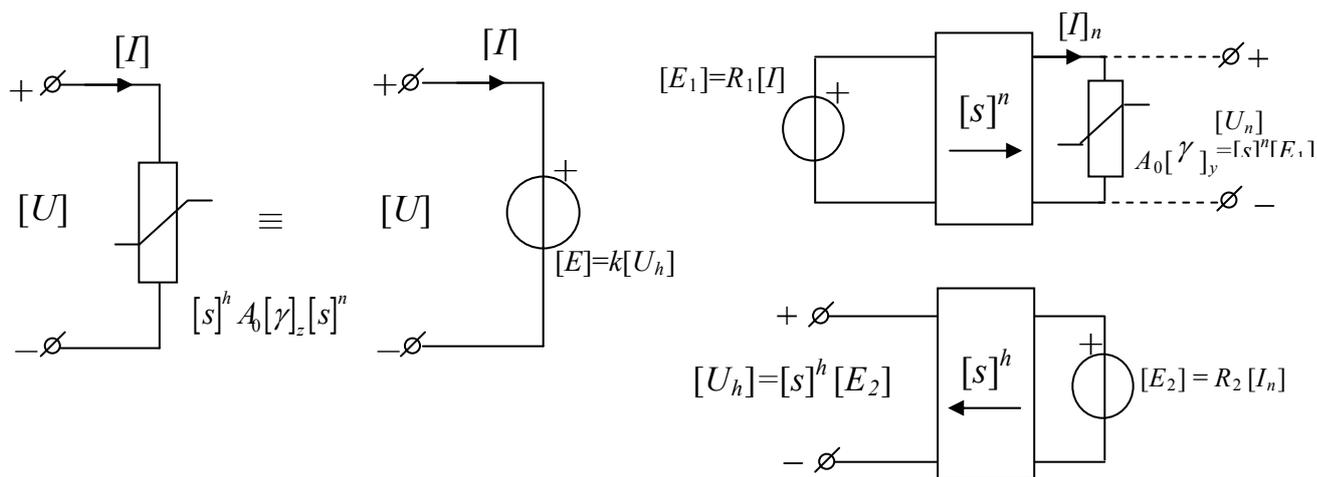


Рисунок 2 – Первая схема для моделирования параметрического комплексного сопротивления ДВП  $[s]^h A_0[\gamma]_z [s]^n$  с помощью параметрической проводимостью  $A_0[\gamma]_y$

Для напряжения на входе схемы запишем уравнение

$$[U] = [E] = k [U_h] = k[s]^h [U_2] = k[s]^h [E_2] = kR_2 [s]^h [I_n] = kR_2 [s]^h A_0 [\gamma]_y [U_n] = \\ = kR_2 [s]^h A_0 [\gamma]_y [s]^n [E_1] = [s]^h A_0 [\gamma]_z [s]^n [I].$$

Следовательно, для этой схемы справедливо выражение (10)

$$[U] = kR_2 [s]^h A_0 [\gamma]_y [s]^n [E_1] = [s]^h A_0 [\gamma]_z [s]^n [I]. \quad (10)$$

Таким образом, получено параметрическое комплексное сопротивление.

2) Вторая схема моделирования представлена на рис. 3. Схема позволяет моделировать параметрическую проводимость.

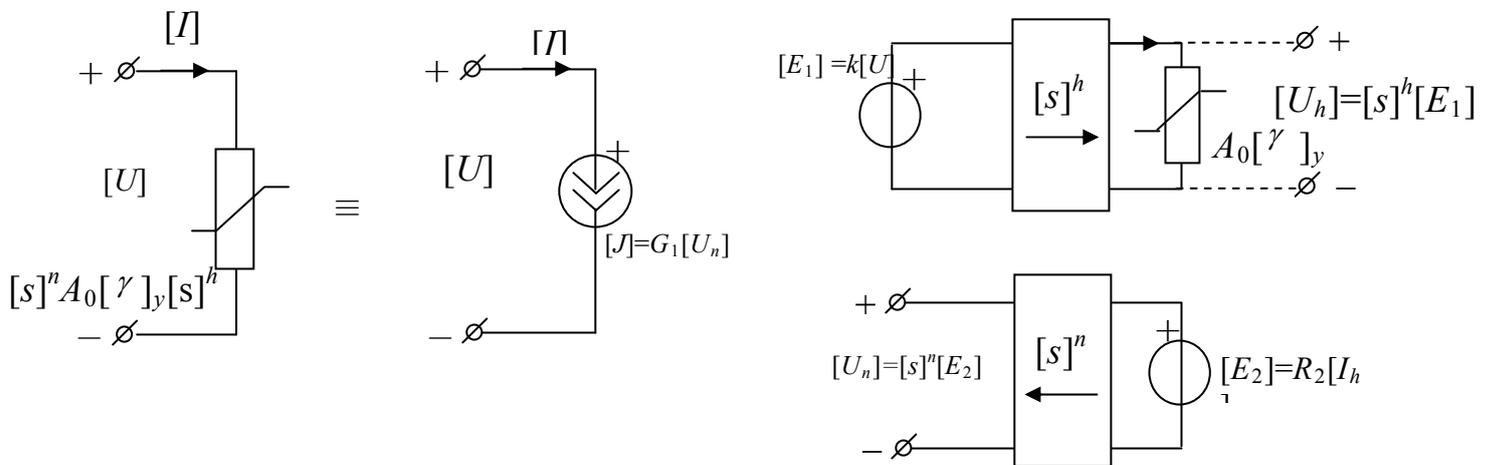


Рисунок 3 – Вторая схема для моделирования параметрической проводимости ДВП  $[s]^{-n} A_0^{-1} [\gamma]_y [s]^h [U]$  с помощью  $A_0 [\gamma]_y$

Запишем выражение для комплексной проводимости

$$[I] = [J] = G [U_n] = G [s]^n [E_2] = G [s]^n R_2 [I_h] = [G] R_2 [s]^n A_0 [\gamma] [U]_h = \\ = G R_2 [s]^n A_0 [\gamma] [s]^h [E_1] = G R_2 [s]^n A_0 [\gamma] [s]^h k [U].$$

Следовательно, для схемы справедливо выражение (11)

$$[I] = [s]^{-n} G R_2 k A_0^{-1} [\gamma] [s]^h [U] = [s]^{-n} A_0^{-1} [\gamma]_y [s]^h [U], \quad (11)$$

т.е. получена параметрическая комплексная проводимость.

При необходимости можно введением дополнительных параметров в схему замещения учесть влияние реальных интеграторов на искажения частотных характеристик элементов высшего порядка.

В заключение сделаем выводы.

Предложено представление ПарДВП в виде таблиц мемристорных и реактивных двухполюсников. Основные свойства элементов необходимо изучить методами спектроскопии. Те типы, у которых спектроскопия обнаружит полезные свойства, можно внедрить в практику. Целесообразны подробные каталоги спектров ПарДВП, так как они могут помочь в задаче синтеза различных устройств.

Комплексные сопротивления ПарДВП находятся в матричной форме с помощью специальных таблиц. Определение ПарДВП с помощью описания комплексного сопротивления целесообразно выполнить в форме, напоминающей классическое представление; по горизонтали расположить резистивные комплексные сопротивления, по вертикали в верхней полуплоскости расположить индуктивные, а в нижней - емкостные комплексные сопротивления ПарДВП.

Предложены две схемы для моделирования параметрических схем.

## Литература

1. *Арбузников В. А., Бельдюгин В. Н., Ракоед А. Ф.* Параметрический балансный видеоусилитель / В сб. "Вопросы электросвязи".- К.: Техніка, 1969.- С. 35-42.
2. *Кузнецов К.* Memristor – найден четвертый базовый элемент электрической цепи // Компьютерное Обозрение. – 2008. - № 20. - 27 мая. – С.68-69.
3. *Арбузников В. А., Варава Ю. В.* Автоматическое проектирование алгебраических цепей. Определения. // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. - 2002. - № 3. – С. 6 – 19.
4. *Арбузников В.А., Варава Ю.В.* Внешние дополнения для нестационарных двухполюсников // Праці УНДІРТ. – 2007. - № 1 (49). – С. 10 - 20.
5. *Арбузников В.А., Варава Ю.В.* Нестационарные двухполюсники. – «Праці науково-практичної конференції “Перспективні технологічні та ринкові напрями розвитку телекомунікаційних послуг у новітніх безпроводових системах зв’язку“, 22-24 березня 2007 року. – Одеса, 2007. – с. 3-6.
6. *Варава Ю.В., Арбузников В.А.* Мемристорные и реактивные нестационарные линейные двухполюсники высшего порядка и их моделирование // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова. - 2007. - №2. – С.45-52.
7. *Иваницкий А. М.* Получение расширенного набора элементов электрических цепей. / Гос. бюджетная НИР кафедры ТЛЭЦ «Исследование активных преобразователей и фильтров», 1981/1982 уч. год, Одесса, 1982. – Гос. регистрация 80073970.