УДК 517.925

Шарай Н.В.
Sharay N.V.

ІСНУВАННЯ АНАЛІТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НАПІВ'ЯВНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З СИНГУЛЯРНИМ ЖМУТКОМ МАТРИЦЬ

THE EXISTENCE OF ANALYTIC SOLUTION OF SEMI-OBVIOUS SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A CHANGING MATRIX BUNDLE

Аннотація. Досліджується існування аналітичних розв'язків напів'явної системи звичайних диференціальних рівнянь з сингулярним жмутком матриць. Одержано достатні умови існування аналітичних розв'язків задачі Коші навколо особливої точки.

Summary. We study the problem of existence of analytic solutions of a certain semi-explicit system of ordinary differential equations and obtain sufficient conditions for existence of case of the analytical solutions of the Cauchy problem in a vicinity of a singular point.

Розглядається задача Коші

$$\begin{cases} A(z)W' = B(z)W + F(z,W) & (1)\\ W(z) \to 0, z \to 0, & (2) \end{cases}$$

де однозначні матриці $A, B: D \to G_1 \times G_2$ розміру $m \times n$ аналітичні в області $D \subseteq C$; $0 \in D$ або $0 \in \partial D; G_1 \times G_2 \subseteq C^{m\times n}$, $(0,0) \in \partial(G_1 \times G_2)$; однозначна функція $F : D \times G_2 \to G_1$ аналітична в $D \times G_2$. Припустимо, що $m \neq n$, т.ч. жмуток матриць $A(z)\lambda + B(z)$ є сингулярним.

Дослідження систем диференціальних рівнянь (1) для лінійних систем у випадку сталого жмута матриць було покладено Ф. Гантмахером. У випадку, коли жмуток матриць $A(x)\lambda + B(x)$ є змінним, слід відзначити роботи А.М. Самойленка, М.І. Шкиля, В.П. Яковця [1], S. Campbell [2], Ю.Є. Боярінцева, В. Чистякова [3], R. März [4] та багатьох інших. В комплексній області такі дослідження проведені, в основному, для систем спеціального вигляду в роботах P. Bungart, W. Strodt, Г. Самкової [5], Н. Крапиви та інших.

Метою цієї роботи є продовження дослідження питань про існування аналітичних розв'язків задачі Коші (1) – (2), якщо z змінюється в деякій області з особливою точкою $z = 0$ на межі, задовольняючій умові $W'(z) \to 0$ при $z \to 0$.

В роботі [6] наведена лема про ранг, у відповідності з якою, якщо матриця $A(z)$ аналітична в однозв'язній області $D \subset C, (z=0) \in D; A : D \to C^{m\times n}$ і $rang A(0) = k, 0 < k \leq \min(m,n)$, тоді існує область $D_{10} = \{z : 0 < |z| < R_1\}$ або $D_1 = \{z : |z| < R_1\}$ з D, така, що ранг матриці $A(z)$ залишається сталим при $z \in D_{10}$ або $z \in D_1$ і дорівнює k_1, де $k \leq k_1 \leq \min(m,n)$.

У відповідності з лемою розглянемо випадок, коли $m < n$, $rang\, A(z) = n$ при $z \in D_1$, матриці $A(z)$, $B(z)$ і вектор $F(z, W)$ подані у вигляді:

$$A(z) = (A_1(z) \quad A_2(z));\ B(z) = (B_1(z) \quad B_2(z));\ Y(z) = \begin{pmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{pmatrix};\ f(z,Y) = \widetilde{f}(z, Y_1, Y_2), \tag{3}$$

де $A_1 : D_1 \to C^{m\times m}$; $\det A_1(z) \neq 0\ \forall z \in D_1$; $B_1 : D_1 \to C^{m\times m}; Y_1 \in C^m$; $\widetilde{f} : D_1 \times G_{21} \times G_{22} \to C^m$; $G_{21} \times G_{22} \subseteq C^n$.

Система (1) має бути переписана у вигляді:

$$Y_1' = A_1^{-1}(z)B_1(z)Y_1 + A_1^{-1}(z)(B_2(z)Y_2 - A_2(z)Y_2') + A_1^{-1}(z)\widetilde{f}(z, Y_1, Y_2). \tag{4}$$

Через $H_{1.k}^q$ позначимо клас аналітичних в області D_{10} функцій виміру q, які в точці $z = 0$ мають полюс k-го порядку, $k \in N$. У випадку, коли функція $Y_2(z)$ належить класу $H_{1.k}^{n-m}$, подамо її у вигляді:

$$Y_2(z) = z^{-k}\widetilde{Y}_2(z),\ Y_2'(z) = -kz^{-k-1}\widetilde{Y}_2(z) + z^{-k}\widetilde{Y}_2'(z), \tag{5}$$

де вектор $\widetilde{Y}_2(z)$ є аналітичним всюди в області D_1.

Подамо функцію $\widetilde{f}(z, Y_1, z^{-k}\widetilde{Y}_2)$ в вигляді $\widetilde{f}(z, Y_1, z^{-k}\widetilde{Y}_2) = z^{-kl}\widetilde{F}(z, Y_1, \widetilde{Y}_2)$, де функція $\widetilde{F}(z, Y_1, \widetilde{Y}_2)$ аналітична в області $D_1 \times G_{21} \times G_{22}$, тоді система (4) у відповідності з (5) набуває виду:

$$z^{kl+1}Y_1' = z^{kl+1}P(z)Y_1 + z^{k(l-1)+1}Q(z)\widetilde{Y}_2 + kz^{k(l-1)}R(z)\widetilde{Y}_2 - z^{k(l-1)+1}R(z)\widetilde{Y}_2' + zF(z, Y_1, \widetilde{Y}_2), \tag{6}$$

де $P(z)=A_1^{-1}(z)B_1(z); Q(z)=A_1^{-1}(z)B_2(z); R(z)=A_1^{-1}(z)A_2(z);\ F(z,Y_1,\widetilde{Y}_2)=A_1^{-1}(z)\widetilde{F}(z,Y_1,\widetilde{Y}_2)$.

Для формулювання теорем запровадимо деякі поняття.

Означення. Нехай на множині $A=\{(t,\nu): t\in(0,t_1], \nu\in[\nu_1,\nu_2], \nu_1<\nu_2\}$ визначені невід'ємні функції $p(t,\nu)$ и $g(t,\nu)$. Будемо казати, що функція $p(t,\nu)$ має властивість Q відносно функції $g(t,\nu)$ на множині A, якщо для кожного $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$, функція $p(t,\nu)$ є функцією більш високого порядку малості, ніж $g(t,\nu)$ при $t\to+0$.

Означення.

Нехай функції $\overset{(1)}{\varphi}(z)=col(\overset{(1)}{\varphi}_1(z),...,\overset{(1)}{\varphi}_m(z)),\quad \overset{(1)}{\varphi}: E\to C^m,\ \overset{(2q)}{\varphi}(z)=col(\overset{(2q)}{\varphi}_1(z),...,\overset{(2q)}{\varphi}_{n-m}(z)),$ $\overset{(2q)}{\varphi}: E\to C^{n-m},\quad q=0{,}1$ аналітичні в $E\subset C, 0\in\partial E,$ і такі, що при $(t,\nu)\in A$ компоненти $\overset{(1)}{\varphi}(z(t,\nu))$, $\overset{(2q)}{\varphi}(z(t,\nu))\ (q=0{,}1)$, де $z=te^{i\nu}$, мають вид:

$$\overset{(1)}{\varphi}_j(z(t,\nu))=\overset{(1)}{\psi}_j(t,\nu)e^{i\overset{(1)}{\eta}_j(t,\nu)},\ j=\overline{1,m};\ \overset{(2q)}{\varphi}_j(z(t,\nu))=\overset{(2q)}{\psi}_j(t,\nu)e^{i\overset{(2q)}{\eta}_j(t,\nu)},\ j=\overline{1,n-m},$$

причому $\overset{(r)}{\psi}_j(t,\nu)>0, (\overset{(r)}{\psi}_j(t,\nu))'_t>0, (\overset{(r)}{\psi}_j(t,\nu))'_\nu>0,\ \overset{(r)}{\psi}_j(+0,\nu)=0, r=1$ або $r=2q, q=0{,}1$.

Будемо вважати, що система (6) має властивість S_2 *відносно функцій* $\overset{(1)}{\varphi}(z(t,\nu))$, $\overset{(2q)}{\varphi}(z(t,\nu))\ (q=0{,}1)$, *якщо виконано*:

1а) $(\overset{(1)}{\psi}_1(t,\nu))'_t=o(|p_{11}(z(t,\nu))|\overset{(1)}{\psi}_1(t,\nu))$ *при* $t\to+0$ *рівномірно відносно* $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$;

1б) функції $(\overset{(1)}{\psi}_1(t,\nu))'_\nu$ *мають властивість* Q *відносно* $t|p_{11}(z(t,\nu))|\overset{(1)}{\psi}_1(t,\nu)$ *при* $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$ *рівномірно відносно* $t\in(0,t_0]$;

2а) $|p_{ji}(z(t,\nu))|\overset{(1)}{\psi}_i(t,\nu)=o((\overset{(1)}{\psi}_j(t,\nu))'_t)\ (i,j=\overline{2,m})$ *при* $t\to+0$ *рівномірно відносно* $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$;

2б) $t|p_{ji}(z(t,\nu))|\overset{(1)}{\psi}_i(t,\nu)\ \ (i,j=\overline{2,m})$ *мають властивість* Q *відносно* $(\overset{(1)}{\psi}_j(t,\nu))'_\nu$;

3а) $|p_{1i}(z(t,\nu))|\overset{(1)}{\psi}_i(t,\nu)=o(|p_{11}(z(t,\nu))|\overset{(1)}{\psi}_1(t,\nu))\ (i=\overline{2,m})$ *при* $t\to+0$ *рівномірно відносно* $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$;

3б) $|p_{1i}(z(t,\nu))|\overset{(1)}{\psi}_i(t,\nu)\ \ (i=\overline{2,m})$ *мають властивість* Q *відносно* $|p_{11}(z(t,\nu))|\overset{(1)}{\psi}_1(t,\nu)$;

4а) $t^{k(l-1)+1}|q_{1i}(z(t,\nu))|\left|\overset{(20)}{\varphi}_i(z(t,\nu))\right|=o(t^{kl+1}|p_{11}(z(t,\nu))|\left|\overset{(1)}{\varphi}_1(z(t,\nu))\right|)(i=\overline{1,n-m})$ *при* $t\to+0$, $t^{k(l-1)+q}|r_{1i}(z(t,\nu))|\left|\overset{(2q)}{\varphi}_i(z(t,\nu))\right|=o(t^{kl+1}|p_{11}(z(t,\nu))|\left|\overset{(1)}{\varphi}_1(z(t,\nu))\right|)(i=\overline{1,n-m})$ *при* $t\to+0$ *рівномірно відносно* $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$;

4б) $t^{k(l-1)+1}|q_{1i}(z(t,\nu))|\left|\overset{(20)}{\varphi}_i(z(t,\nu))\right|$ *і* $t^{k(l-1)+q}|r_{1i}(z(t,\nu))|\left|\overset{(2q)}{\varphi}_i(z(t,\nu))\right|$ *мають властивість* Q *відносно* $t^{kl+1}|p_{11}(z(t,\nu))|\left|\overset{(1)}{\varphi}_1(z(t,\nu))\right|,\ i=\overline{1,n-m}$;

5а) $t^{k(l-1)+1}|q_{ji}(z(t,\nu))|\left|\overset{(20)}{\varphi}_i(z(t,\nu))\right|=o(t^{kl+1}(\overset{(1)}{\psi}_j(z(t,\nu)))'_t)$; $t^{k(l-1)+q}|r_{ji}(z(t,\nu))|\left|\overset{(2q)}{\varphi}_i(z(t,\nu))\right|=o(t^{kl+1}(\overset{(1)}{\psi}_j(z(t,\nu)))'_t)(k=\overline{1,n-m}, j=\overline{2,m}, q=0{,}1)$ *при* $t\to+0$ *рівномірно відносно* $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$;

5б) $t^{k(l-1)+1}\left|q_{ji}(z(t,\nu))\right|\left|\overset{(20)}{\varphi}_i(z(t,\nu))\right|$ *і* $t^{k(l-1)+q}\left|r_{ji}(z(t,\nu))\right|\left|\overset{(2q)}{\varphi}_i(z(t,\nu))\right|$ $(i=\overline{1,n-m}, j=\overline{2,m}, q=0{,}1)$

мають властивість Q *відносно* $t^{kl}(\overset{(1)}{\psi}_j(z(t,\nu)))'_\nu$.

При фіксованому $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$ покладемо

$$F(z(t,\nu),Y_1(z(t,\nu)),\widetilde{Y}_2(z(t,\nu)))=F_{1\nu}(t,Y_{11}(t),Y_{12}(t),\widetilde{Y}_{21}(t),\widetilde{Y}_{22}(t))+$$
$$+iF_{2\nu}(t,Y_{11}(t),Y_{12}(t),\widetilde{Y}_{21}(t),\widetilde{Y}_{22}(t)),\ Y_1(z(t,\nu))=Y_{11}(t)+iY_{12}(t),\ \widetilde{Y}_2(z(t,\nu))=\widetilde{Y}_{21}(t)+i\widetilde{Y}_{22}(t).$$

Позначимо як $\Omega(t,Y_1,\tau)$ множину:

$$\Omega(t,Y_1,\tau)=\left\{(t,Y):Y_{11j}^2(t)+Y_{12j}^2(t)<\tau_j^2\left|\overset{(1)}{\varphi}_j(z(t,\nu))\right|^2,\tau_j>0, j=\overline{1,m}, t\in(0,t_1)\right\}.$$

Позначимо як $\widetilde{\Omega}(t,\widetilde{Y}_2)$ множину функцій $(\widetilde{Y}_{2kj})^{(q)}$, які є функціями одного порядку малості з функціями $\left|\overset{(2q)}{\varphi}_j(z(t,\nu))\right|^2$, $j=\overline{1,n-m}$, $k=1{,}2$, $q=0{,}1$ при $t\to+0$ рівномірно відносно $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$.

Означення. Будемо вважати, що система (6) має властивість M_2 відносно функції $F(z,Y)$, $F_j=F_{1j}+iF_{2j}$, $j=\overline{1,m}$, для кожного довільного фіксованого $\widetilde{Y}_2(z(t,\nu))$ з множини $\widetilde{\Omega}$, якщо виконано:

1) для кожного фіксованого $Y_1(z(t,\nu))$ з множини $\Omega(t,Y_1,\tau)$ виконано:

$$tF_{k1\nu}(t,Y_{11}(t),Y_{12}(t),\widetilde{Y}_{21}(t),\widetilde{Y}_{22}(t))=o(t^{kl+1}\left|p_{11}(z(t,\nu))\right|\overset{(1)}{\psi}_1(t,\nu)), k=1{,}2, t\to+0,$$
$$tF_{kj\nu}(t,Y_{11}(t),Y_{12}(t),\widetilde{Y}_{21}(t),\widetilde{Y}_{22}(t))=o(t^{kl+1}(\overset{(1)}{\psi}_j(t,\nu))'_t), k=1{,}2, j=\overline{2,m}, t\to+0,$$

рівномірно відносно $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$ для кожного довільного фіксованого $\widetilde{Y}_2(z(t,\nu))$ з множини $\widetilde{\Omega}(t,\widetilde{Y}_2)$;

2) для кожного фіксованого $Y_1(z(t,\nu))$ з множини $\Omega(\nu,Y_1,\sigma)$ функції $tF_{k1t}(\nu,Y_{11}(\nu),Y_{12}(\nu),\widetilde{Y}_{21}(\nu),\widetilde{Y}_{22}(\nu))$ і $tF_{kjt}(\nu,Y_{11}(\nu),Y_{12}(\nu),\widetilde{Y}_{21}(\nu),\widetilde{Y}_{22}(\nu))$, $k=1{,}2$ мають властивість Q відносно функцій $t^{kl}\left|p_{11}(z(t,\nu))\right|\overset{(1)}{\psi}_1(t,\nu)$ и $t^{kl}(\overset{(1)}{\psi}_j(t,\nu))'_\nu, k=1{,}2, j=\overline{2,m},$ відповідно для кожного довільного фіксованого $\widetilde{Y}_2(z(t,\nu))$ з множини $\widetilde{\Omega}(\nu,\widetilde{Y}_2)$.

Введемо на комплексній площині множини точок

$$\mathrm{E}_{2.1-}(t_1)=\{(t,\nu):\cos(\nu+\alpha_{11\nu}(t))<0,\sin(\nu+\alpha_{11t}(\nu))>0, t\in(0,t_1],\nu\in[\nu_1,\nu_2]\},$$
$$\mathrm{E}_{2.2-}(t_1)=\{(t,\nu):\cos(\nu+\alpha_{11\nu}(t))>0,\sin(\nu+\alpha_{11t}(\nu))>0, t\in(0,t_1],\nu\in[\nu_1,\nu_2]\},$$

де $t\in(0,t_1],\nu\in[\nu_1,\nu_2]$ і як $\alpha_{jk\nu}(t)$ и $\alpha_{jkt}(\nu)$ позначимо функції, косинуси и синуси яких :

$$Cos\alpha_{ik\nu}(t)=\frac{\operatorname{Re}p_{ik\nu}(t)}{\sqrt{(\operatorname{Re}p_{ik\nu}(t))^2+(\operatorname{Im}p_{ik\nu}(t))^2}};\ Sin\alpha_{ik\nu}(t)=\frac{\operatorname{Im}p_{ik\nu}(t)}{\sqrt{(\operatorname{Re}p_{ik\nu}(t))^2+(\operatorname{Im}p_{ik\nu}(t))^2}},$$

де $p_{ik\nu}(t)=p_{ik}(z(t,\nu))=\operatorname{Re}p_{ik}(t)+i\operatorname{Im}p_{ik}(t)$, $i,k\in\{1,\ldots n\}$ при фіксованому $\nu\in(0,2\pi]$.

Позначимо як $\widetilde{G}_{2.j-}(\rho)=\{z:0<|z|\le\rho, Argz\in\mathrm{E}_{2.j-}(\rho)\}, j\in\{1,2\}$,

Означення. Будемо вважати, що система (6) належить класу T_{2j}, $j=1{,}2$, якщо матриця $P(z)=P(te^{i\nu})$ така, що $(t,\nu)\in\mathrm{E}_{2.j-}(t_1)$.

Теорема 1.*j*. (*j* = 1,2). Нехай система (1) задовольняє наступні умови:

1) однозначна матриця $A:D\to C^{m\times n}$, $m<n$, аналітична в області D і існує область $D_1\subset D$, $0\in D_1$, така, що в D_1 rang$A(z)=m$;

2) матриці $A(z)$, $B(z)$ і функція $f(z,Y)$ мають вигляд (3); причому матриця $B(z)$ аналітична в області D_{10} і в точці $z=0$ має усувну особливу точку, а вектор-функція $\widetilde{f}(z,Y_1,Y_2)$ аналітична в $D_{10}\times G_{210}\times G_{220}$, в точці (0,0,0) має ізольовану особливу точку, містить у розвитку в околі точки (0, 0, 0) скінчену кількість членів розвитку по Y_2;

3) $Y_2(z)$ належить класу $H_{1.k}^{n-m}$ і подана у вигляді (5);

4) система (6) така, що для кожного довільного фіксованого $\widetilde{Y}_2 = z^k Y_2(z)$ виконано:

а) система (6) має властивість S_2 відносно функцій $\overset{(1)}{\varphi}(z(t,\nu))$, $\overset{(2q)}{\varphi}(z(t,\nu))\ (q = 0{,}1)$ при $t \in (0, t_1]$;

б) система (6) належить класу T_{2j};

в) система (6) має властивість M_2 відносно функції $F(z, Y_1, \widetilde{Y}_2)$, $F_j = F_{1j} + iF_{2j}$, $j = \overline{1,m}$, при $t \in (0, t_1]$, $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ для кожного довільного фіксованого $\widetilde{Y}_2$.

Тоді при j = 1,2 знайдеться таке $\rho \in (0, t_1]$, що при $z \in \widetilde{G}_{2.j-}(\rho)$ задача Коші для системи (1) з початковими значеннями (z_0, Y_1^0, Y_2^0):

$$z_0 \in \widetilde{G}_{2.j-}(\rho), Y_1^0 \in \left\{ Y_1 : \left|Y_{1kj}(z_0)\right| < \delta_j \left|\overset{(1)}{\varphi}_j(z_0)\right|, \delta_j > 0, j = \overline{1,m}, k = 1{,}2 \right\},$$

$$Y_{1j}(z) = Y_{11j}(z) + iY_{12j}(z), \widetilde{Y}_2^0 = z_0^k Y_2^0$$

для кожного $\widetilde{Y}_2(z)$, яке задовольняє

$$\left|(\widetilde{Y}_{2kj}(z))^{(q)}\right| = O(\left|(\overset{(2q)}{\varphi}_j(z))\right|), k = 1{,}2, \widetilde{Y}_{2j}(z) = \widetilde{Y}_{21j}(z) + i\widetilde{Y}_{22j}(z), j = \overline{1, n-m}, q = 0{,}1, \quad (7)$$

$z \in \widetilde{G}_{2.jk}(\rho), k \in \{+,-\}$, має хоч би один аналітичний *розв'язок*

$$Y(z) = col(Y_{11}(z), ..., Y_{1m}(z), \widetilde{Y}_{21}(z), ..., \widetilde{Y}_{2(n-m)}(z)),$$

перші m компонент якого задовольняють

$$\left|Y_{1j}(z)\right| < \delta_j \left|\overset{(1)}{\varphi}_j(z)\right|, j = \overline{1,m}. \quad (8)$$

Доведення теореми 1.*j*. в три етапи методом аналітичного продовження розв'язків за допомогою топологічного принципу Важевського аналогічно [5], [6].

На першому етапі доводиться існування хоча б одного розв'язку системи (1), задовольняючого деякій оцінці, коли z змінюється вздовж відрізка променя однимз кінців якого є точка $z = 0$.

На другому етапі доведено існування нескінченної множини розв'язків системи з аналогічною першому етапу оцінкою, коли z змінюється вздовж дуги кола з центром у точці $z = 0$.

На третьому етапі здійснюється аналітичне продовження розв'язків, які були знайдені на першому етапі, на область з особливою точкою $z = 0$ на межі, при цьому знайдена оцінка продовжених розв'язків.

Дана робота є продовженням досліджень, покладених в [5 – 6]. Для одного класу диференціальних систем (1) одержано достатньо умов про існування аналітичних розв'язків задачі Коші (1) … (2), причому, якщо останні *n-m* компонент є довільними функціями з класу $H_{1.k}^{n-m}$ і задовольняють (7), то перші *m* компонент розв'язку мають асимптотику (8) при $z \in \widetilde{G}_{2.j-}(\rho)$, j = 1,2.

Література

1. *Самойленко А.М.,Яковец В.П.*О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме //Доклады АН Украины. – 1993. – №4. – С.10-15.
2. *Campbell St.*Uniqueness of completions for linear time varing differention algebraic equations //Linear Algebra and Appl. – 1992. – P. 55-67.
3. *Бояринцев Ю.Е.*Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – 213 с.
4. *März R.*On the stability behaviour of systems obtained by index- reduction // Journal of Comp.Applied Math. – 1994. – 56. – P.305-319
5. *Самкова Г.Е., Шарай Н.В.*Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц //Нелінійні коливання. – 2002. – №2. – С. 224-236.
6. *Шарай Н.В.*Об асимптотике решений полуявных систем дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. – 2005. – №1. – С.132-144.