УДК 681.322

Ткаченко В.Г.
Tkachenco V.G.

КЛАССИФИКАЦИЯ МОНОТОННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ СИНТЕЗЕ ЦИФРОВЫХ СХЕМ

CLASSIFICATION MONOTONOUS BOOLEAN FUNCTIONS UPON SYNTHEZIS DIGITAL CIRCUITS

Аннотация. Классификация монотонных булевых функций (МБФ) по типам позволяет значительно сократить их перебор при синтезе цифровых схем. Связь типов и функциональных схем МБФ позволяет рассматривать только те типы, которые отвечают заданным свойствам схемы. Введены понятия максимального типа, ранга типа, веса типа, мощности типа, левой и правой границы типа. В работе исследованы МБФ с типами веса 1 и 2. Рассмотрены модельные функции типов и матрицы распределения максимальных типов. Выведена явная формула для перечисления МБФ с типом веса 1, которые имеют заданное число фиктивных переменных. Выведена рекуррентная формула для нахождения максимальных типов веса 2.

Summary. The monotonous Boolean functions (MBF) classification by types allows us significantly reduce their selection upon synthesis digital circuits. The connection of MBF types and functional schemes allows us notice only those types which meet the set properties of the scheme. The concepts maximal type, rank of type, type weight, power of type, left and right bound of type are entered. Model functions of types and a matrix of maximal types distribution are considered. MBF with types weight 1 and 2 researched in this paper. The explicit formula MBF enumeration with type weight 1 and setting number of dummy variables is deduced. The recurrent formula for a finding of the maximal types of weight 2 is deduced.

В настоящее время значительно расширилась сфера применения цифровых схем. В области телекоммуникаций эти схемы широко используются при сжатии и кодировании передаваемой информации, при цифровой коммутации, в маршрутизаторах и шлюзах. В связи с этим возникает проблема синтеза надежных цифровых схем. В частности это могут быть цифровые схемы, построенные на основе монотонных булевых функций (МБФ). Такие схемы являются более надежными [1], чем схемы, построенные на основе всех булевых функций.

Важным этапом синтеза цифровых схем на основе специальных классов булевых функций является [2] комбинаторный перебор функций заданного класса. Сложность этого этапа зависит от сложности формул или алгоритмов перечисления функций этого класса и количества функций, которые необходимо перебрать. В ряде случаев формулы перечисления не обеспечивают точный перебор, а включают множество функций, не принадлежащих заданному классу. Кроме того, множества функций, которые перечисляют отдельные формулы, могут пересекаться. С целью сокращения перебора целесообразно классифицировать весь рассматриваемый класс на непересекающиеся подклассы (типы), найти формулы перечисления подклассов, а затем перечислить булевы функции, принадлежащие каждому подклассу. Если полученные при классификации подклассы связаны с некоторыми характеристиками цифровых схем, то выбор подклассов с требуемыми характеристиками сам по себе позволяет сократить перебор независимо от формул перечисления. Впервые проблема перечисления МБФ, представленных в виде элементов свободной дистрибутивной решетки, поставлена Дедекиндом. В докторской диссертации А.Д.Коршунова и его научных трудах [3, 4] МБФ от n переменных разбиваются на 5 подклассов, причем эти подклассы различны для четных и нечетных n. Там же указано, что в настоящее время известно максимальное количество МБФ только от 8 переменных, которое получено в результате многочасовой работы быстродействующей ЭВМ путем полного перебора.

Однако предложенные в классификации А.Д. Коршунова подклассы имеют следующие недостатки. Во-первых, эти подклассы охватывают не все МБФ от n переменных [4] и поэтому в работах [3, 4] найдены лишь приближенные формулы для перечисления МБФ. Во-вторых, подклассы не связаны напрямую с функциональной схемой МБФ. В-третьих, подклассов слишком мало, а потому с ростом числа переменных n число перебираемых функций резко возрастает, даже если известно к какому подклассу искомая МБФ принадлежит.

Целью настоящей работы является классификация МБФ по типам, основанная на способах описания МБФ [1] и напрямую связанной со структурой функциональных схем МБФ, которая позволяет сократить количество перебираемых функций при синтезе МБФ.

1. Классификация МБФ по типам. Рассмотрим второй «способ описания» МБФ [1] (в [1] вместо термина способ описания используется термин «представление») в виде минимальных входных наборов или соответствующего семейства подмножеств Шпернера [5]. (Любое семейство подмножеств некоторого множества называется семейством подмножеств Шпернера, если ни одно из подмножеств семейства не содержится ни в каком другом подмножестве этого же семейства.) При этом, если берется МБФ от n переменных, то произвольное подмножество семейства подмножеств Шпернера может содержать от 0 до n элементов. Каждой МБФ взаимно однозначно соответствует антицепь (множество взаимно несравнимых элементов) в булевой решетке, состоящая из минимальных элементов этой МБФ.

Назовем вектор Т = (a_0, a_1,…,a_i,…,a_n) из n + 1 компоненты, которые нумеруются слева направо от 0 до n, типом МБФ, если i-я компонента вектора a_i равна числу подмножеств из i элементов в соответствующем данной МБФ семействе подмножеств Шпернера. При этом одновременно i-я компонента вектора a_i равна числу минимальных входных наборов данной МБФ, лежащих на уровне $n – i$ булевой решетки ранга n.

Назовем число n рангом типа Т, число v ненулевых компонент назовем весом типа Т, номер i первой слева ненулевой компоненты назовем левой границей типа Т, номер j первой справа ненулевой компоненты правой границей типа Т, сумму m всех компонент типа Т назовем мощностью типа Т.

Пример 1. В качестве примера возьмем МБФ f от 5 переменных, равную единице на входных наборах 00011, 00111, 01011, 10011, 01111, 10111, 11011, 11100, 11101, 11110 и 11111 (первый способ описания МБФ). Минимальными входными наборами функции f являются наборы 00011 и 11100, первый из которых находится на уровне 3, а второй на уровне 2 булевой решетки. Отсюда соответствующее семейство подмножеств Шпернера состоит из двух подмножеств, первое из которых содержит два элемента, а второе три элемента. Значит тип Т(f) функции f равен (0, 0, 1, 1, 0, 0). Ранг этого типа n(Т) = 5, вес v(Т) = 2, левая граница i(Т) = 2, правая граница j(Т) = 3 и мощность m(Т) = 2. Такой же тип имеет и еще ряд МБФ, в частности МБФ с минимальными входными наборами 00101 и 11001.

Назовем тип T_2 = (a_n, a_{n-1},…,a_i,…,a_0) обратным к типу T_1 = (a_0, a_1,…,a_i,…,a_n). Обратные типы имеют одинаковые ранги n и веса v, но левая граница i и правая граница j данного типа преобразуются в правую границу $n – i$ и левую границу $n – j$ обратного типа. Назовем тип симметричным, если он совпадает с обратным к нему типом, т.е. $a_i = a_{n-i}$. Если МБФ f_1 имеет тип T_1, а МБФ f_2 обратный тип T_2, то тип T_2 имеет также некоторая такая МБФ f_3, что семейство подмножеств Шпернера, соответствующее f_3, получается из семейства подмножеств Шпернера, соответствующего f_1, взятием дополнения к каждому подмножеству. Отсюда следует, что количество МБФ, имеющих тип T_1, равно количеству МБФ, имеющих обратный тип T_2.

Зная тип МБФ Т ранга n, можно найти МБФ n переменных, имеющую этот тип, следующим образом. Начиная с компоненты a_j, имеющей номер j правой границы типа, построим (0, 1) матрицу [6] из m(Т) строк и n столбцов следующим образом. Первые a_j строк являются a_j последовательными двоичными числами, содержащими j единиц, начиная с наименьшего числа такого вида. Следующие a_t строк соответствуют следующей справа ненулевой компоненты a_t на позиции t. Каждая из этих строк является минимальным двоичным числом, содержащим t единиц, которое не покрывается ни одним из двоичных чисел на всех вышележащих строках, начиная с первой. Подобным образом находятся и остальные строки матрицы. Последние a_i строк представляют собой a_i двоичных чисел, содержащих i единиц, где i левая граница типа Т. В результате получен восьмой способ описания [1] функции f, имеющей тип Т, в виде (0, 1) матрицы. Назовем построенную таким образом МБФ f модельной МБФ типа Т. Произвольный вектор V из n + 1 компоненты является типом ранга n тогда и только тогда, когда по нему можно построить модельную МБФ.

Пример 2. Модельной МБФ f для типа Т = (0, 1, 0, 2, 0, 0) является МБФ

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

. Векторы (0, 1, 3, 2, 0, 0) и (0, 3, 0, 2, 0, 0) не являются типами.

Будем писать для векторов V_1 и V_2 одного ранга $V_1 \geq V_2$, если любая компонента вектора V_1 больше или равна соответствующей компоненте вектора V_2. Тогда если вектор V_1 является типом МБФ и $V_1 \geq V_2$, то вектор V_2 также является типом МБФ. Это следует из того, что восьмой способ описания функции, имеющей тип V_2, в виде (0,1) матрицы можно получить, вычеркиванием строк из модельной функции типа V_1. Отсюда следует, что для каждого ранга n должны существовать максимальные типы.

Назовем тип Т максимальным, если любой вектор V, такой, что V > Т, не является типом МБФ. Тип из примера 2 не является максимальным, а тип Т = (0, 1, 0, 4, 0, 0) является.

Будем использовать обозначения Т1(n), Т2(n, v), Т3(n, i, j), Т4(n, v, i, j), Т5(n, i), Т6(n, j), Т7(n, v, i), Т8(n, v, j) для того, чтобы подчеркнуть, что тип Т имеет указанный ранг, вес, левую и правую границы. Соответственно R1(n), R2(n, v), R3(n, i, j), R4(n, v, i, j), R5(n, i), R6(n, j), R7(n, v, i), R8(n, v, j) будут обозначать подклассы всех максимальных типов указанного вида, а K1(n), K2(n, v), K3(n, i, j), K4(n, v, i, j), K5(n, i), K6(n, j), K7(n, v, i), K8(n, v, j) количество типов в каждом из этих подклассов.

Пример 3. Приведем максимальные типы и их количества для значений n от 1 до 5. Для n = 1 R1(1) = R2(1,1) = {(1,0), (0,1)}, K1(1) = K2(1,1) = 2. Для n = 2 R1(2) = R2(2,1) = {(1,0,0), (0,2,0), (0,0,1)}, K1(2) = K2(2,1) = 3. Для n = 3 R2(3,1) = {(1,0,0,0), (0,3,0,0), (0,0,3,0), (0,0,0,1)}, R2(3,2) = {(0,1,1,0)}, K2(3,1) = 3, K2(3,2) = 1, K1(3) = 4. Для n = 4 R2(4,1) = {(1,0,0,0,0), (0,4,0,0,0), (0,0,6,0,0), (0,0,0,4,0), (0,0,0,0,1)}, R2(4,2) = {(0,1,3,0,0), (0,0,3,1,0), (0,2,1,0,0), (0,0,1,2,0), (0,1,0,1,0)}, K2(4,1) = 5, K2(4,2) = 5, K1(4) = 10. Для n = 5 R2(5,1) = {(1,0,0,0,0,0), (0,5,0,0,0,0), (0,0,10,0,0,0), (0,0,0,10,0,0), (0,0,0,0,5,0), (0,0,0,0,0,1)}, R2(5,2) = {(0,1,6,0,0,0), (0,0,0,6,1,0), (0,2,3,0,0,0), (0,0,0,3,2,0), (0,3,1,0,0,0), (0,0,0,1,3,0), (0,1,0,4,0,0), (0,0,4,0,1,0), (0,2,0,1,0,0), (0,0,1,0,2,0), (0,1,0,0,1,0), (0,0,1,7,0,0), (0,0,7,1,0,0), (0,0,2,5,0,0), (0,0,5,2,0,0), (0,0,4,4,0,0)}, R2(5,3) = {(0,1,1,2,0,0), (0,0,2,1,1,0), (0,1,3,1,0,0), (0,0,1,3,1,0)}, K2(5,1) = 6, K2(5,2) = 16, K2(5,3) = 4, K1(5) = 26.

Подклассы максимальных типов и количества из примера 3 можно найти путем перебора векторов длины n + 1 и попытки построения для них модельных МБФ. Однако с ростом ранга и веса как сам перебор, так и построение модельной МБФ резко усложняются. Вследствие этого был разработан описанный ниже метод построения подклассов максимальных типов ранга n и перечисление количества этих типов, используя некоторые подклассы максимальных типов ранга n-1 и их количества. Для этого перечисления в дальнейшем будут использоваться матрицы распределения типов ранга n. В них на пересечении строки i и столбца j находится элемент K3(n, i, j). Сумма элементов строки і равна K5(n, i), сумма элементов столбца j равна K6(n, j) и сумма элементов всей матрицы равна K1(n). На рис. 1 показаны такие матрицы для рангов 5, 4 и 3.

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	3	4	1	0
2	0	0	1	5	4	0
3	0	0	0	1	3	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0	1	2	1	0
2	0	0	1	2	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1

	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	0	1	1	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1

Рисунок 1 – Матрицы распределения типов ранга 5, 4 и 3

Также будут использоваться матрицы распределения типов ранга n и веса v с исключенными нулевыми строками и столбцами. В них на пересечении строки i и столбца j находится элемент $K4(n, v, i, j)$. Сумма элементов строки i равна $K7(n, v, i)$, сумма элементов столбца j равна $K8(n, v, j)$ и сумма элементов всей матрицы равна $K2(n, v)$. На рис. 2 показаны такие матрицы для ранга 5 веса 2 и 3.

	2	3	4
1	3	2	1
2	0	5	2
3	0	0	3

	3	4
1	2	0
2	0	2

Рисунок 2 – Матрицы распределения типов ранга 5 веса 2 и 3

2. МБФ с типом веса 1. По определению тип МБФ веса 1 имеет единственную ненулевую компоненту a_i. Это значит, что число минимальных входных наборов данной МБФ равно a_i, все они размещаются на уровне $n–i$ булевой решетки и содержат по i единиц. Соответствующее семейство подмножеств Шпернера содержит a_i подмножеств, в каждом из которых i элементов. Для типа веса 1 левая и правая границы совпадают и равны i. Поскольку на уровне $n–i$ булевой решетки по биному Ньютона содержится C_n^i элементов, то. $R4(n, 1, i, i) = \{(0, \ldots, C_n^i, \ldots, 0)\}$ и $K4(n, 1, i, i) = 1$, т.е. для каждого i от 0 до n и любого типа $T_1(n, 1, i, i) = (0, \ldots, a_i, \ldots, 0)$ имеется единственный максимальный тип $T_2(n, 1, i, i) = (0, \ldots, C_n^i, \ldots, 0)$, такой, что $T_2 \geq T_1$. Отсюда следует, что $K2(n, 1) = n + 1$, т.е. всего имеется $n + 1$ максимальный тип ранга n и веса 1. Это объясняет, почему главная диагональ матрицы распределения типов ранга n состоит из единиц. Каждый максимальный тип ранга n, веса 1 с левой границей i имеет единственная МБФ, соответствующее семейство подмножеств Шпернера которой состоит из всех C_n^i подмножеств из i элементов множества из n элементов.

При синтезе МБФ может быть заранее известно от скольких переменных МБФ зависит, а сколько переменных являются фиктивными. Нахождение формулы для количества МБФ с заданным числом фиктивных переменных позволяет сократить количество перебираемых функций. Мощность объединения $p2$ всех подмножеств семейства подмножеств Шпернера некоторой МБФ является важным параметром при синтезе МБФ, показывая от скольких переменных в действительности зависит МБФ. При этом остальные n-$p2$ переменные являются фиктивными. Для всех МБФ типа $T(n, 1, i, i) = (0, \ldots, a_i, \ldots, 0)$ значение $p2$ может меняться от некоторого минимального значения $p3$ до максимального значения $p4 = \min(n, ia_i)$.

Для нахождения значения $p3$ введем функции $\varphi 1(i, j)$ и $\varphi 2(i, j)$, где $j = a_i$ – количество множеств из i элементов, $p3 = \varphi 2(i, j)$ и $\varphi 1(i, j)$ – вспомогательная функция. При этом $p3$ не зависит от мощности n множества, из которого берутся подмножества по i элементов, и равна мощности объединения j наиболее плотно уложенных таких подмножеств. Определим $\varphi 1(i, j) = \min t(C_{i+t-1}^i \geq j)$. Тогда $\varphi 1(i, j) = t$ при $C_{i+t-2}^i + 1 \leq j \leq C_{i+t-1}^i$. Это неявное определение функции и $\varphi 1(i, j)$ находится последовательным вычислением сочетаний. Явное определение несложно найти при $i = 2$: $\varphi 1(2, j) = \min t\,(C_{t+1}^2 \geq j) = \min t\,(t(t + 1)/2 \geq j) = \min t\,(t^2 + t-2j \geq 0) = \lceil(-1 + \sqrt{1+8j})/2$. В общем случае нужно находить корень уравнения j-й степени.

Лемма 1. Минимальная мощность $p3$ объединения j множеств из i элементов $\varphi 2(i, j)$ равна $\varphi 1(i, j) + i–1$.

Доказательство. Докажем индукцией по j. При $j = 1$ имеем по определению $\varphi 1(i, 1) = 1$ для любого i. Но мощность $p3$ объединения одного множества из i элементов равна $i = \varphi 1(i, 1) + i - 1$. Пусть лемма выполняется при некотором $j - 1$, т.е. минимальная мощность $p3$ объединения $j - 1$ множеств из i элементов равна $\varphi 1(i, j–1) + i - 1$. По определению $\varphi 1(i, j)$ имеем $C_{i+\varphi 1(i,j-1)-2}^i + 1 \leq j - 1 \leq C_{i+\varphi 1(i,j-1)-1}^i$. Возможны два случая. В первом случае $j \leq C_{i+\varphi 1(i,j-1)-1}^i$ и тогда по определению φ

$1(i, j-1) = \varphi 1(i, j)$. В этом случае минимальная мощность объединения и не должна измениться, т.к. из C^{i}_{p3} возможных подмножеств были выбраны не все. Во втором случае $j = C^{i}_{i+\varphi 1(i,j-1)-1} + 1$. В этом случае по определению $\varphi 1(i, j-1) + 1 = \varphi 1(i, j)$. Но минимальная мощность объединения тогда должна увеличиться на 1, т.к. из C^{i}_{p3} возможных подмножеств были выбраны все. В обоих случаях $p3$ для j множеств из i элементов равно $\varphi 1(i, j) + i - 1$, что и требовалось доказать.

Для примера в табл. 1 приведены значения $\varphi 1(i, j)$ и $\varphi 2(i, j)$ для некоторых начальных значений i и j.

Таблица 1 – Значения функций $\varphi 1(i, j)$ и $\varphi 2(i, j)$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\varphi 1(2, j)$	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
$\varphi 2(2, j)$	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
$\varphi 1(3, j)$	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5
$\varphi 2(3, j)$	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7
$\varphi 1(4, j)$	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
$\varphi 2(4, j)$	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7

Всего на i-м уровне булевой решетки ранга n имеется $g(n, i) = C^{i}_{n}$ элементов, каждый из которых соответствует некоторому подмножеству из i элементов множества из n элементов [1]. Если из этих $g(n, i)$ подмножеств выбрать некоторые j подмножеств, то они образуют семейство подмножеств Шпернера и мощность $p2$ их объединения может находиться в пределах от $p3 = \varphi 2(i, j)$ до $p4 = \min(n, ij)$. Всего можно выбрать $C^{j}_{g(n,i)}$ таких семейств и $p2$ равно минимальному рангу булевой подрешетки, в которую вписываются j выбранных элементов исходной булевой решетки ранга n. Введем функцию $\gamma(n, i, j, p2)$, которая показывает сколько подмножеств из j элементов n-i-го уровня булевой решетки ранга n вписывается в булеву подрешетку ранга $p2$ (или другими словами в куб размерности $p2$).

Прежде, чем найти явное выражение для $\gamma(n, i, j, p2)$, введем некоторые обозначения и докажем вспомогательную лемму. Обозначим через $\rho(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ количество разбиений множества из n элементов на r пронумерованных блоков, при этом в i-м блоке содержится $n_i > 0$ элементов и $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$. Известно [7, 8], что

$$\rho(n_1, n_2, \ldots, n_r) = n!/(n_1!\, n_2! \ldots n_r!) = \binom{n}{n-n_1}\binom{n-n_1}{n-n_1-n_2}\ldots\binom{n-n_1-,,,-n_{r-2}}{n-n_1-,,,-n_{r-1}}, \qquad (1)$$

где $\binom{n}{i} = C^{i}_{n}$ – число сочетаний из n элементов по i. Из (1) видно, что в определение разбиения множества входят либо r чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$, которые являются упорядоченным разбиением числа n на r частей, либо $r-1$ различных и монотонно убывающих чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Всего существует $\rho 1(n) = C^{r-1}_{n-1}$ упорядоченным разбиений числа n на r частей. Обозначим через $\delta(n, r)$ количество всех возможных разбиений множества из n элементов на r пронумерованных блоков, если неизвестно количество элементов в каждом блоке, а известно лишь, что все блоки не пустые. В [7] $\delta(n, r)$ называется мощностью множества всех сюръективных отображений множества из n элементов на множество из r элементов и обозначается $|\mathrm{Sur}(n, r)|$. Здесь же показано, что

$$\delta(n, r) = r!\, S_{n,r}, \qquad (2)$$

где $S_{n,r}$ число Стирлинга второго рода, которое равно количеству всех возможных разбиений множества из n элементов на r неразличимых блоков. Для чисел $S_{n,r}$ известна [8] зависимость:

$$S_{n,r} = S_{n-1,r-1} + r S_{n-1,r}. \qquad (3)$$

Обозначим также через $\beta\ 1(n)$ сумму значений $\delta\ (n, r)$ при нечетных r в пределах от 1 до n, а через $\beta\ 2(n)$ сумму значений $\delta\ (n, r)$ при четных r в пределах от 1 до n.

Лемма 2. Разница между количеством разбиений $\beta\ 1(n)$ множества из n элементов на нечетное количество пронумерованных блоков и количеством разбиений $\beta\ 2(n)$ этого же множества на четное количество пронумерованных блоков равна $(-1)^{n-1}$, т.е.:

$$\beta\ 1(n) - \beta\ 2(n) = (-1)^{n-1}. \tag{4}$$

Доказательство. $\delta\ (1, 1) = 1$, $\delta\ (2, 1) = 1$, $\delta\ (2, 2) = 2$, $\beta\ 1(1) - \beta\ 2(1) = 1 - 0 = 1$. $\beta\ 1(2) - \beta\ 2(2) = 1 - 2 = -1$. Следовательно, для значений $n = 1$ и $n = 2$ (4) выполняется. Допустим, что (4) также выполняется при всех $m < n$, т.е. $\beta\ 1(n-1) - \beta\ 2(n-1) = (-1)^{n-2}$. Тогда, используя определения $\beta\ 1(n)$, $\beta\ 2(n)$, (2) и (3), получим:

$$\beta\ 1(n) = \sum_{t=1}^{[(n+1)/2]} (2t-1)!\ S_{n,2t-1} = \sum_{t=1}^{[(n+1)/2]} (2t-1)!\,(S_{n-1,2t-2} + (2t-1)\ S_{n-1,2t-1}) \text{ и} \tag{5}$$

$$\beta\ 2(n) = \sum_{t=1}^{[n/2]} (2t)!\ S_{n,2t} = \sum_{t=1}^{[n/2]} (2t)!\,(S_{n-1,2t-1} + 2t\ S_{n-1,2t}). \tag{6}$$

Вычитая из (5) выражение (6) получим:

$$\beta\ 1(n) - \beta\ 2(n) = \sum_{t=1}^{[(n+1)/2]} ((2t-1)! - (2t-2)!(2t-2))\ S_{n-1,2t-2} + \sum_{t=1}^{[(n+1)/2]} ((2t-1)!\,(2t-1) - (2t)!)\ S_{n-1,2t-1} =$$

$$= \sum_{t=1}^{[(n-1)/2]} (2t)!\ S_{n-1,2t} - \sum_{t=1}^{[(n+1)/2]} (2t-1)!\ S_{n-1,2t-1} = \beta\ 2(n-1) - \beta\ 1(n-1) = (-1)^{n-1},$$

что и требовалось доказать.

Теперь найдем явное выражение для $\gamma\ (n, i, j, \text{p}2)$.

Лемма 3. На n-i-м уровне булевой решетки ранга n можно выбрать $\gamma\ (n, i, j, p2) = C_n^{p2} \sum_{t=p3}^{p2} (-1)^{p2-t} C_{p2}^{t}\, C_{g(t,i)}^{j}$ подмножеств из j элементов, которые вписываются в булеву подрешетку ранга $p2$. Другими словами существует $\gamma\ (n, i, j, p2)$ МБФ от n переменных ($p2$ из которых не являются фиктивными), которым соответствует семейство из j подмножеств Шпернера по i элементов.

Доказательство. Так как $p2$ меняется от $p3$ до $p4$, то $\sum_{p2=p3}^{p4} \gamma\,(n, i, j, p2) = C_{\text{g(n,i)}}^{j}$, где $g(n, i) = C_n^i$. С другой стороны,

$$\gamma\ (n, i, j, p2) = C_n^{p2}\ \gamma\ (p2, i, j, p2). \tag{7}$$

Отсюда получаем:

$$\gamma\ (n, i, j, p4) = C_{g(n,i)}^{j} - \sum_{p2=p3}^{p4-1} C_n^{p2} \gamma\,(p2, i, j, p2). \tag{8}$$

В частности:

$$\gamma\ (p3, i, j, p3) = C_{g(n,i)}^{j}. \tag{9}$$

Выражение (8) является рекуррентным. Однако к каждому $\gamma\ (p2, i, j, p2)$ его можно применять повторно, пока используя (9) мы не избавимся от всех выражений, содержащих γ.

В результате после приведения подобных членов и применения леммы 2 получаем:

$$\gamma\ (p2, i, j, p2) = C_{g(p2,i)}^{j} - \sum_{t=p3}^{p2-1} C_{p2}^{t}\, C_{g(t,i)}^{j} (\beta\ 1(p2-t) - \beta\ 2(p2-t)) = C_{g(p2,i)}^{j} + \sum_{t=p3}^{p2-1} (-1)^{p2-t} C_{p2}^{t}\, C_{g(t,i)}^{j} =$$

$$= \sum_{t=p3}^{p2} (-1)^{p2-t} C_{p2}^{t}\, C_{g(t,i)}^{j}. \tag{10}$$

В выражении (10) $\beta 1(p2-t)$ и $\beta 2(p2-t)$ представляются в виде суммы произведений четного и нечетного числа сочетаний соответственно (как в (1)). Подставляя полученное выражение в (7), получим искомое выражение:

$$\gamma(n, i, j, p2) = C_n^{p2} \sum_{t=p3}^{p2} (-1)^{p2-t} C_{p2}^{t} C_{g(t,i)}^{j}, \tag{11}$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Найдем сколько МБФ, порожденных 4 минимальными элементами, расположенными на седьмом уровне булевой решетки ранга 9 зависят только от 7 переменных (в силу двойсявенности [1] столько же МБФ, порожденных 4 минимальными элементами, будет на втором уровне этой решетки). Имеем $n = 9$, $i = 2$, $j = 4$, $p2 = 7$, $p3 = \varphi 2(2,4) = 4$. Отсюда $\gamma(9, 2, 4, 7) = C_9^7(-C_7^4 C_6^4 + C_7^5 C_{10}^4 - C_7^6 C_{15}^4 + C_{21}^4) = 36(-35 \cdot 15 + 21 \cdot 210 - 7 \cdot 1365 + 5985) = 36(-525 + 4410 - 9555 + 5985) = 36(10395 - 10080) = 36 \cdot 315 = 11340$.

3. Типы МБФ веса 2. По определению тип МБФ веса 2 имеет две ненулевые компоненты a_i. и a_j . Номер i первой компоненты является левой границей типа, а номер j второй компоненты его правой границей. Семейство подмножеств Шпернера (второй способ описания МБФ) МБФ, имеющей этот тип, состоит из $a_i + a_j$ подмножеств двух видов: a_i из них содержит по i элементов и a_j по j элементов. Проще всего задача нахождения максимальных типов веса 2 решается тогда, когда $i = 1$ (или $j = n - 1$).

Лемма 4. Существует $n - j$ максимальных типов веса 2 вида $(0, a_1,\ldots,a_j,\ldots)$, где $s = a_1$ может меняться от 1 до $n - j$, а $a_j = C_{n-s}^{j}$ (или $n - i$ максимальных типов веса 2 вида $(\ldots, a_i,\ldots, a_{n-1}, 0)$, где $s = a_{n-1}$ может меняться от 1 до i, а $a_i = C_{n-s}^{n-i}$).

Доказательство. Минимальная мощность $p3$ объединения a_j подмножеств из j элементов равна $\varphi 2(j, a_j)$ (лемма 2). Если $a_j = 1$, то $p3 = j$ и существует не более n-j подмножеств из одного элемента, не содержащихся ни в одном из подмножеств объединения. С другой стороны, минимальная мощность $p3$ объединения $s = a_1$ подмножеств из 1 элемента равна s и максимально в множестве из n элементов существует не более C_{n-s}^{j} подмножеств из j элементов, не содержащих ни одного из подмножеств этого объединения. Для типа $(\ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}, 0)$ обратным типом является тип $(0, a_{n-1}, \ldots, a_i,\ldots)$. Здесь $s = a_{n-1}$ может меняться от 1 до $n - (n - i) = i$, а $a_i = C_{n-s}^{n-i}$, так как правая граница $j = n - i$. Это завершает доказательство леммы.

Следствие 1. Для типов любого ранга $n \geq 3$ существует единственный максимальный тип веса 2 равный $(0, 1, \ldots, 1, 0)$, где $a_1 = a_{n-1} = 1$,а остальные компоненты равны 0.

Пример 5. Подкласс R4(6, 2, 1, 2) типов T4(6, 2, 1, 2) состоит из 4 типов: (0, 1, 10, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 6, 0, 0, 0, 0), (0, 3, 3, 0, 0, 0, 0), (0, 4, 1, 0, 0, 0, 0). Подкласс *R*4(6, 2, 1, 3) состоит из 3 типов: (0, 1, 0, 10, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 4, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 1, 0, 0, 0). Подкласс *R*4(6, 2, 1, 4) состоит из 2 типов: (0, 1, 0, 0, 5, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 1, 0, 0). Подкласс R4(6, 2, 1, 5) состоит из одного типа (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0).

В общем случае для нахождения максимальных типов T4(n, 2, i, j) веса 2 сначала по компоненте a_j найдем максимальное значение компоненты a_i как функцию $h(n, j, a_j, i)$. При этом объединение B подмножеств из j элементов из семейства подмножеств Шпернера так же, как и при $i = 1$, должно иметь минимальную мощность $p3 = \varphi 2(j, a_j)$. Здесь можно рассмотреть 3 случая. В первом случае $a_j = C_{p3}^{j}$. В этом случае объединение A подмножеств из i элементов из семейства подмножеств Шпернера состоит из всех подмножеств по i элементов множества из n элементов, мощность пересечения t которых с множеством B меньше i. При заданном t имеем $C_{p3}^{t} C_{n-p3}^{i-t}$ подмножеств из i элементов, где t может быть в пределах от $t1 = \max(0, p3 + i - n)$ до $i - 1$. Всего в первом случае:

$$a_i = h(n, j, a_j, i) = \sum_{t=t1}^{i-1} C_{p3}^{t} C_{n-p3}^{i-t} \tag{12}$$

таких подмножеств. Во втором случае имеем $p3 = \varphi 2(j, a_j) = n$. Тогда согласно определению $\varphi 2$ и тому, что подмножества из j элементов имеют наиболее плотную укладку, среди a_j подмножеств найдется $r = C_{n-1}^{j}$, мощность объединения $B1$ которых равна $n - 1$. При этом остальные $a_j - r$ подмножества из j элементов имеют общий элемент $b2 \in B - B1$. Каждое из a_i подмножеств из i элементов также должно содержать элемент $b2$ (иначе оно является частью одного из r подмножеств) и при этом не являться частью ни одного из $a_j - r$ подмножества из j элементов. Исключая элемент $b2$ из всех a_i подмножеств из i элементов и из $a_j - r$ подмножества из j элементов, а также исключая r подмножеств из j элементов, получим:

$$a_i = h(n, j, a_j, i) = h(n-1, j-1, a_j - C_{n-1}^{j}, i-1). \tag{13}$$

В третьем случае в состав a_i подмножеств из i элементов входят как подмножества, не являющиеся частью объединения B подмножеств из j элементов, так и являющиеся его частью (мощность объединения B равна $p3 = \wp 2(j, a_j)$). Количество подмножества, не являющихся частью объединения B находится по формуле (12), а количество подмножеств являющихся частью объединения B находится по модифицированной формуле (13). В результате получаем:

$$a_i = h(n, j, a_j, i) = \left(\sum_{t=t1}^{i-1} C_{p3}^{t}\, C_{n-p3}^{i-t}\right) + h(p3-1, j-1, a_j - C_{p3-1}^{j}, i-1). \quad (14)$$

Формулы (12) и (13) являются частными случаями формулы (14), причем формула (13) получается при $p3 = n$ сразу, так как $t1 = i$, а формула (12) после ряда итераций.

Вычисление для произвольного a_j значения $a_i = h(n, j, a_j, i)$ по формуле (14) не дает гарантии, что тип $T_1 = (\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots)$ является максимальным. Однако, если выполнить это вычисление и для типа T_1 и для обратного типа $T_2 = (\ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots)$, то такая максимальность гарантируется.

Лемма 5. Тип $T4(n, 2, i, j) = (\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots)$ является максимальным тогда и только тогда, когда $a_i = h(n, j, a_j, i)$ и $a_j = h(n, n-i, a_i, n-j)$.

Доказательство. Для каждого типа существует единственный обратный тип. Поэтому из условия леммы и определения функции h следует, что если увеличить в типе $T4(n, 2, i, j)$ компоненту a_i либо a_j на 1, то полученный вектор уже не будет типом. Это означает, что тип $T4(n, 2, i, j)$ является максимальным, что и требовалось доказать.

Пример 6. Для типа $T4(6, 2, 2, 3) = (0, 0, a_2, 5, 0, 0, 0)$ найдем максимально возможное значение $a_2 = h(6, 3, 5, 2)$. Вычисляя $p3 = \wp 2(3, 5) = 5$, $t1 = \max(0, 5 + 2 - 6) = 1$ и $C_{5-1}^{3} = 4$, получим из (14) $a_2 = h(6, 3, 5, 2) = C_5^1 C_{6-5}^{2-1} + h(4, 2, 1, 1) = 5 + 2 = 7$. Чтобы проверить максимальность типа $T = (0, 0, 7, 5, 0, 0, 0)$, для типа $T4(6, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, a_3, 7, 0, 0)$ найдем максимально возможное значение $a_3 = h(6, 4, 7, 3)$. Здесь $p3 = \wp 2(4, 7) = 6$ и $C_{6-1}^{4} = 5$. Тогда из (13) $a_3 = h(6, 4, 7, 3) = h(5, 3, 2, 2)$. Здесь $p3 = \wp 2(3, 2) = 4$, $t1 = \max(0, 4 + 2 - 5) = 1$ и $C_{4-1}^{3} = 1$. Тогда из (14) $h(5, 3, 2, 2) = C_4^1 C_{5-4}^{2-1} + h(3, 2, 1, 1) = 4 + 1 = 5$. Отсюда тип $T = (0, 0, 7, 5, 0, 0, 0)$ является максимальным.

4. Типы МБФ и функциональные схемы МБФ. Типы МБФ напрямую связаны с функциональными схемами МБФ. В [1] показано, что каждая МБФ представима в виде дизъюнктивной формы (четвертый способ описания МБФ), т.е в виде дизъюнкции конъюнкций. При этом каждая конъюнкция взаимно однозначно соответствует некоторому минимальному элементу МБФ и зависит от стольких переменных, сколько элементов имеется в соответствующем подмножестве из семейства подмножеств Шпернера (второй способ описания МБФ). Такая дизъюнктивная форма является минимальной, так как ни одну конъюнкцию (или соответствующий минимальный элемент МБФ) исключить из этой формы нельзя. Пусть некоторая МБФ f имеет тип $T4(n, v, i, j)$ ранга n веса v, с левой границей i и правой границей j. Тогда дизъюнктивная форма f зависит от n переменных, часть из которых могут быть фиктивными. По количеству переменных в одной конъюнкции в этой форме содержатся конъюнкции v видов. При этом минимальная конъюнкция зависит от i переменных, а максимальная от j переменных. Всего в дизъюнктивной форме имеется $m(T4(n, v, i, j)$ конъюнкций, где m – мощность типа $T4(n, v, i, j)$, т.е. сумма всех его компонент.

На функциональной схеме каждой конъюнкции соответствует элемент И, а каждой дизъюнкции – элемент ИЛИ. Всего для построения функциональной схемы МБФ f надо m элементов И по количеству входов v видов. Элемент И с наименьшим количеством входов имеет i входов, а с наибольшим – j входов. Количество элементов ИЛИ равно одному, если имеется элемент ИЛИ с m входами. Если же элемент ИЛИ максимально может иметь q входов, то требуется $(q-1) : m + 2$ элементов ИЛИ, где $(q-1) : m$ –целая часть от деления $q-1$ на m.

При синтезе логической функции f обычно используют неполное задание функции, т.е. известны некоторые входные наборы, на которых f принимает значение 1 и некоторые входные наборы, на которых f принимает значение 0, а на остальных входных наборах значение f произвольно. При использовании типов можно дополнительно задать количество возможных видов элементов И, а также минимальное и максимальное количество входов у этих элементов. Например, пусть требуется синтезировать МБФ f от 7 переменных, используя только элементы И с 3 и 4 входами. Тогда сначала находим $K4(7, 2, 3, 4) = 19$ максимальных типов из подкласса $R4(7, 2, 3, 4)$, по ним находим все 393 типа меньших или равных этим максимальным. Для каждого типа $T4(7, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, a_3, a_4, 0, 0, 0)$ находим возможные (0,1)-матрицы, содержащие $a_3 + a_4$ строк и 7 столбцов. В этих матрицах верхние a_4 строк содержат по 4 единицы и упорядочены по возрастанию двоичного кода строки. Нижние a_3 строк содержат по 3 единицы и также упорядочены по возрастанию двоичного кода строки. Основным свойством этих матриц является то, что ни одна строка не покрывается другой строкой. Поиск заканчивается как только будет найдена (0,1)-матрица, которая в качестве строк содержит все входные наборы из тех, на которых функция f равна 1, и не содержит в качестве строки ни одного входного набора из тех, на которых функция f

равна 0. В большинстве случаев нет необходимости строить все возможные (0,1) матрицы и находить все типы, так как поиск заканчивается раньше.

Если при синтезе МБФ f требуется построить функциональную схему для конъюнктивной формы (пятый способ описания МБФ), то вместо минимальных элементов f, рассматриваются ее максимальные элементы [1]. При этом типу, найденному по минимальным элементам МБФ f, соответствует обратный тип по максимальным элементам для двойственной функции. Так как, в приведенном выше примере все обратные типы также принадлежат подклассу R4(7, 2, 3, 4), то нужно находить те же самые (0,1)-матрицы. Отличие заключается в том, что в этом случае искомая (0,1)-матрица должна в качестве строк содержать все максимальные входные наборы, на которых функция f равна 0, и не содержать в качестве строки ни одного входного набора, на которых функция f равна 1.

Если при синтезе известны некоторые сведения о структуре синтезируемой схемы (например, количество видов элементов И по числу входов или минимальное и максимальное число входов у элементов И), то количество перебираемых функций сокращается за счет того, что некоторые типы не удовлетворяет этим условиям. Так как число типов быстро растет с ростом числа переменных, то число типов, которые не нужно рассматривать, также растет.

Пример 7. На рис. 3 показана структура функциональной схемы для дизъюнктивной формы МБФ f типа T4(6, 3, 2, 4) = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 0). В рассматриваемом типе имеются три ненулевые компоненты, расположенные на позициях 2, 3 и 4. Так как все эти компоненты равны 1, то в функциональной схеме МБФ данного типа имеется три элемента И. Первый элемент И имеет два входа, второй три и третий четыре. Переменные на входах не обозначены, так как данный тип имеет некоторое множество МБФ с различными переменными из множества $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ на входах. Необходимым и достаточным условием является то, чтобы множество переменных на входе одного элемента И не входило в множество переменных на входе любого другого элемента И.

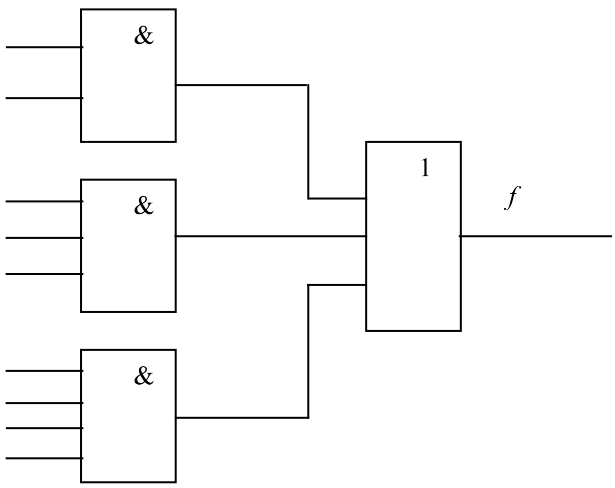

Рисунок 3 – Структура функциональной схемы для типа T4(6, 3, 2, 4) = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)

В заключение отметим следующее. Предложенная классификация позволяет рассматривать только те типы, которые соответствуют заданным свойствам синтезируемой схемы. Используя эту классификацию можно вывести достаточно удобные в применении формулы перечисления типов, которые не приведены в данной статье из-за недостатка места. Нерешенными задачами остаются: нахождение оптимальных алгоритмов перебора (0,1)-матриц и выражений для их количества, а значит и полное решение проблемы Дедекинда.

Литература

1. *Ткаченко В.Г.* Отказы цифровых схем и представления монотонных булевых функций // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – Одеса, 2006. – №2. – С. 54 – 69.
2. *Самофалов А.Г., Марковский А.П.* Комбинаторный подход к синтезу специальных классов булевых функций // Электронное моделирование. – 2004. – Т.26. – №3. – С. 27– 40.
3. *Коршунов А.Д.* Монотонные булевы функции // УМН. – 2003. – Т.58. – Вып.5. – С. 89 –162.
4. *Коршунов А.Д.* О числе и строении монотонных булевых функций // Дискретная математика и ее приложения: Сб. лекций по дискретной математике и ее приложениям. – М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001.– С. 34 –58.
5. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384 с.
6. *Тараканов В.Е.* Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. – М.: Наука, 1985. – 192 с.

7. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 558 с.
8. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Наука, 1975. – 480 с.