УДК 621.391

Горбачев М.Н.
Gorbachev M.N.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ И СИСТЕМАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

EFFECTIVE OF GEOMETRIC SIMULATION OF PERIODIC POWER PROCESSES IN RADIOTECHNIC CIRCUITS AND SYSTEMS WITH ALTERNATE PARAMETRES

Аннотация. Рассмотрены элементы теории геометрического моделирования периодических негармонических энергетических процессов в радиотехнических цепях и системах с переменными параметрами и показана эффективность этой теории.

Summary. The elements of theory of geometric simulation is proposed and formulated for quasisteady periodic power processes in dirigible radiotechnic circuits and systems with alternate parametres.

В настоящее время теория математического моделирования различных периодических процессов (например, энергетических) развивается как за счет роста порядка описывающих их систем уравнений, так и за счет повышения точности получаемых решений с помощью численных и численно-аналитических методов. При традиционном подходе построение наглядных и удобных для исследования пространственных моделей сопряжено со значительными трудностями.

Математическое моделирование и анализ периодических энергетических процессов в радиотехнических и электрических цепях и системах с переменными параметрами при несинусоидальных напряжениях и токах является важной научной проблемой, тесно связанной с решением ряда теоретических и прикладных задач. Указанные системы широко применяются в различных областях электротехники, радиотехники и преобразовательной техники, включая системы электропитания радиоэлектронной аппаратуры.

При разработке, проектировании и расчете рабочих режимов в указанных радиотехнических цепях и системах необходимо находить и использовать для анализа математические модели исследуемых периодических (квазиустановившихся) энергетических процессов. Работам в этой области посвящен ряд публикаций, например, [1 – 5] и др. В указанных публикациях при анализе и аналитическом расчете установившихся энергетических процессов традиционно применяются методы математического моделирования, основанные на использовании ограниченного количества гармонических составляющих напряжений и токов, действующих в цепях и системах и имеющих существенно несинусоидальную форму. Поэтому получаемые в результате энергетические соотношения являются приближенными и требуют оценки погрешности выполненных расчетов.

Кроме того, другой недостаток используемого традиционного подхода заключается в том, что квазиустановившийся энергетический процесс исследуется с помощью одной или нескольких одномерных моделей, каждая из которых отражает (моделирует) не весь электрофизический процесс, а лишь отдельные его стороны. Недавно появились работы [6 – 9], в которых предложен и развит нетрадиционный метод получения геометрических моделей указанных выше энергетических процессов. Однако в литературе отсутствует обоснование эффективности этого метода.

Целью настоящей работы является обоснование эффективности метода геометрического моделирования периодических энергетических процессов и его применения для нахождения точных трехмерных моделей указанных процессов в электрических цепях и системах с переменными параметрами, находящихся под воздействием негармонических сигналов. При этом метод геометрического моделирования позволяет в значительной степени уменьшить оба указанные выше недостатка, присущие применяемым традиционным методам [1 – 5].

Предложенный метод геометрического моделирования состоит в том, что некоторый физический (энергетический) процесс отображается как единое целое в виде пространственной геометрической модели на криволинейной поверхности с помощью соответствующей системы уравнений. Это дает возможность изучать энергетический процесс с помощью его геометрической модели, которую можно находить на основе векторного представления полной мощности S и ее ортогональных составляющих P, Q, N в евклидовой системе координат:

$$\bar{S} = P\bar{i} + Q\bar{j} + N\bar{k} \, . \tag{1}$$

При этом ортогональность составляющих векторов P, Q и N является физически обусловленной, что следует из уравнения энергетического баланса, выражающего закон сохранения энергии [4, 5]:

$$P^2 + Q^2 + N^2 = S^2 . \tag{2}$$

Таким образом, соотношения (1) и (2) являются соответственно математическим и физическим обоснованием рассматриваемого геометрического подхода в теории математического моделирования энергетических периодических процессов в радиотехнике.

Особенность моделируемых и изучаемых периодических энергетических процессов, как было указано, состоит в том, что напряжения и токи во всех элементах цепи с изменяющимися параметрами являются существенно негармоническими функциями времени, содержащими бесконечный спектр гармоник. Поэтому при расчете и нахождении трехмерных геометрических моделей указанных процессов использованы исходные соотношения, определяющие составляющие полной мощности S на входе цепи или системы согласно теории электрических цепей [4, 5]:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos\phi_k = U_о I_о + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\phi_k ; \tag{3}$$

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \sin\phi_k ; \tag{4}$$

$$S = U \cdot I = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2\right)} ; \tag{5}$$

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} , \tag{6}$$

где P – активная составляющая; Q – реактивная составляющая; T – мощность искажения; $\phi_к$ – фазовый угол гармоники порядка k .

В общем случае составляющие P, Q и N необходимо представить в виде единой системы уравнений от двух переменных (двух параметров) ν и ϕ, описывающей искомую трехмерную геометрическую модель исследуемого энергетического процесса:

$$\begin{cases} P = f_1(\nu, \phi), \\ Q = f_2(\nu, \phi), \\ T = f_3(\nu, \phi), \end{cases} \tag{7}$$

где $f_1(\nu, \phi)$, $f_2(\nu, \phi)$ и $f_3(\nu, \phi)$ – непрерывные дифференцируемые функции по обоим аргументам в области определения D: $\nu_{\min} \le \nu \le \nu_{\max}$; $\phi_{\min} \le \phi \le \phi_{\max}$.

Известно, что полная мощность в исследуемых радиотехнических цепях и системах [1-5] в рабочих режимах является всегда величиной положительной и не равной нулю ($S > 0$), что позволяет пронормировать уравнения (2) и (7) по модулю вектора полной мощности:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 , \tag{8}$$

где

$$x = \frac{f_1(\nu, \phi)}{S}; \quad y = \frac{f_2(\nu, \phi)}{S}; \quad z = \frac{f_3(\nu, \phi)}{S} . \tag{9}$$

Уравнение (8) является каноническим уравнением сферической поверхности, то есть сферы единичного радиуса ($R = 1$), а x, y и z являются координатами изображающей точки $M(x, y, z)$ на этой сфере [6 – 9]. При этом совокупность изучаемых энергетических процессов моделируется в виде отображающей части сферической поверхности на сфере $R = 1$ в зависимости от заданной области определения D переменных параметров.

В тех случаях, когда переменные параметры ν и ϕ удается свести к одному новому переменному параметру (например, параметру регулирования α), то тогда система (9) сводится к однопараметрической системе уравнений, определяющей некоторую пространственную сферическую кривую:

$$\begin{cases} x = F_1(\alpha), \\ y = F_2(\alpha), \\ z = F_3(\alpha). \end{cases} \tag{10}$$

В общем случае система уравнений (10) определяет неплоскую пространственную кривую на сфере единичного радиуса [6 – 9], которая является геометрической моделью отображаемого энергетического процесса и соответствующих ему рабочих режимов, что дает основание назвать эту сферическую кривую режимной траекторией.

С геометрической точки зрения эти кривые представляют собой непрерывное отображение отрезка $[\alpha_{\min},\ \alpha_{\max}]$ вещественной оси α в трехмерном Евклидовом пространстве:

$$x,\ y,\ z : \alpha\ \Leftrightarrow f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\ f_3(\alpha)\ .$$

Следовательно, семейство параметрических кривых можно рассматривать как геометрические пространственные модели (геометрические образы) отображаемых ими периодических электрофизических (энергетических) процессов в исследуемых радиотехнических объектах. Таким путем задача исследования этих процессов с помощью параметрической системы уравнений (10) может быть сведена к задаче изучения и сопоставления пространственных кривых двумя способами: 1) с помощью нахождения их длины, кривизны и кручения [6 – 9]; 2) с помощью криволинейных интегралов второго типа.

Например, во втором случае систему параметрических уравнений (10) можно рассматривать как оператор отображения $E(S)$ в трехмерном Евклидовом пространстве вектора полной мощности $S(x,\ y,\ z)$ на криволинейную поверхность с положительной кривизной:

$$E(S) = \int\limits_{(L)} S(x,\ y,\ z)dl = \int\limits_{\alpha_o}^{\alpha_{\max}} \widetilde{S}[x(\alpha),\ y(\alpha),\ z(\alpha)] \cdot \sqrt{[x'(\alpha)]^2 + [y'(\alpha)]^2 + [z'(\alpha)]^2}\, d\alpha\,,$$

где α_o и $\alpha_{\max}$ – соответствующие начальное и конечное значения переменного параметра на пространственной кривой L.

Приведенные теоретические положения можно проиллюстрировать на примере решения задачи нахождения геометрической модели периодических энергетических процессов для цепи первого порядка, находящихся под воздействием негармонического сигнала.

В качестве входного сигнала при построении трехмерных математических моделей указанных энергетических процессов использовано периодическое знакопеременное напряжение в форме меандра, представимое в виде полного ряда Фурье, содержащего бесконечный спектр гармоник [4, 5]:

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\Omega t + \psi_u)}{k}, \tag{11}$$

где E – амплитуда, а ψ_u – начальная фаза напряжения $u(t)$; $k = 2n - 1$; $n = 1, 2, 3, \ldots \infty$.

Реакция цепи в виде тока $i(t)$ имеет вид:

$$i(t) = \frac{4E}{\pi R} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\sin(k\Omega t + \psi_u - \varphi_k)}{k\sqrt{1 + q^2 k^2}}. \tag{12}$$

При этом имеют место следующие тождества:

$$\cos\varphi_k = \cos(\mathrm{arctg}(kq)) = \frac{1}{\sqrt{1 + q^2 k^2}}; \tag{13}$$

$$\sin\varphi_k = \sin(\mathrm{arctg}(kq)) = \frac{kq}{\sqrt{1 + q^2 k^2}}. \tag{14}$$

Для рассматриваемого случая найдены следующие расчетные соотношения:

$$P = \frac{8E^2}{\pi^2 R} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\lambda^2}{k^2(k^2 + \lambda^2)}; \tag{15}$$

$$Q = \frac{8E^2}{\pi^2 R} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\lambda}{k(k^2 + \lambda^2)}; \tag{16}$$

$$S = \frac{8E^2}{\pi^2 R}\sqrt{\left(\sum_{k=1,3,...}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(\sum_{k=1,3,...}^{\infty}\frac{\lambda^2}{k^2\left(k^2+\lambda^2\right)}\right)}, \tag{17}$$

где $\lambda = \dfrac{1}{q}$.

Как видно из соотношений (3) – (6) и (15) – (17), полная мощность и ее составляющие являются бесконечными функциональными рядами. Эти ряды обладают высокой сходимостью, что позволяет находить их суммы в замкнутом аналитическом виде, либо численно с высокой точностью. В зависимости от вида получаемых функциональных рядов рассматриваемые задачи можно решать следующими способами: 1) аналитическим; 2) численным и 3) численно-аналитическим, представляющим собой сочетание численного и аналитического методов.

Для рассматриваемой задачи на основе численно-аналитического метода с учетом нормировки полученных расчетных соотношений, необходимой для перехода к сфере единичного радиуса, найдена трехмерная геометрическая модель (режимная траектория), описываемая следующей параметрической системой уравнений:

$$\begin{cases} x = Ae^{-aq}, \\ y = Be^{-bq}, \\ z = \sqrt{1 - A^2 e^{-2aq} - B^2 e^{-2bq}}, \end{cases} \tag{18}$$

где A, B, a и b – постоянные коэффициенты ($0 < A \le 1;\ 0 < B < 1;\ 0 < a < 1;\ 0 < b < 1$).

В качестве известных величин выбраны физические параметры радиотехнической цепи типа *RL*. При этом частота следования негармонических сигналов $\Omega = \text{const}$, а переменной величиной является добротность, которая изменяется в широких пределах: $1 \le q \le 200$.

Следовательно, трехмерную геометрическую модель, описываемую системой уравнений (18) и рассчитанную численно аналитическим способом, можно найти только на основе разработанного метода геометрического моделирования. Отдельные компоненты полной мощности можно находить и традиционными методами, однако при этом обычно учитывают усеченные ряды Фурье в формулах (11) и (12) и, следовательно, получаемые одномерные модели для отдельных компонент полной мощности являются приближенными.

Таким образом, решению указанной выше проблемы физически наиболее соответствуют трёхмерные математические модели, учитывающие одновременно три основные компоненты полной мощности *S*, характеризующие энергетический процесс как физически единое целое: активную P, реактивную *Q* и мощность искажения *T*.

При этом трёхмерные геометрические (пространственные) модели указанных выше энергетических процессов, как видно из публикаций, разработаны сравнительно недавно и ещё не получили широкого применения [10 – 16].

Однако именно трёхмерные пространственные модели энергетических процессов, которые естественно назвать геометрическими моделями, в настоящее время являются наиболее перспективными и эффективными с точки зрения теории цепей с переменными параметрами [3 – 5] и её приложений. Это связанно с тем, что трёхмерные геометрические модели обладают рядом существенных преимуществ по сравнению с традиционными одномерными моделями этих же процессов. Указанные преимущества выражаются в следующих основных свойствах упомянутых трёхмерных геометрических моделей:

1) более высокой информативности;
2) наглядности и наблюдаемости (обозримости);
3) универсальности.

Поясним смысл этих свойств. Так как в основу геометрического моделирования периодических энергетических процессов положено векторное представление полной мощности *S*, то ортогональным компонентам *P*, *Q* и *T* этого вектора можно поставить в соответствие координаты трехмерного Евклидового пространства:

$$x \sim P,\ y \sim Q \quad \text{и} \quad z \sim T.$$

Следовательно, каждая произвольная точка *M* (*x*, *y*, *z*) этого пространства отображает энергетическое состояние исследуемого объекта (цепи или системы), характеризуемое одновременно компонентами *P*, *Q* и *T* полной мощности *S*, которые зависят, в свою очередь, от некоторого определенного переменного параметра (например, от добротности цепи, угла регулирования управляемого элемента цепи и др.). При изменении переменного параметра изображающая точка *M* (*x*, *y*, *z*) будет перемещаться на криволинейной (сферической) поверхности по некоторой кривой, которую можно назвать параметрическим годографом вектора полной мощности. Поэтому трёхмерные геометрические модели, во-первых, содержат больше информации об энергетическом процессе по сравнению с одномерной моделью этого же процесса и, во-вторых, являются более наглядными и наблюдаемыми, так как отображают процесс как единое целое. Трёхмерные геометрические модели позволяют, образно говоря, как бы "увидеть" новый – геометрический образ или портрет исследуемого энергетического процесса "глазами его модели". При этом геометрическая модель как параметрический годограф вектора полной мощности представляет собой часть сферической кривой, начало и конец которой соответствуют граничным значениям выбранного переменного параметра. Это означает, что геометрическая модель является компактной и наглядной пространственной трехмерной моделью в виде кривой, расположенной на сфере, радиус которой $R = 1$.

Таким образом, трехмерные геометрические модели периодических энергетических процессов в радиотехнических цепях и системах с переменными параметрами представляют собой пространственные кривые, расположенные на сферических оболочках единичного радиуса ($R = 1$).

Кроме указанных выше достоинств, трехмерные геометрические модели периодических энергетических процессов являются универсальными и обобщенными математическими моделями, так как позволяют за счет нормирования системы уравнений (7) выполнить геометрическое отображение годографов вектора полной мощности на сферу единичного радиуса согласно уравнению (8). Это означает, что вместо системы сферических оболочек разных радиусов можно рассматривать одну сферу единичного радиуса, на которой расположатся годографы вектора полной мощности, отображающие энергетические процессы не только в одной цепи или системе при одном негармоническом входном сигнале, но и в нескольких различных цепях и системах при различных негармонических сигналах. Следовательно, отсюда вытекает принципиальная возможность решения в общей постановке задач сравнительного анализа энергетических периодических процессов в различных радиотехнических цепях и системах, находящихся под воздействием негармонических сигналов разной формы.

В результате решения данной задачи и подобных ей задач для радиотехнических цепей первого порядка с переменной добротностью (например, для цепи типа *RC*) сделаны следующие выводы:

1) показано, что геометрические модели периодических энергетических негармонических процессов представляют собой пространственные кривые общего вида, расположенные на поверхности сферы единичного радиуса, что позволяет определить их основные геометрические параметры: длину, кривизну, кручение [6 – 9], которые в общем случае не равны нулю;

2) на основании найденных геометрических моделей и соответствующих им физических и геометрических параметров можно выполнить сравнительный анализ энергетических процессов и рабочих режимов в исследуемых радиотехнических цепях типа *RL* и *RC* и других системах с переменным параметром;

3) показано, что геометрическое отображение исследуемых энергетических процессов на сферическую поверхность обладает свойствами непрерывности и взаимно-однозначного соответствия, что следует из уравнений (7) – (10), а также является эффективным инструментом для исследования этих процессов;

4) преимуществом трехмерных геометрических моделей энергетических процессов и рабочих режимов в радиотехнических цепях и системах с переменными параметрами являются их информативность, универсальность, компактность, наглядность и удобство для исследования и представления полученных результатов.

Кроме того, геометрическое моделирование значительно расширяет возможности исследователей, так как позволяет наряду с аппаратом математического анализа применить аппарат аналитической и дифференциальной геометрии [6-9], что способствует углублению и обобщению знаний об исследуемых энергетических процессах в указанных радиотехнических цепях и системах.

В заключение отметим, что в статье обосновано эффективность метода геометрического моделирования периодических энергетических процессов.

Литература

1. *Транзисторные* усилители и преобразователи. Передовой научно-технический и производственный опыт / Ю.И. Конев и др. – 1963. – № 28-63-58/13.
2. *Rye T.P.* High-power transistor DC converters // Electronic and Radio Engineering. – 1959. – V. 36. – № 3, march.

3. *Никитин В.Б.* Транзисторные преобразователи постоянного напряжения в синусоидальное // Полупроводниковые приборы и их применение: Сб. ст.; Под ред. Я.А.Федотова. – Вып. 14. – М.: Советское радио, 1965. – С. 243-259.
4. *Нейман Л.Р., Демирчян К.С.* Теоретические основы электротехники. – Т.1. – Л.: Энергия, 1967. – 522 с.
5. *Зернов Н.В., Карпов В.Г.* Теория радиотехнических цепей. – Л.: Энергия, 1972. – 816 с.
6. *Погорелов А.В.* Лекции по аналитической геометрии. – Харьков: Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1963. – 182 с.
7. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. – Харьков: Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1965. – 185 с.
8. *Постников И.М.* Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 312 с.
9. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука, 1986. – 760 с.
10. *Горбачев М.Н.* Теория геометрического моделирования электроэнергетических процессов в электрических цепях и системах с управляемыми элементами // Труды 4-й Международной научно-практической конференции. «Системы и средства передачи и обработки информации». – Одесса: УГАС им. А.С.Попова, 2000. – С.57-58.
11. *Горбачев М.Н.* Геометрическое моделирование физических процессов в электрических цепях и системах управляемыми элементами // Труды IV Международной научной конференции «Геометрия и топология» – Черкассы: Черкасский технологический институт. – 2001. – С.71-73.
12. Горбачев М.Н. Энергетический анализ периодических процессов в цепи *RL* при негармоническом входном напряжении // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – №1. – С.59-62.
13. *Горбачев М.Н.* Введение в теорию геометрического моделирования периодических негармонических процессов в управляемых радиотехнических и электрических цепях и системах // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2006. - №1. – С. 66-73.
14. *Горбачев М.Н., Несененко Г.А., Какошин С.С.* Элементы теории геометрического моделирования периодических электрофизических процессов и некоторые задачи электродинамики // Тезисы докладов 5-й Международ. конф. по геометрии и топологии. – Черкассы: Черкасск. Госуд. технологич. ун-т, 2003. – С. 33-34.
15. *Горбачев М.Н.* Математическое моделирование электроэнергетических процессов и режимов работы силовых преобразовательных устройств с управляемыми электронными приборами на основе геометрических представлений // Материалы VI Международ. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП-2002). – Том 6. – Новосибирск: Новосибирск. Госуд. Техн. университет, 2002. – С. 186-190.
16. *Горбачев М.Н., Кокошин С.С., Несененко Г.А.* Трехмерные модели электроэнергетических негармонических процессов и некоторые задачи электродинамики // Тезисы докладов 6-ой Международ. конф. по геометрии и топологии. – Черкассы: Черкасск. Госуд. технологич. ун-т., 2005.