

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ С УПРАВЛЯЕМОЙ МЕЖСИМВОЛЬНОЙ
ИНТЕРФЕРЕНЦИЕЙ В БАЗИСЕ ВЕЙВЛЕТОВ ХААРА**

**REPRESENTATION OF SIGNALS WITH CONTROLLED INTERSYMBOL
INTERFERENCE IN HAAR WAVELET BASIS**

Аннотация. В статье рассматривается проблема аппроксимации сигналов с управляемой МСИ в базисе вейвлетов Хаара. Предлагаются система обобщенных функций Хаара и метод для вычисления коэффициентов ряда Фурье-Хаара.

Summary. This article deals with the problem of signals with controlled ISI approximation in Haar wavelet basis. A set of generalized Haar functions and a method of Fourier – Haar series coefficients computation are proposed.

Интенсивное развитие средств связи ставит перед исследователями проблему разработки более совершенных и эффективных методов формирования сигналов, обладающих заданными свойствами. К настоящему времени техника коррелятивного кодирования, позволяющая получать оптимальную в том или ином смысле форму сигнальных функций, нашла довольно широкое применение в современных телекоммуникационных технологиях и ее достоинства становятся все более очевидными по мере расширения сферы ее использования [1, 2].

Сигналы в данных системах передачи, называемые парциальными сигналами [2], имеют компактный спектр, который может принимать нулевые значения на заданных частотах за счет введения управляемой межсимвольной интерференции (МСИ).

Реализация ожидаемых свойств и, следовательно, эффективность системы связи в целом в значительной степени зависят от того, насколько точно воспроизводится форма сигналов с управляемой МСИ. Для прецизионного аппаратного воспроизведения парциальных сигналов ведут поиск синтеза аппроксимирующих функций, которые являются приближением этих сигналов во временной области.

При выборе системы базисных функций решающее значение имеет простота их аппаратной реализации, поэтому в практических разработках важное место занимают кусочно-постоянные функции Радермахера, Уолша, гест-функции и др. [3]. Большой интерес представляют также вейвлет-функции, допускающие локализацию во временной и частотной областях. Наиболее прост в реализации вейвлет Хаара, порождающий ортонормированный базис [4-7]. К недостаткам вейвлета Хаара относят его резкие границы, т.е. недостаточную гладкость. При этом нет ясности относительно того, насколько последнее обстоятельство может повлиять на качество синтеза непрерывных сигналов. В самом деле, поскольку синтез предполагает дополнительную фильтрацию аппроксимирующего сигнала, то проблема отсутствия гладкости в значительной степени снимается.

Однако оценить результирующую точность довольно трудно, так как в литературе отсутствуют методы вейвлет-синтеза парциальных сигналов.

Цель работы – разработка метода синтеза сигналов с управляемой МСИ в базисе функций Хаара.

1. Основные свойства вейвлетов Хаара. В 1910 году венгерский математик Альфред Хаар впервые описал полную ортонормированную систему для гильбертова пространства и доказал, что любая непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям этой системы. В последнее десятилетие интерес к функциям Хаара заметно возрос в связи с тем, что они были включены в семейство вейвлетов в качестве одного из самых простых вейвлетов и были предприняты более глубокие исследования их свойств, но уже под совершенно иным углом зрения [4 ... 7].

Известно [4], что цель вейвлет-анализа состоит в том, чтобы предоставить средства для исследования структуры сигналов или процессов. При этом такие исследования необходимо проводить на разных масштабах или уровнях разрешения.

Как показано в [4 ... 5], любую функцию $f(x)$ из $L^2(R)$ можно разложить на некотором заданном уровне разрешения m_{\max} в ряд вида

$$f(x) = \sum_j s_{m_{\max},j} \Phi_{m_{\max},j}(x) + \sum_{m \geq m_{\max},j} d_{mj} \Psi_{mj}(x). \quad (1)$$

Вейвлет-коэффициенты s_{mj} и d_{mj} можно вычислить по формулам [4]

$$s_{mj} = \int f(x)\varphi_{mj}(x)dx, \quad d_{mj} = \int f(x)\psi_{mj}(x)dx.$$

Функции $\varphi(x) = \varphi_{00}(x)$ и $\psi(x) = \psi_{00}(x)$ называются скейлинг-функцией (масштабной функцией) и базисным вейвлейтом («материнским вейвлейтом») соответственно. Для системы Хаара аналитическая запись этих функций имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0 & x < 0, \quad x \geq 1, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & x < 0, \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Все вейвлеты Хаара могут быть получены из базисного вейвлета с помощью масштабных преобразований $1/2^m$ и сдвигов $j/2^m$. Таким образом,

$$\psi_{mj}(x) = 2^{m/2} \psi(2^m x - j), \quad j, m \in I,$$

причем $\|\psi_{mj}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$.

При практическом анализе процессов скейлинг-функции и вейвлеты Хаара обычно называют широкополосными и узкополосными фильтрами соответственно, потому, что они отфильтровывают компоненты сигнала на больших и малых масштабах.

Первая сумма из (1) со скейлинг-функциями φ_{mj} содержит среднее значение $f(x)$ на интервалах $[j2^{-m}, (j+1)2^{-m})$. На самом детальном уровне m_{\max} остаются только s – коэффициенты и получается так называемое представление скейлинг-функцией

$$f(x) = \sum_j s_{m_{\max}j} \varphi_{m_{\max}j}(x).$$

Вторая сумма содержит все флуктуации анализируемой функции $f(x)$ на всех без исключения уровнях. В ряде случаев рассматривают только вторую сумму в (1) и результат называют вейвлет-разложением функции $f(x)$ [4].

Легко проверить, что скейлинг-функция удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

Как и всякий вейвлет, вейвлет Хаара знакопеременен, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0.$$

Функции Хаара локальны и полностью покрывают пространство $L^2(R)$ за счет смещения j . Они ортогональны на разных уровнях m , а переход от m к $m+1$ эквивалентен замене x на $2x$, т.е. изменению масштаба, что позволяет выполнять анализ на разных уровнях разрешения.

Вейвлет-коэффициенты существенно отличны от нуля лишь вблизи сингулярностей $f(x)$ (сильные флуктуации). Поэтому вейвлет-ряды обычных гладких функций очень «разрежены», в отличие от рядов Фурье, которые довольно плотные для достаточно регулярных функций.

Важным моментом является то, что вейвлеты Хаара являются пересечением двух функциональных множеств. С одной стороны, вейвлеты Хаара являются частью множества кусочно-постоянных функций, к числу которых относятся функции Радемахера, Уолша и др. С другой стороны, функции Хаара являются типичными вейвлетами с конечным носителем со всеми присущими им свойствами.

2. Особенности приближения непрерывных функций рядами Фурье-Хаара. Прежде чем приступить к разработке вычислительных процедур, необходимо остановиться на конструктивных особенностях функций Хаара [5]. Начинают обычно с разъяснения понятия так называемых *двоичных отрезков*, которые могут быть получены путем деления отрезка $[0,1]$ на 2^{m-1} равных частей. Для двоичных отрезков принято следующее обозначение

$$l_{mj} = \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}} \right),$$

где $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$ и $m = 1, 2, \dots$.

Считают, что эти отрезки замкнуты слева и открыты справа, если их правый конец отличен от 1. Если правый конец отрезка равен 1, то полагают, что этот отрезок замкнут также справа. Таким образом, можно привести примеры двоичных отрезков: $[0, 1/2)$; $[0, 1/4)$; $[1/4, 1/2)$; $[1/2, 3/4)$; $[0, 1/8)$; $[3/4, 1]$; $[0, 1]$ и т.д. С другой стороны, отрезки $[1/4, 3/4)$; $[5/8, 7/8)$; $[5/8, 1]$ и т. д. двоичными не считаются. Следствием двоичного деления является тот факт, что для каждого m справедливо равенство

$$l_{m1} + l_{m2} + \dots + l_{m2^{m-1}} = [0, 1].$$

Таким образом, число двоичных отрезков равно 2^{m-1} , а длина каждого определяется как $|l_{mj}| = 1/2^{m-1}$.

Левую и правую половины каждого двоичного отрезка l_{mj} принято обозначать l_{mj}^- и l_{mj}^+ , так что $l_{mj}^- + l_{mj}^+ = l_{mj}$. Кроме того, справедливы соотношения $l_{mj}^- = l_{m+1, 2j-1}$ и $l_{mj}^+ = l_{m+1, 2j}$, как показано на рис. 1.

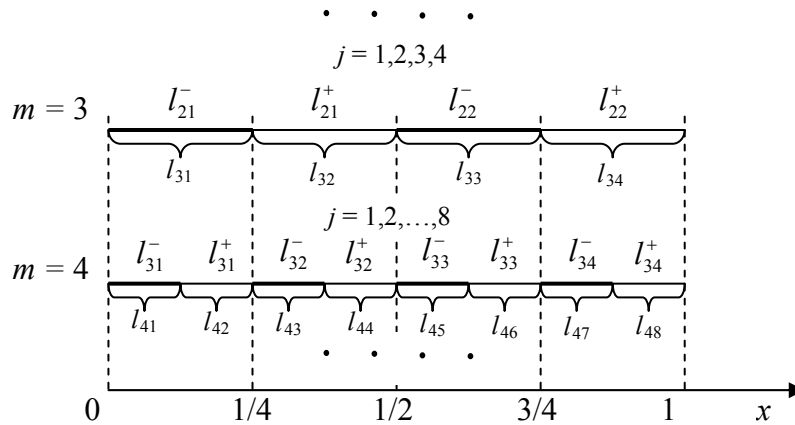


Рисунок 1 – Иллюстрация обозначения двоичных отрезков при $m = 3$ и $m = 4$

Как видно из рисунка, систему функций Хаара удобно строить группами. Так, группа с номерами m содержит 2^{m-1} функций $\{\chi_{mj}(x)\}$, $j = 1, \dots, 2^{m-1}$, $m = 1, 2, \dots$.

Согласно введенным обозначениям, функцию Хаара можно записать следующим образом

$$\chi_{mj}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l_{mj}^-, \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l_{mj}^+, \\ 0 & \text{при } x \notin l_{mj}, \end{cases} \quad (2)$$

где $l_{mj}^- = \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j-1/2}{2^{m-1}} \right)$ и $l_{mj}^+ = \left[\frac{j-1/2}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}} \right)$.

Наряду с двойной нумерацией (m, j) используют также простую нумерацию (k) , полагая $l_{mj} = l_k$. Связь между этими двумя способами нумерации имеет вид $k = 2^{m-1} + j$. Следует отметить, что при простой нумерации $k = 2, 3, 4, \dots$ отрезок $k = 1$ отсутствует. Таким образом, первая функция $\chi_1(x) \equiv 1$ оказывается вне сформированных групп, что практически не причиняет каких-либо неудобств.

Доказано, что функции Хаара ортогональны [5], т.е.

$$\int_0^1 \chi_i \cdot \chi_k(x) dx = 0, \quad i \neq k.$$

Более того, можно показать, что они нормированы. В самом деле,

$$\int_0^1 \chi_{mj}^2(x) dx = \int_{I_{mj}} \chi_{mj}^2(x) dx = 2^{m-1} |I_{mj}| = 1. \quad (3)$$

Как уже отмечалось, функции Хаара знакопеременны, поэтому согласно принятым в (2) обозначениям получаем

$$\int_{I_{mj}} \chi_{mj}(x) dx = 0.$$

Как показано в [5], система Хаара полна в L_p при любом $p \in [1, \infty]$. Это означает, что в L_p нет такой функции, которая была бы ортогональна ко всем $\chi_k(x)$ и не равнялась бы нулю почти во всех точках. Следовательно, функции Хаара образуют базис в L_p . Отсюда вытекает, что для любой интегрируемой на $[0, 1]$, функция $f(x)$ ряд Фурье-Хаара сходится к ней по норме, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \chi_k(x) \right\|_{L_p} = 0,$$

где

$$c_k = \int_0^1 f(x) \chi_k(x) dx \quad (4)$$

представляют собой коэффициенты Фурье-Хаара функции $f(x)$. Для каждой функции $f(x)$ из L_2 справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_0^1 f^2(x) dx.$$

При аппроксимации функций частичными суммами Хаара широко используется понятие *отрезков постоянства* семейства базисных функций Хаара. Кусочно-постоянные участки функций семейства совпадают с двоичными отрезками

$$I_{m1}^-, I_{m1}^+, \dots, I_{mj}^-, I_{mj}^+, \dots, I_{m2^{m-1}}^-, I_{m2^{m-1}}^+,$$

которые показаны на рис. 1. Считается, что начальная точка каждого горизонтального участка принадлежит этому участку, а конечная точка к нему не относится. Такой подход позволяет разделить отрезок $[0, 1]$ на 2^m двоичных отрезков, в результате чего образуется равномерная сетка с шагом $h = 1/2^m$. Введем для $n = 2^m$ отрезков постоянства обозначения $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{nn}$. В этом случае согласно лемме Хаара [5] значение частичной суммы $S_n(x)$ при $x \in \lambda_{nk}$ равно

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_k(x) = \sum_{k=1}^n \bar{f}_k(x) \eta_k(x), \quad (5)$$

где $\bar{f}_k(x) = \frac{1}{|\lambda_{nk}|} \int_{\lambda_{nk}} f(x) dx = \frac{1}{h} \int_{(k-1)h}^{kh} f(x) dx$ – среднее значение функции $f(x)$ на k -м отрезке сетки;

$\eta_k(x)$ – гест-функция, соответствующая k -му отрезку сетки.

Таким образом, аппроксимация суммами Хаара вида (5) является, в сущности, приближением функции $f(x)$ ее средними значениями. Для реализации такого приближения нет необходимости рассчитывать коэффициенты Фурье-Хаара по формуле (4). Достаточно составить таблицу средних значений $\bar{f}_k(x)$.

3. Аппроксимация парциальных сигналов обобщенными вейвлетами Хаара. Задача представления в базисе Хаара селективных сигналов, т.е. сигналов, свободных от МСИ, была решена в [8,9]. В работе [10] был дан сравнительный анализ базисов, пригодных к синтезу парциальных сигналов, т.е. сигналов с управляемой МСИ.

Рассмотрим этапы создания методики расчета коэффициентов ряда Фурье-Хаара для парциальных сигналов с финитным спектром. Для этой цели без нарушения общности в качестве сигнальной функции выберем парциальный сигнал класса 4, аналитическая запись которого имеет вид [2].

$$g_4(t) = \frac{2U \sin(\pi t/T)}{\pi (t/T)^2 - 1}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (6)$$

где T – длительность тактового интервала.

Соответствующая сигнальной функции (6) спектральная плотность описывается выражением

$$G_4(j\omega) = j2UT \sin \omega T, \quad |\omega| \leq \pi/T.$$

Выберем для аппроксимации функции (6) отрезок $[-sT, sT]$, $s = 1, 2, 3, \dots$, поскольку $g_4(t)$ обладает нечетной симметрией относительно начала системы координат, т.е. границы обрезка удобно выбрать симметричными. Далее заметим, что область определения функций Хаара (2) не совпадает с областью определения сигнальной функции (6). Для совмещения областей определения функций (2) и (6) положим $s = 4$ и перейдем к нормированному времени $x = t/T$.

Если обозначить амплитудное значение функции Хаара через A_{mj} , то условие нормирования (3) принимает вид

$$A_{mj}^2 |l_{mj}| = 1, \quad A_{mj} = \frac{1}{|l_{mj}|},$$

откуда

$$A_{mj} = \pm \sqrt{\frac{1}{|l_{mj}|}} = \pm |l_{mj}|^{-1/2} = \pm 2^{\frac{m-4}{2}}.$$

Таким образом, получено выражение, которое назовем обобщенной функцией Хаара

$$\chi_{mj}^*(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-4}{2}} & \text{при } x \in l_{mj}^-, \\ -2^{\frac{m-4}{2}} & \text{при } x \in l_{mj}^+, \\ 0 & \text{при } x \notin l_{mj}. \end{cases} \quad (7)$$

Заметим, что с учетом сделанных предположений сигнал (6) определен на длину отрезка $[-4, 4]$ длиной $|l| = 2^3$, а длина каждого двоичного отрезка l_{mi} равна $|l_{mj}| = |l|/2^{m-1} = 2^{4-m}$.

Множество обобщенных функций Хаара (7) удобно представить в виде матрицы размером $(N \times N)$, которая образуется в результате дискретизации $\chi_{mj}^*(x)$ на отрезках постоянства. Первые восемь обобщенных функций Хаара могут быть записаны в виде матрицы $\mathbf{H} \in M_8(\mathbb{R})$, которая имеет следующий вид

$$\mathbf{H}(3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{matrix} N/N \\ N/N \\ N/4 \\ N/4 \\ N/2 \\ N/2 \end{matrix} \quad (8)$$

Легко заметить, что $N/2$ коэффициентов преобразования Хаара соответствуют корреляции двух соседних точек в пространстве входных сигналов. Следующие $N/4$ коэффициентов соответствуют связям четырех соседних точек и т. д. Первые две строки матрицы (8) соответствуют всем N координатам пространства сигнальных функций. Отсюда следует, что преобразование Хаара обладает свойством как локальной, так и глобальной чувствительности. Как известно, в дискретных преобразованиях Фурье и Уолша каждый коэффициент преобразования является функцией всех координат сигнального пространства, что характерно для глобальной чувствительности, а в преобразовании Хаара это справедливо только для первых двух коэффициентов.

Легко показать, что $\det H = 1$, т.е. матрица H является невырожденной и унитарной (изометричной), так как соответствующее ей линейное преобразование сохраняет евклидову длину. Столбцы и строки в H образуют ортонормированные множества. Кроме того, матрица H^T также является унитарной.

С учетом всего сказанного запишем систему уравнений (5) в матричной форме

$$H^T C = G \quad \text{или} \quad C = (H^T)^{-1} G, \quad (9)$$

где C – вектор-столбец коэффициентов ряда Фурье-Хаара; G – вектор-столбец средних значений функции $g_4(t)$ (6) на интервалах постоянства обобщенных вейвлейтов Хаара (7).

Уравнение (9) легко решается, например, в вычислительной среде MATLAB или MathCad Professional. Результаты вычислений сведены в табл. 1.

Таблица 1 – Коэффициенты ряда Фурье-Хаара сигнальной функции

k	c_k	Значение коэффициента	k	c_k	Значение коэффициента
1	c_1	0	9	c_9	-0,004
2	c_2	0,843	10	c_{10}	0,014
3	c_3	-0,639	11	c_{11}	-0,277
4	c_4	-0,639	12	c_{12}	0,266
5	c_5	0,082	13	c_{13}	0,266
6	c_6	-0,155	14	c_{14}	-0,277
7	c_7	-0,155	15	c_{15}	0,014
8	c_8	0,082	16	c_{16}	-0,004

Коэффициенты c_k для частичной суммы

$$g_4^*(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_k^*(x), \quad (10)$$

наилучшим образом аппроксимирующей непрерывную функцию (6) на интервале $[-4T, 4T]$ в смысле среднеквадратичной нормы, можно также рассчитать по формуле

$$c_{mj} = \int_{-1/2}^{1/2} g_4(x) \chi_{mj}^*(x) dx = 2^{\frac{m-4}{2}} \left[\int_{l_{mj}^-} g_4(x) dx - \int_{l_{mj}^+} g_4(x) dx \right].$$

На рис. 2 представлены ступенчатые функции $g_4^*(x)$ при различных количествах слагаемых n в частичной сумме (10).

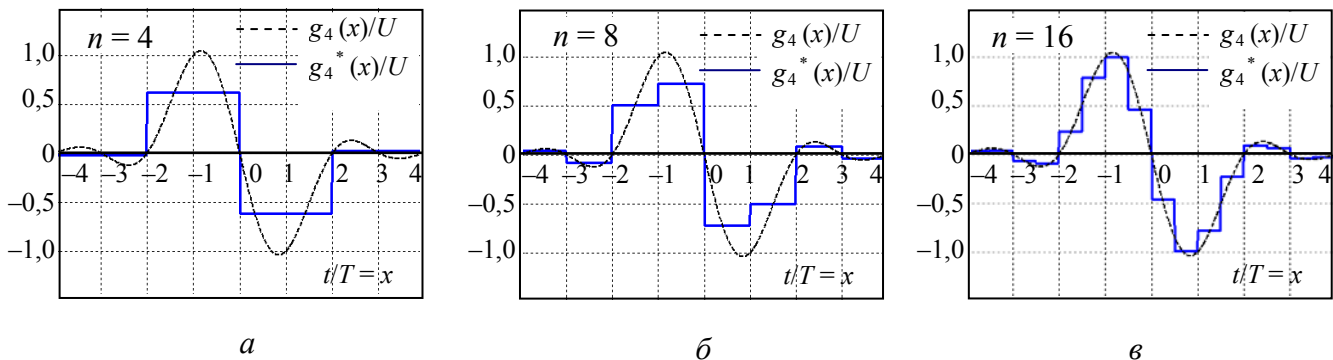


Рисунок 2 – Аппроксимация сигнальной функции класса 4 при $n = 4$ (а); $n = 8$ (б); $n = 16$ (в)

В заключение можно сделать следующие выводы. Полученные в статье результаты представляют собой удобный инструмент для реализации аппаратного синтеза сигналов-переносчиков цифровой информации, принадлежащих к множеству парциальных сигналов с финитным спектром. В качестве примера была выполнена аппроксимация обобщенными вейвлейтами Хаара парциального сигнала класса 4. Следующим шагом в реализации синтеза является выбор сглаживающего ФНЧ для уменьшения ширины спектра и минимизации возникающей в процессе фильтрации МСИ в эквидистантных нулевых точках сигнала, которые не совпадают с точками информационного отсчета и вносимой управляемой МСИ. Оценка этой дополнительной МСИ в подобных процедурах осуществляется посредством D-критерия или по раскрытию глаз-диаграммы.

Литература

1. *Пропис Дж.* Цифровая связь; пер. с англ.; под ред. Д. Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
2. *Андреев А. М.* и др. Состояние теории и практики использования сигналов с частичным откликом // *Зарубежная радиоэлектроника.* – 1992. – №9. – С. 57-83.
3. *Залманзон Л. А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
4. *Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А.* Вейвлейты и их использование // *Успехи физических наук.* – 2001. – Т.171. – №5. – С. 465-501.
5. *Соболь И. М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
6. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории; пер. с нем. – М.: Техносфера, 2004. – 280 с.
7. *Короновский А. А., Храмов А. Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.
8. *Сукачев Э. А., Ильин Д. Ю., Лабунский В. А.* Представление селективных сигналов с компактным спектром в базисе вейвлетов Хаара // *Праці УНДІРТ.* – 2005. – №3 (43). – С. 3-8.
9. *Сукачев Э. А., Ильин Д. Ю., Шкулипа П. А.* Особенности синтеза селективных сигналов для цифровых систем // *Материалы Междунар. научно-техн. конф. «Технологии цифрового вещания: стратегия внедрения в Украине» (ДВТ-2006, 29-30 июня 2006 г.).* – Одесса, 2006. – С. 165-167.
10. *Сукачев Э. А., Шкулипа П. А.* Методы аппроксимации сигнальных функций с управляемой МСИ // *Матеріали Міжнар. Наук.-техн. конф. «Технології цифрового мовлення: стратегія впровадження» (ДВТ-2007, 3-4 липня 2007 р.).* – Одеса, 2007. – С. 225-226.